This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

William Hughes

Digitized by Google

ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

THE GIFT OF
Prof. Louis Karpinski

Digitized by Google

Variant from other copy in U.M., 1907. L.C.K.

QA
31
.E8
S7
160

ad centrum constituti
mensura anguli est arcus circuli
inter crura comprehensus.
ad periferiam vero constituti est
semissis eius arcus inter crura
comprehensus

Digitized by Google

Digitized by Google

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBRI XV.

Acceſſit liber XVI. De Solidorum Regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione.

OMNES PERSPICVIS DEMONSTRAtionibus, accuratíſque ſcholiis illuſtrati: nunc quartò editi, ac multarum rerum acceſſione poſt primam editionem locupletati.

Auctore

CHRISTOPHORO CLAVIO Bambergenſi è Societate IESV.

Ex libris fr. minorum Conuentus Cremonicæ



FRANCOFVRTI,
Ex Officina Typographica Nicolai Hoffmanni.
Sumptibus Jonæ Rhodii.

M. DC. VII.

Digitized by Google

Gift
Professor Louis Karpinski
5-18-1935
add. ed.

Digitized by Google

CLARISSIMO AC EXCELLENTISSIMO VIRO, DN. IOHANNI HARTMANNO BEYERO,

Philoſophiæ ac Medicinæ Doctori, Reipublicæ Francofordianæ ad Mœnum Phyſico primario,

Dn. Fautori ac Compatri ſuo plurimùm colendo,

IONAS RHODIVS Bibliopola Salutem.

SI quæ ſunt, Clariſſime ac Excellentiſſime Domine Doctor, compater plurimùm colende, quæ artem aliquam nobilitare, laudibúſque euehere poſſunt, Geometria me hercle eorum in promptu permulta habet; Præter enim anti-

Digitized by Google

Ioſeph. lib. 1. quiſſimam originem, quam ab A-
brahamo pertraxiſſe, ab eóque a
Herodot. lib. 2. Ægyptios deueniſſe creditur, eiuſ-
que eximios & præſtantes cultores
Diodor. lib. 2. inter quos primarii fuére Mœris, Py-
Strabo lib. 17. thagoras Samius, Ptolomæus, Tha-
les Mileſius, Archytas Tarentinus,
Eudoxus, Democritus Abderites,
Heraclides Ponticus, Xenocrates
Chalcedonius, Theophraſtus Ereſ-
ſius, Epicurus Athenienſis, Apollo-
nius Pergæus Geometra Magnus ap-
pellatus, Didymus Alexandrinus
præſul Cæſarienſis, Paulus Florenti-
nus, & alii permulti: tanta & tam in-
numerabilia etiam extant grauiſſi-
morum autorum teſtimonia, quæ
vtilitatem & neceſſitatem illius præ-
grandem conteſtantur, vt impoſſibi-
le ſit, ea omnia recenſere. Plato enim
diuinus ille Philoſophus, non modò
Græcis oraculum apud Ægyptios

acce-

Digitized by Google

ſceptum nõ intelligentibus, Deum *Plutarchus in commẽtario de dæmonio Socratis.*
iidem imperitiam exprobraſſe, eoſ-
que, vt Geometriæ operam darent,
admonere, reſpondit, verùm etiam
ideò neminẽ, niſi huius artis peritũ,
auditorio ſuo admiſit, vt talia etiam,
ὠδαῖς, ſcilicet, ἀγεωμέτρητος εἰσίτω, eidem non
veritus fuerit affigere. Vnde de Sa-
cerdotibus Ægyptiorum hoc inpri-
mis commendatur, quòd liberos
ſuos liberalibus artibus erudiendos
tradẽtes voluerint præcipuè, vt Geo-
metriæ præceptis erudirentur.

Theſſalo quin etiam filio ſuo prę-
cepit Hippocrates, vt Arithmeticam
& Geometriam nõ ſolùm ad ſplen-
dorem vitæ, ſed ad Medicinæ etiam
vſum ſtudioſè perdiſceret: Arithme-
ticam quidem, ad morborum perio-
dos ac criſes: Geometriam verò, ad
membrorum ſitum luxationemq́;
cognoſcendam.

 Ita

Cicero. Ita etiam Diodorus Stoicus poſt viſum amiſſum, licèt multò magis aſſiduè, quàm antea in Philoſophia verſaretur, fidibúſque Pythagoreorum more vteretur, præ cæteris tamen exercitiis omnibus (quod fieri tamen poſſe vix creditur) Geometriæ munus tuebatur, eóque quamplurimùm oblectabatur.

Eraſm. in adagiis. Philo autem Geometriam ἀρχὴν ϗ μητρόπολιν appellabat omnium diſciplinarum, quòd ſcilicet rerum omnium intelligibilium imagines veríque veſtigia tanquam in politiſſimo ſpeculo demonſtret, mentémque purgatam paulatim abducat à ſenſu.

Vitruuius in proœmio libri ſexti. Ariſtippus Socraticus cùm naufragio facto eiectus ad Rhodienſium litus animaduertiſſet Geometrica ſchemata deſcripta, exclamauiſſe ad comites ita dicitur: *Bene ſperemus, hominum enim veſtigia video.* Archimedem

dem Syracuſanum Mathematicum inſignem tantùm huic arti deditum fuiſſe aiunt, vt cibi potúſque obliuiſceretur, corporíſque curam penitus negligeret; cúmque raperetur ſubinde inuitus ad vngendum corpus & ad balneum, in foco figuras Arithmeticas exarabat, dúmque vngeretur, digito lineas ducebat, tanta nimirum dulcedine artis non modò captus, verùm etiam omninò inflammatus. Cùm autem multa & præclara inueniſſet, dicitur ab amicis & cognatis petiiſſe, vt vita defuncti cylindrum ſphærā complectentem ſepulchro imponerent, inſcriberéntq; proportionem, quatenus ſolidum continens excedat contentū. *Plutarchus in Marcello.*

Et quis dubitat, Principem ſeu Ducem Iſraëlitarum Ioſuam in diuiſione terræ promiſſæ, Carolum Metellum in diſtributione regnorum

Digitized by Google

inter filios, Carolum Magnum, quin etiam Ludouicum Pium & Lotharium Imperatores, Valdemarum, Seſoſtrim Ægyptiorum Regem, Peloponnenſes & Iones, Lycurgũ, Caium Marium, Auguſtum Cæſarem, Ferguſium I. Scotorum Regem, & multos alios in huiuſmodi negotio hac præclariſſima arte fuiſſe vſos, cùm ipſius ſolius ope & auxilio maximas ſępe lites & diſſidia ſuſtulerint. Et, vt breuibus, quod res eſt, comprehendam, ſi nihil aliud, hoc ſanè noſtrum illud ſtudiũ artemq; abundantiſſimè commendabit, laudibúſque accumulabit multifariis, quod Plato dicit, Deũ ſemper γεωμετρεῖν, hoc eſt, certiſſimo motu omnia metientem gubernare hæc inferiora.

Cùm itaque huius ſummi artificis lineas non conſiderare, hacq; pulcherrima Geometria, quæ diuinita-

tem

tem nobis oſtendit, Deumq; mon-
ſtrat, non delectari, nec illius tam lu-
tulenta veſtigia aſpicere aut inquire-
re, ſumma & manifeſta ſit impietas,
nemo me hercle, niſi omnino depra-
uati ſit iudicij, vel tibi, clariſſime Do-
mine Compater, quòd huiuſmodi
artibus tantã hactenus nauaſti ope-
ram, vitio vnquam vertet, aut me et-
iam, qui præſens Euclidis exemplar
à Chriſtophoro Clauio Bambergen-
ſe illuſtratum typis etiam noſtris im-
primere nõ dubitauerim, atro, quod
aiunt, carbone notabit. Vt itaq; ego
laborem & impenſas in multorum
commodũ lubens ſuſcepi, ita tuum
erit, percolende Domine Compater,
illud idem, quod ad teſtandũ meum
erga te amorem & obſeruantiam tibi
dedico, non renuere. Dabatur
Francofurti 10. Cal. April.
Anno 1607.

Digitized by Google

CHRISTOPHORVS CLAVIVS E SOCIETATE IESV AD LECTOREM.

SCRIPSERAM *ſuperioribus annis in elementa Geometrica Euclidis, id eſt, in initia diſciplinarum Mathematicarum, commentarios: quorum omnibus iam diſtractis exemplaribus, cum alia eſſent recudenda, volui etiam dare operam, vt locupletiores multo, atque vberiores ederentur. quod Dei beneficio ſucceßit. Sic enim ſe res habet, quemadmodum nihil eſt ſimul inuentum, & perfectum, ſic nemo eſt, qui à principio in qualibet re ſcribenda, aut exponenda poßit omnia peruidere: multa apparent iterum*

Digitized by Google

um ac ſæpius cogitanti, quæ aciem quamlibet acutam ante fugiebant. Recte hoc quoque Euripides, ut pleraque omnia, ſapientiores ſolent eſſe poſteriores cogitationes. cum quo congruit, & cohæret vulgatum illud prouerbium, quod Publio tribuitur, Diſcipulus eſt prioris poſterior dies. Itaque, cum priorem editionem ſumerem poſtea in manus, multa eſſe animaduerti, quæ ſi adderentur, non pauca ex Archimedis, Apollonii, Ptolemæi, aliorumq; inuentis videbantur melius explicari poſſe: ſi videlicet è pronunciatis, ac theorematis Euclideis alia quoque necterentur. Quod ipſum etſi tunc etiam præſtiti, multo tamen nunc feci copioſius: interiiciens ea ſcilicet, quæ vel utilia, vel neceſſaria fore cenſui ad aliorum, ut dixi, auctorum cognitionem. Addidi inter cætera, ut ſpecimen dem aliquod rerũ, quæ hoc volumine acceſſerunt, demon-

ſtra-

Digitized by Google

ſtrationem Geometricam, eamq; apertiſsimam axiomatis vndecimi, quod proponitur ab Euclide: cum ea, quam allatam ſcimus à Proclo, mutila eſſe atque imperfecta videatur. Deſcriptionem item omnium figurarum, quæ rectilineæ æqualium laterum & angulorum appellantur, in circulo. Rationem præterea & breuem, nec obſcuram circuli quadrandi: rem, vt ſcis, tum à veteribus, tum à recentioribus ſic expetitam, vt multorum in ea conatus magis apparuerit, quam effectus. Effeci autem hoc (niſi fallor) ita accurate, ac ſubtiliter, vt tam perfecte approbetur quadratum æquale circulo, quam exquiſite rectilinea figura quælibet ad quadratum æquale ab Euclide dirigitur: imò (vt loquar aliquid audacius) aliquanto perfectius: cum ad quadrandum circulum paucioribus linearum ductibus ſit opus, quam ad figuram rectili-

Digitized by Google

AD LECTOREM.

lineam plurimorum angulorũ, via, & ratione quadrandam, vt aperte docebitur libro ſexto. Ad nonum denique librum adieci numerorum fractorum demonſtrationes clariſſimas, aliaque nonnulla, quæ nunc quidem non numero, quod ea mihi volo ad ipſamet loca, quibus explicabuntur, plena atque integra reſeruari. Laborem igitur hunc meum, qualiſcumque ſit, lector benigne ſuſcipe eoque in commodum tuum diu feliciterque vtere.

Vale.

QVÆ

Digitized by Google

QVÆ PRÆCIPVE *primæ editioni addita ſint.*

I.

DEMONSTRATIO Geometrica Axiomatis vndecimi Euclidis, [Si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad eaſdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ ſibi mutuo incident ad eas partes, vbi ſunt anguli duobus rectis minores] multo euidentior, quam ea, quam Proclus affert. *Ad propoſ.28.lib.1.*

II.

DIVISIO lineæ rectæ in quotuis æquales partes, per ſolas priores 40. propoſ. lib.1. abſque ope proportionum ſexti lib. *Ad propoſ.40.lib.1.*

III.

QVO pacto conſtruenda ſint triangula amblygonia, & oxygonia, vt in numeris apparere poſſint, quæ ab Euclide demonſtrata ſunt propoſ. 12.& 13.lib.2. *Ad propoſ.12.& 13.lib.2.*

IV.

RESPONSIO ad Apologiam Iacobi Peletarij, de angulo contactus. *Ad propoſ.16.lib.3.*

V.

CONSIDERATIO pulcherrima de figuris planis æquilateris, atque æquiangulis intra circulum, & extra circulum deſcriptis: Num ſcili-

Digitized by Google

ſcilicet, omnis æquilatera ſit æquiangula etiam, & omnis æquiangula ſit quoque æquilatera. *Ad finem lib. 4.*

VI.

TRACTATIO copioſiſſima de proportionibus, & tribus præcipuis proportionalitatibus, Arithmetica, Geometrica, atque Harmonica. *Ad defin. 4. lib. 5.*

VII.

PVLCHRA contemplatio, cur Euclides in defin. 6. & 8. lib. 5. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum æquè multiplicia definierit. *Ad defin. 8. lib. 5.*

VIII.

DESCRIPTIO inflexæ cuiuſdam lineæ facillima, per quam & in circulo figura quotlibet laterum æqualiũ deſcribitur: circulus quadratur: angulus rectilineus in quotuis partes æquales diſtribuitur: Cuilibet arcui circuli recta æqualis exhibetur, & contrà; Et denique alia ſcitu iucundiſſima perficiuntur. *Ad finem lib. 6.*

IX.

QVO pacto pleraque theoremata libri 7. demonſtrentur quoque de numeris fractis, ſiue ipſis adhæreant numeri integri, ſiue non. *Ad propoſitiones lib. 7.*

X.

MINVTIARVM, ſiue numerorum fractorum demonſtrationes clariſſimæ. *Ad finem lib. 7.*

XI.

DE Proportionum compoſitione; quo videlicet

Digitized by Google

licet modo Additio, Subtractio, Multiplicatio ac Diuiſio fieri debeat: aduerſus quoſdam Recentiores. *Ad finem lib.9.*

XII.

DESCRIPTIO quinque corporum Regularium in data ſphæra, ex Pappo Alexandrino, & quidem facilior, quàm ea, quam nobis tradidit Euclides. *Ad finem lib.16.*

XIII.

COMPARATIO Soliditatum, & ſuperficierum conuexarum, eorundem quinq; corporum Regularium inter ſe. *Ad finem lib.16.*

Cætera, quæ paſſim hiſce commentariis adiecta ſunt non pauca, quæ in aliis editionibus deſunt, cuiuſmodi eſt præſertim accuratior inuentio vltimorum punctorum Quadratricis per lineas perpendiculares, non autem per obliquas linearum interſectiones, &c. diligens Lector nullo negotio notabit.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIONES OMNIVM XVI. LIBRORVM, QVARVM EAS, QVÆ IN lib. 5. 14. 15. & 16. Euclidis non ſunt, quamuis in numerum propoſitionum relatæ ſint, alio charactere expreſſimus.

PRIMI LIBRI.

SVPER data recta linea terminata triangulum æquilaterum conſtituere.

AD datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.

3 DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, de maiore æqualem minori rectam lineam detrahere.

4 SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, vtrumq; vtriq;, habeant verò & angulum angulo æqualem ſub æqualibus rectis lineis contentum: Et baſim baſi æqualem habebunt; eritque triangulum triangulo æquale, ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, vterque vtrique, ſub quibus æqualia latera ſubtenduntur.

5 *ISOSCELIVM* triangulorum, qui ad baſim ſunt, anguli inter ſe ſunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui ſub baſi ſunt, anguli inter ſe æquales erunt.

6 SI trianguli duo anguli æquales inter ſe fuerint: Et ſub æqualibus angulis ſubtenſa latera æqualia inter ſe erunt.

7 SVPER eadem recta linea, duabus eiſdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, non conſtituentur, ad aliud atque aliud punctum, ad eaſdem partes, eoſdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

8 SI duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, vtrumq; vtrique, æqualia; habuerint verò & baſim baſi æqualem: Angulum quoque ſub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt.

9 DATVM angulum rectilineum bifariam ſecare.

10 DATAM rectam lineam finitam bifariam ſecare.

11 *DATA* recta linea, à puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

12 *SVPER* datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod in ea non eſt, perpendicularem rectam deducere.

Digitized by Google

13 CVM recta linea ſuper rectam conſiſtens lineam angulos fa-
cit: Aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.

14 SI ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, duæ
rectæ lineæ non ad eaſdem partes ductæ eos, qui ſunt deinceps
angulos duobus rectis æquales fecerint: in directum erunt in-
ter ſe ipſæ rectæ lineæ.

15 SI duæ rectæ lineæ ſe mutuo ſecuerint, angulos ad verticem
æquales inter ſe efficient.

16 CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto, exter-
nus angulus vtrolibet interno, & oppoſito maior eſt.

17 CVIVSCVNQVE trianguli duo anguli duobus rectis
ſunt minores, omnifariam ſumpti.

18 OMNIS trianguli maius latus maiorem angulum ſubtendit.

19 OMNIS trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur.

20 OMNIS trianguli duo latera reliquo ſunt maiora, quomo-
docunque aſſumpta.

21 SI ſuper trianguli vno latere, & ab extremitatibus duæ rectæ
lineæ interius conſtitutæ fuerint: hæ conſtitutæ reliquis trian-
guli duobus lateribus minores quidem erunt, maiorem verò
angulum continebunt.

22 EX tribus rectis lineis, quæ ſunt tribus datis rectis lineis æ-
quales, triangulum conſtituere. Oportet autem duas reliquas
eſſe maiores omnifariam ſumptas: quoniam vniuſcuiuſque
trianguli duo latera omnifariam ſumpta reliquo ſunt maiora.

23 AD datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato
angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum conſtituere.

24 SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habue-
rint, vtrumq; vtriq;, angulum verò angulo maiorem ſub æqua-
libus rectis lineis contentum: Et baſin baſi maiorem habebũt.

25 SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habue-
rint, vtrumque vtrique, baſin verò baſi maiorem: Et angulũ
ſub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem ha-
bebunt.

26 SI duo triangula duos angulos duobus angulis æquales ha-
buerint, vtrumque vtrique, vnumque latus vni lateri æquale,
ſiue quod æqualibus adiacet angulis, ſeu quod vni æqualium
angulorum ſubtenditur: Et reliqua latera reliquis lateribus
æqualia, vtrumque vtrique, & reliquum angulum reliquo an-
gulo æqualem habebunt.

27 SI in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim an-
gulos æquales inter ſe fecerit: Parallelæ erunt inter ſe illæ re-
ctæ lineæ.

28 SI in duas rectas lineas recta incidens linea externum angu-
lum interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes, æqualem fece-
rit, aut

Digitized by Google

ſ, aut internos, & ad eaſdem partes duobus rectis æquales, [pa]rallelæ erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.

29 IN parallelas rectas lineas recta incidens linea: Et alternatim angulos inter ſe æquales efficit; & externum interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem; & internos, & ad eaſdem partes, duobus rectis æquales facit.

30 QVÆ eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter ſe ſunt parallelæ.

31 A dato puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

32 CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto: Externus angulus duobus internis, & oppoſitis eſt æqualis: Et trianguli tres interni anguli duobus ſunt rectis æquales.

33 RECTÆ lineæ quæ æquales, & parallelas lineas ad partes eaſdem coniungunt: Et ipſæ æquales, & parallelæ ſunt.

34 PARALLELOGRAMMORVM ſpatiorum æqualia ſunt inter ſe, quæ ex aduerſo & latera, & anguli: Atque illa bifariam ſecat diameter.

35 PARALLELOGRAMMA ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.

36 PARALLELOGRAMMA ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.

37 TRIANGVLA ſuper eadem baſi conſtituta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia.

38 TRIANGVLA ſuper æqualibus baſibus conſtituta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia.

39 TRIANGVLA æqualia ſuper eadem baſi, & ad eaſdem partes conſtituta: Et in eiſdem ſunt parallelis.

40 TRIANGVLA æqualia ſuper æqualibus baſibus, & ad eaſdem partes conſtituta: Et in eiſdem ſunt parallelis.

41 SI parallelogrammum cum triangulo eandem baſin habuerit, in eiſdemque fuerit parallelis: Duplum erit parallelogrammum ipſius trianguli.

42 DATO triangulo æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo.

43 IN omni parallelogrammo, complementa eorum, quæ circa diametrum ſunt, parallelogrammorum, inter ſe ſunt æqualia.

44 AD datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare, in dato angulo rectilineo.

45 AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum conſtituere, in dato angulo rectilineo.

46 A data recta linea quadratum deſcribere.

47 IN triangulis rectangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur, æquale eſt eis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur, quadratis.

Digitized by Google

48 SI quadratum, quod ab vno laterum trianguli deſcribitur æquale ſit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus deſcribuntur quadratis: Angulus comprehenſus ſub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus eſt.

SECVNDI LIBRI.

1 SI fuerint duæ rectæ lineæ, ſeceturq; ipſarum altera in quotcunque ſegmenta: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, æquale eſt eis, quæ ſub inſecta, & quolibet ſegmentorum comprehenduntur, rectangulis.

2 SI recta linea ſecta ſit vtcunque; Rectangula, quæ ſub tota & quolibet ſegmentorum comprehenduntur, æqualia ſunt ei quod à tota fit, quadrato.

3 SI recta linea ſecta ſit vtcunque: Rectangulum ſub tota, & vno ſegmentorum comprehenſum, æquale eſt & illi, quod ſub ſegmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prædicto ſegmento deſcribitur, quadrato.

4 SI recta linea ſecta ſit vtcunque; Quadratum, quod à tota deſcribitur, æquale eſt & illis, quæ à ſegmentis deſcribuntur, quadratis, & ei, quod bis ſub ſegmentis comprehenditur, rectangulo.

5 SI recta linea ſecetur in æqualia, & non æqualia: Rectangulum ſub inæqualibus ſegmentis totius comprehenſum, vna cum quadrato, quod ab intermedia ſectionum, æquale eſt ei, quod à dimidia deſcribitur, quadrato.

6 SI recta linea bifariam ſecetur, & illi recta quædam linea in rectum adiiciatur: Rectangulum comprehenſum ſub tota cum adiecta, vna cum quadrato à dimidia, æquale eſt quadrato à linea, quæ tum ex dimidia, tum ex adiecta componitur, tanquam ab vna, deſcripto.

7 SI recta linea ſecetur vtcunque; Quod à tota, quodque ab vno ſegmentorum, vtraque ſimul quadrata, æqualia ſunt & illi, quod bis ſub tota, & dicto ſegmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à reliquo ſegmento fit, quadrato.

8 SI recta linea ſecetur vtcunque: Rectangulum quater comprehenſum ſub tota, & vno ſegmentorum, cum eo, quod à reliquo ſegmento fit, quadrato, æquale eſt ei, quod à tota, & dicto ſegmento, tanquam ab vna linea deſcribitur, quadrato.

9 SI recta linea ſecetur in æqualia, & non æqualia: Quadrata, quæ ab inæqualibus totius ſegmentis fiunt, ſimul duplicia ſunt & eius, quod à dimidia, & eius quod ab intermedia ſectionum fit, quadrati.

10 SI recta linea ſecetur bifariam, adiiciatur autem ei in rectum

adiuncta

iuncta quæpiam recta linea: Quod à tota cum adiuncta, & quod ab adiuncta, vtraq; ſimul quadrata, duplicia ſunt & eius, quod à dimidia, & eius, quod à compoſita ex dimidia & adiuncta, tanquam ab vna, deſcriptum ſit, quadrati.

11 DATAM rectam lineam ſecare, vt comprehenſum ſub tota, & altero ſegmentorum rectangulum, æquale ſit ei, quod à reliquo ſegmento ſit, quadrato.

12 IN amblygoniis triangulis, quadratum, quod fit à latere angulum obtuſum ſubtendente, maius eſt quadratis, quæ fiunt à lateribus obtuſum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenſo & ab vno laterum, quæ ſunt circa obtuſum angulum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab aſſumpta exterius linea ſub perpendiculari prope angulum obtuſum.

13 IN oxygoniis triangulis, quadratum à latere angulum acutum ſubtendente, minus eſt quadratis, quæ fiunt à lateribus acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenſo & ab vno laterum, quæ ſunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab aſſumpta interius linea ſub perpendiculari prope acutum angulum.

14 DATO rectilineo æquale quadratum conſtituere.

TERTII LIBRI.

1 DATI circuli centrum reperire.

2 SI in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint: Recta linea, quæ ad ipſa puncta adiungitur, intra circulum cadet.

3 SI in circulo recta quædam linea per centrum extenſa quandam non per centrum extenſam bifariam ſecet: Et ad angulos rectos ipſam ſecabit. Et ſi ad angulos rectos eam ſecet, bifariam quoque eam ſecabit.

4 SI in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecent non per centrum extenſæ: Seſe mutuo bifariam non ſecabunt.

5 SI duo circuli ſeſe mutuo ſecent, nõ erit illorum idem centrũ.

6 SI duo circuli ſeſe mutuo interius tangant eorum non erit idem centrum.

7 SI in diametro circuli quodpiam ſumatur punctum, quod circuli centrum non ſit, ab eoque puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant: Maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima verò, reliqua; aliarum verò propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore ſemper maior eſt: Duæ autem ſolum rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt ad vtraſque partes minimæ, vel maximæ.

Digitized by Google

8 SI extra circulum ſumatur punctum quodpiam, ab eoq; puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quaru una quidem per centrum protendatur, reliquæ verò vt libe In cauam peripheriam cadentium rectarum linearum max ma quidem eſt illa, quæ per centrum ducitur; aliarum aute propinquior ei, quæ per centrum tranſit, remotiore ſemp maior eſt: In conuexam verò peripheriam cadentium rect rum linearum minima quidem eſt illa, quæ inter punctum, diametrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinqui eſt minimæ, remotiore ſemper minor eſt: Duæ autem tantu rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipſum circulum cadun ad vtraſque partes minimæ, vel maximæ.

9 SI in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo pun cto ad circulum cadant plures, quam duæ, rectæ lineæ æquale Acceptum punctum centrum eſt ipſius circuli.

10 CIRCVLVS circulum in pluribus, quam duobus, puncti non ſecat.

11 SI duo circuli ſeſe intus contingant, atque accepta fuerint eo rum centra: Ad eorum centra adiuncta recta linea, & produ cta, in contactum circulorum cadet.

12 SI duo circuli ſeſe exterius contingant, linea recta, quæ a centra eorum adiungitur, per contactum tranſibit.

13 CIRCVLVS circulum non tangit in pluribus punctis, quan vno, ſiue intus, ſiue extra tangat.

14 IN circulo æquales rectæ lineæ æqualiter diſtant à centro: E quæ æqualiter diſtant à centro, æquales ſunt inter ſe.

15 IN circulo maxima quidem linea eſt diameter; aliarum au tem propinquior centro, remotiore ſemper maior.

16 QVÆ ab extremitate diametri cuiuſque circuli ad angulo rectos ducitur, extra ipſum circulum cadet; & in locum inte ipſam rectam lineam, & peripheriam comprehenſum, alte ra recta linea non cadet: Et ſemicirculi quidem angulus quouis angulo acuto rectilineo maior eſt; reliquus autem minor.

17 A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum tanget cir culum.

18 SI circulum tangat recta quæpiam linea, à centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiuncta fue rit, ad ipſam contingentem perpendicularis erit.

19 SI circulum tetigerit recta quæpiam linea, à contactu autem recta linea ad angulos rectos ipſi tangenti excitetur: In excita ta erit centrum circuli.

20 IN circulo, angulus ad centrum duplex eſt anguli ad peri pheriam, cum fuerit eadem peripheria baſis angulorum.

21 IN

Digitized by Google

21 IN circulo, qui in eodem ſegmento ſunt, anguli ſunt inter ſe æquales.

22 QVADRILATERORVM in circulis deſcriptorum anguli, qui ex aduerſo, duobus rectis ſunt æquales.

23 SVPER eadem recta linea, duo ſegmenta circulorum ſimilia, & inæqualia, non conſtituentur ad eaſdem partes.

24 SVPER æqualibus rectis lineis, ſimilia circulorum ſegmenta ſunt inter ſe æqualia.

25 CIRCVLI ſegmento dato, deſcribere circulum, cuius eſt ſegmentum.

26 IN æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripheriis inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant.

27 IN æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripheriis inſiſtunt, ſunt inter ſe æquales, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant.

28 IN æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

29 IN æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ ſubtendunt.

30 DATAM peripheriam bifariam ſecare.

31 IN circulo angulus, qui in ſemicirculo, rectus eſt: qui autem in maiore ſegmento, minor recto: qui verò in minore ſegmento, maior eſt recto. Et inſuper angulus maioris ſegmenti, recto quidem maior eſt: minoris autem ſegmenti angulus, minor eſt recto.

32 SI circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem producatur quædam recta linea circulum ſecans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales ſunt ijs, qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt, angulis.

33 SVPER data recta linea deſcribere ſegmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

34 A dato circulo ſegmentum abſcindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

35 SI in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecuerint, rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis vnius, æquale eſt ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur, rectangulo.

36 SI extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum ſecet, altera verò tangat: Quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum, & conuexam peripheriam aſſumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente deſcribitur, quadrato.

37 SI extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum ſecet, altera in eum incidat, ſit autem, quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam aſſumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente deſcribitur quadrato; Incidens ipſa circulum tanget.

QVARTI LIBRI.

1 IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non ſit maior.
2 IN dato circulo triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum.
3 CIRCA datum circulum triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum.
4 IN dato triangulo circulum inſcribere.
5 CIRCA datum triangulum circulum deſcribere.
6 IN dato circulo quadratum deſcribere.
7 CIRCA datum circulum quadratum deſcribere.
8 IN dato quadrato circulum deſcribere.
9 CIRCA datum quadratum circulum deſcribere.
10 ISOSCELES triangulum cõſtituere, quod habeat vtrumque eorum, qui ad baſin ſunt, angulorum, duplum reliqui.
11 IN dato circulo Pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inſcribere.
12 CIRCA datum circulum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.
13 IN dato pentagono æquilatero, & æquiangulo circulum inſcribere.
14 CIRCA datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum deſcribere.
15 IN dato circulo hexagonum & æquilaterum, & æquiangulum inſcribere.
16 IN dato circulo quintidecagonum, & æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

QVINTI LIBRI.

1 SI ſint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, ſingulæ ſingularum, æque multiplices: quam multiplex eſt vnius vna magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.

2 SI pri-

Digitized by Google

3 SI prima ſecundæ æquè fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta ſecundæ æque multiplex, atque ſexta quartæ: Erit & compoſita prima cum quinta, ſecundæ æque multiplex, atq; tertia cum ſexta, quartæ.

SI ſit prima ſecundæ æquè multiplex, atque tertia quartæ; ſumantur autem æquè multiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æquo ſumptarum vtraque vtriuſque æquè multiplex; altera quidem ſecundæ, altera autem quartæ.

4 SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æquè multiplices primæ & tertiæ, ad æquè multiplices ſecundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, ſi prout inter ſe reſpondent, ita ſumptæ fuerint.

5 SI magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius.

6 SI duæ magnitudines duarum magnitudinum ſint æquè multiplices, & detractæ quædam ſint earundem æquè multiplices: Et reliquæ eiſdem aut æquales ſunt, aut æquè ipſarum multiplices.

7 ÆQVALES ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales.

8 INÆQVALIVM magnitudinum maior ad eandem, maiorem rationem habet, quàm minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quàm ad maiorem.

9 QVÆ ad eandem, eandem habent rationem, æquales ſunt inter ſe: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoque ſunt inter ſe æquales,

10 AD eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior eſt; Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor eſt.

11 QVÆ eidem ſunt eædem rationes, & inter ſe ſunt eædem.

12 SI ſint magnitudines quotcunque proportionales: quemadmodum ſe habuerit vna antecedentium ad vnam conſequentium, ita ſe habebunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

13 SI prima ad ſecundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia verò ad quartam, maiorem rationem habuerit, quàm quinta ad ſextam. Prima quoque ad ſecundam maiorem rationem habebit, quàm quinta ad ſextam.

14 SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem quàm tertia ad quartam; prima verò, quàm tertia, maior fuerit; Erit & ſecunda maior, quàm quarta. Quòd ſi prima fuerit æqualis tertiæ, erit & ſecunda æqualis quartæ: Si verò minor, & minor erit.

Digitized by Google

15 PARTES cum pariter multiplicibus in eadem ſunt rat
ne, ſi prout ſibi mutuò reſpondent, ita ſumantur.

16 SI quatuor magnitudines proportionales fuerint; Et vi
ſim proportionales erunt.

17 SI compoſitæ magnitudines proportionales fuerint: hæ qu
que diuiſæ proportionales erunt.

18 SI diuiſæ magnitudines ſint proportionales; hæ quoq; co
poſitæ proportionales erunt.

19 SI quemadmodum totum ad totum, ita ablatum ſe habu
rit ad ablatum: Et reliquum ad reliquum, vt totum ad totu
ſe habebit.

20 SI ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, qu
binæ, & in eadem ratione ſumantur; ex æquo autem prim
quàm tertia, maior fuerit; Erit & quarta quàm ſexta, maio
Quod ſi prima quàm tertia fuerit æqualis, erit & quarta æqua
lis ſextæ; Sin illa minor, hæc quoq; minor erit.

21 SI ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, qu
binæ, & in eadem ratione ſumantur; fueritque perturbata ea-
rum proportio; ex æquo autem prima, quàm tertia, minor fue-
rit; Erit & quarta, quàm ſexta, maior. Quod ſi prima tertiæ fue-
rit æqualis, erit & quarta æqualis ſextæ: ſin illa minor, hæc
quoque minor erit.

22 SI ſint quotcunque magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

23 SI ſint tres magnitudines, aliæq; ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

24 SI prima ad ſecundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad ſecundam, eandem rationem, quam ſexta ad quartam: Etiam compoſita prima cum quinta, ad ſecundam, eandem habebit rationem, quam tertia cum ſexta, ad quartam.

25 SI quatuor magnitudines proportionales fuerint: Maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.

26 *Si prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quàm tertia ad quartam: habebit conuertendo ſecunda ad primam minorem proportionem, quàm quarta ad tertiam.*

27 *SI prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quàm tertia ad quartam: Habebit quoque viciſſim prima ad tertiam maiorem proportionem, quàm ſecunda ad quartam.*

28 *SI prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quàm tertia ad quartam: Habebit quoque compoſita prima cum ſecun-*

da, ad

Digitized by Google

ta, ad ſecundam maiorem proportionem, quàm compoſitum tertia cum quarta ad quartam.

SI compoſitum prima cum ſecunda ad ſecundam maiorem habuerit proportionem, quàm compoſitum tertia cum quarta ad quartam: Habebit quoq; diuidendo prima ad ſecundam, maiorem proportionem, quàm tertia ad quartam.

30 *SI compoſitum prima cum ſecunda ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quàm compoſitum tertia cum quarta ad quartam: Habebit per conuerſionem rationis, prima cum ſecunda ad primam, minorem proportionem, quàm tertia cum quarta ad tertiam.*

31 *SI ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitq; maior proportio prima priorum ad ſecundam, quàm prima poſteriorum ad ſecundam: item ſecunda priorum ad tertiam maior, quàm ſecunda poſteriorum ad tertiam: Erit quoq; ex æqualitate, maior proportio prima priorum ad tertiam, quàm prima poſteriorum ad tertiam.*

32 *SI ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitq; maior proportio prima priorum ad ſecundam quàm ſecunda poſteriorum ad tertiam; item ſecunda priorum ad tertiam maior, quàm prima poſteriorum ad ſecundam: Erit quoq; ex æqualitate, maior proportio prima priorum ad tertiam, quàm prima poſteriorum ad tertiam.*

33 *SI fuerit maior proportio totius ad totum, quàm ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quàm totius ad totum.*

34 *SI ſint quotcunq; magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitq; maior proportio prima priorum ad primam poſteriorum, quàm ſecunda ad ſecundam; & hæc maior, quàm tertia ad tertiam, & ſic deinceps: Habebunt omnes priores ſimul ad omnes poſteriores ſimul, maiorem proportionem, quàm omnes priores, relicta prima ad omnes poſteriores, relicta quoq; prima; minorem autem, quàm prima priorum ad primam poſteriorum, maiorem denique etiam quàm ultima priorum ad ultimam poſteriorum.*

SEXTI LIBRI.

1 TRIANGVLA & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita ſe habent inter ſe, vt baſes.

2 SI ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea: hæc proportionaliter ſecabit ipſius trianguli latera. Et ſi trianguli latera proportionaliter ſecta fuerint: quæ ad ſectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipſius trianguli latus parallela.

3 SI trianguli angulus bifariam ſectus ſit, ſecans autem angulum

gulum recta linea ſecuerit & baſin: Baſis ſegmenta eand
habebunt rationem, quàm reliqua ipſius trianguli latera. E
baſis ſegmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipſi
trianguli latera: Recta linea, quæ à vertice ad ſectionem pr
ducitur, biſariam ſecat trianguli ipſius angulum.

4 ÆQVIANGVLORVM triangulorum proportional
ſunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa ſu
latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur.

5 SI duo triangula latera proportionalia habeant; æquiang
la erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, ſub qu
bus & homologa latera ſubtenduntur.

6 SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & ci
cum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æqu
angula erunt triangula, æqualeſque habebunt angulos, ſu
quibus homologa latera ſubtenduntur.

7 SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, ci
cum autem alios angulos latera proportionalia habeant, re
liquorum verò ſimul vtrumque aut minorem, aut non mino
rem recto: Aequiangula erunt triangula, & æquales habebun
eos angulos, circum quos proportionalia ſunt latera.

8 SI in triangulo rectangulo ab angulo recto in baſin perpen
dicularis ducta ſit: Quæ ad perpendicularem triangula tun
toti triangulo, tum ipſa inter ſe ſimilia ſunt.

9 A data recta linea imperatam partem auferre.

10 DATAM rectam lineam inſectam ſimiliter ſecare, vt data
altera recta ſecta fuerit.

11 DVABVS datis rectis lineis, tertiam proportionalem ad-
inuenire.

12 TRIBVS datis rectis lineis, quartam proportionalem in-
uenire.

13 DVABVS datis rectis lineis, mediam proportionalem ad-
inuenire.

14 ÆQVALIVM, & vnum vni æqualem habentium angu-
lum, parallelogrammorum, reciproca ſunt latera, quæ cir-
cum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum v-
num angulum vni angulo æqualem habentium reciproca ſunt
latera, quæ circum æquales angulos, illa ſunt æqualia.

15 ÆQVALIVM, & vnum vni æqualem habentium angu-
lum, triangulorum, reciproca ſunt latera, quæ circum æqua-
les angulos. Et quorum triangulorum vnum angulum vni æ-
qualem habentium reciproca ſunt latera, quæ circum æquales
angulos, illa ſunt æqualia.

16 SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod ſub
extremis comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei, quod
ſub

Digitized by Google

a mediis comprehenditur, rectangulo. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale fuerit ei, quod ſub mediis continetur rectangulo: illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

SI tres rectæ lineæ ſint proportionales: quod ſub extremis comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei, quod à media deſcribitur, quadrato. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale ſit ei, quod à media deſcribitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.

18 A data recta linea dato rectilineo ſimile ſimiliterque poſitum rectilineum deſcribere.

19 SIMILIA triangula inter ſe ſunt in duplicata ratione laterum homologorum.

20 SIMILIA polygona in ſimilia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis. Et polygona duplicatam habent eam inter ſe rationem, quam latus homologum ad homologum latus.

21 QVÆ eidem rectilineo ſunt ſimilia; & inter ſe ſunt ſimilia.

22 SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea ſimilia ſimiliterq; deſcripta, proportionalia erũt. Et ſi à rectis lineis ſimilia ſimiliterq; deſcripta rectilinea, proportionalia fuerint; ipſæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.

23 ÆQVIANGVLA parallelogramma inter ſe rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.

24 IN omni parallelogrammo, quæ circa diametrum ſunt, parallelogramma & toti, & inter ſe ſunt ſimilia.

25 DATO rectilineo ſimile ſimiliterq; poſitum, & alteri dato æquale idem conſtituere.

26 SI à parallelogrammo parallelogrammum ablatum ſit & ſimile toti, & ſimiliter poſitum, communem cum eo habens angulum: hoc circum eandem cum toto diametrum conſiſtit.

27 OMNIVM parallelogrammorum ſecundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumq; figuris parallelogrammis ſimilibus ſimiliterq; poſitis ei, quod à dimidia deſcribitur: maximum id eſt, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammum ſimile exiſtens defectui.

28 AD datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit alteri parallelogrammo dato. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum eſt, non maius eſſe eo, quod ad dimidiam applicatur, cùm ſimiles fuerint defectus & eius, quod ad dimidiam applicatur, & eius, cui ſimile deeſſe debet.

Digitized by Google

29 AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale paralle-logrammum applicare excedens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit parallelogrammo alteri dato.
30 PROPOSITAM rectam lineam terminatam, extrema ac media ratione ſecare.
31 IN rectangulis triangulis, figura quæuis à latere rectum angulum ſubtendente deſcripta, æqualis eſt figuris, quæ priori illi ſimiles, & ſimiliter poſitæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur.
32 SI duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ſecundum vnum angulum compoſita fuerint, ita vt homologa eorum latera ſint etiam parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur.
33 IN æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripheriis, quibus inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant: Inſuper verò & ſectores, quippe qui ad centra conſiſtunt.

SEPTIMI LIBRI.

1 SI duobus numeris inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, neq; reliquus vnquam metiatur præcedentem, quoad aſſumpta ſit vnitas: qui principio propoſiti ſunt numeri, primi inter ſe erunt.
2 DVOBVS numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire.
3 TRIBVS numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire.
4 OMNIS numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars eſt, aut partes.
5 SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et ſimul vterque vtriuſque ſimul eadem pars erit, quæ vnus vnius.
6 SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et ſimul vterque vtriuſque ſimul eædem partes erit, quæ vnus vnius.
7 SI numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem pars erit, qualis totus totius.
8 SI numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati: Et reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius.
9 SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et viciſſim, quæ pars eſt, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes & ſecundus quarti.

Digitized by Google

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et viciſſim, quæ partes eſt primus tertij, aut pars, eædem partes erit & ſecundus quarti, aut pars.

Si fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

Si ſint quotcunque numeri proportionales, erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

13 SI quatuor numeri proportionales ſint; Et viciſſim proportionales erunt.

14 SI ſint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini ſumantur, & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

15 SI vnitas numerum quempiam metiatur, æquè autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et viciſſim æquè vnitas tertium numerum metietur, & ſecundus quartum.

16 SI duo numeri mutuò ſeſe multiplicantes fecerint aliquos: Geniti ex ipſis æquales inter ſe erunt.

17 SI numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos: Geniti ex ipſis eandem rationem habebunt, quam multiplicati.

18 SI duo numeri numerum quempiam multiplicantes fecerint aliquos: Geniti ex ipſis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

19 SI quatuor numeri proportionales fuerint: qui ex primo, & quarto fit numerus, æqualis erit ei, qui ex ſecundo, & tertio fit, numero. Et ſi qui ex primo, & quarto fit, numerus æqualis fuerit ei, qui ex ſecundo, & tertio fit, numero: ipſi quatuor numeri proportionales erunt.

20 SI tres numeri proportionales fuerint; qui ſub extremis continetur, æqualis eſt ei, qui à medio efficitur. Et ſi qui ſub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui à medio deſcribitur: ipſi tres numeri proportionales erunt.

21 MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æquè numeros eandem cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor verò minorem.

22 SI fuerint tres numeri, & alij ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

23 PRIMI inter ſe numeri, minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

24 MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter ſe ſunt.

Digitized by Google

25 SI duo numeri primi inter ſe fuerint: qui vnum eorum me-
titur numerus, ad reliquum primus erit.
26 SI duo numeri ad quempiam primi fuerint: etiam ex illi
genitus ad eundem primus erit.
27 SI duo numeri primi inter ſe fuerint; Etiam ex vno eorum
genitus ad reliquum primus erit.
28 SI duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque,
primi fuerint: Et qui ex eis gignentur, primi inter ſe erunt.
29 SI duo numeri primi inter ſe fuerint, & multiplicans vterque
ſeipſum fecerit aliquem: Et geniti ex ipſis primi inter ſe erunt.
Et ſi, qui in principio, genitos ipſos multiplicantes fecerint a-
liquos; Et hi quoque primi inter ſe erunt; Et ſemper circa ex-
tremos hoc eueniet.
30 SI duo numeri primi inter ſe fuerint; Etiam vterque ſimul
ad quemlibet illorum primus erit. Et ſi vterque ſimul ad vnum
aliquem illorum primus fuerit; Etiam qui in principio, nume-
ri primi inter ſe erunt.
31 OMNIS primus nnmerus, ad omnem numerum, quem
non metitur, primus eſt.
32 SI duo numeri ſeſe mutuò multiplicantes fecerint aliquem;
genitum autem ex ipſis metiatur aliquis primus numerus: Is
etiam vnum eorum, qui in principio, metietur.
33 OMNEM compoſitum numerum aliquis primus nume-
rus metitur.
34 OMNIS numerus aut primus eſt, aut eum aliquis primus
metitur.
35 NVMERIS datis quotcunque, reperire minimos omnium
eandem rationem habentium cum ipſis.
36 DVOBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum me-
tiantur numerum.
37 SI duo numeri numerum quempiam metiantur. Etiam mi-
nimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.
38 TRIBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum me-
tiantur, numerum.
39 SI numerum quiſpiam numerus metiatur: Ille quem meti-
tur, partem habebit à metiente denominatam.
40 SI numerus partem habuerit quamlibet: metietur illum
numerus à parte denominatus.
41 NVMERVM reperire, qui minimus cùm ſit, habeat datas
partes.

OCTAVI LIBRI.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, ex-
tremi

Digitized by Google

mi verò ipſorum primi inter ſe fuerint: Ipſi minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

2 NVMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque iuſſerit quiſpiam, in data ratione.

3 SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis rationem habentium: Illorum extremi ſunt inter ſe primi.

4 RATIONIBVS datis quotcunq; in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

5 PLANI numeri rationem inter ſe habent ex lateribus compoſitam.

6 SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundum non metiatur; neq; alius quiſpiam vllum metietur.

7 SI ſint quotcunq; numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur: is etiam metietur ſecundum.

8 SI inter duos numeros medij continua proportione ceciderint numeri: quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medii continua proportione cadent.

9 SI duo numeri ſint inter ſe primi, & inter eos medij continua proportione ceciderint numeri: quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter vtrumq; eorum, ac vnitatem medij continua proportione cadent.

10 SI inter duos numeros, & vnitatem, continuè proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipſorum & vnitatem deinceps medii continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent.

11 DVORVM quadratorum numerorum vnus medius proportionalis eſt numerus. Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem.

12 DVORVM cuborum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri. Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem.

13 SI ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſq; ſeipſum faciat aliquos: qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et ſi numeri primum poſiti multiplicantes iam factos fecerint aliquos; ipſi quoque proportionales erunt; & ſemper circa extremos hoc eueniet.

14 SI quadratus numerus quadratum numerum metiatur: & latus vnius metietur latus alterius. Et ſi vnius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

Digitized by Google

15 SI cubus numerus cubum numerum metiatur: & latus vnius metietur latus alterius. Et ſi latus vnius cubi latus alterius metiatur: & cubus cubum metietur.

16 SI quadratus numerus quadratum numerum non metiatur: neque latus vnius metietur alterius latus. Et ſi latus vnius quadrati non metiatur latus alterius: neque quadratus quadratum metietur.

17 SI cubus numerus cubum numerum non metiatur; neque latus vnius latus alterius metietur. Et ſi latus cubi vnius latus alterius non metiatur: neque cubus cubum metietur.

18 DVORVM ſimilium planorum numerorum vnus medius proportionalis eſt numerus. Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

19 DVORVM ſimilium ſolidorum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri. Et ſolidus ad ſolidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

20 SI inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus. Similes plani erunt illi numeri.

21 SI inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri: Similes ſolidi ſunt illi numeri.

22 SI tres numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit quadratus: Et tertius quadratus erit.

23 SI quatuor numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit cubus: Et quartus cubus erit.

24 SI duo numeri rationem habeant inter ſe, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem ſit quadratus; & ſecundus quadratus erit.

25 SI duo numeri rationem inter ſe habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, primus autem ſit cubus; & ſecundus cubus erit.

26 SIMILES plani numeri rationem inter ſe habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

27 SIMILES ſolidi numeri rationem habent inter ſe, quam cubus numerus ad cubum numerum.

NONI LIBRI.

1 SI duo ſimiles plani numeri multiplicantes ſe mutuò faciant quendam: Productus quadratus erit.

2 SI duo numeri ſe mutuò multiplicantes faciant quadratum: ſimiles plani erunt.

3 SI cubus numerus ſeipſum multiplicans procreet aliquem. Productus cubus erit.

Digitized by Google

4 SI cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat a-liquem; Factus cubus erit.

5 SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cu-bum: Et multiplicans cubus erit.

6 SI numerus ſeipſum multiplicans cubum faciat: Et ipſe cu-bus erit.

7 SI compoſitus numerus numerum aliquem multiplicans quempiam faciat: Factus ſolidus erit.

8 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab vnitate quadratus eſt, & vnum in-termittentes omnes: Quartus autem eſt cubus, & duos inter-mittentes omnes: Septimus verò cubus ſimul & quadratus, & quinque intermittentes omnes.

9 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò poſt vnitatem, ſit quadratus: Et reliqui o-mnes quadrati erunt. At ſi qui poſt vnitatem, ſit cubus: Et re-liqui omnes cubi erunt.

10 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò poſt vnitatem, non ſit quadratus; neque a-lius vllus quadratus erit; præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At ſi, qui poſt vnitatem non ſit cubus; neq; alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes.

11 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus ſunt numeris.

12 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum vltimum metiun-tur, iidem & eum, qui vnitati proximus eſt, metientur.

13 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò poſt vnitatem, primus ſit; Maximum nullus alius metietur, præter eos, qui ſunt in numeris proportiona-libus.

14 SI minimum numerum primi numeri metiantur; Nullus a-lius numerus primus illum metietur, præter eos, qui à princi-pio metiebantur.

15 SI tres numeri deinceps proportionales fuerint minimi o-mnium eandem cum ipſis rationem habentium: Duo quilibet compoſiti, ad reliquum primi erunt.

16 SI duo numeri, primi inter ſe fuerint: Non erit, vt primus ad ſecundum, ita ſecundus ad alium quempiam.

17 SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, ex-tremi autem ipſorum primi inter ſe ſint; Non erit, vt primus ad ſecundum, ita vltimus ad alium quempiam.

Digitized by Google

18 DVOBVS numeris datis, conſiderare, an poſſit ipſis ter
proportionalis inueniri.
19 TRIBVS numeris datis, conſiderare, an poſſit ipſis q
tus proportionalis inueniri.
20 PRIMI numeri plures ſunt, omni propoſita multitud
primorum numerorum.
21 SI pares numeri quotcunque componantur; Totus pa
rit.
22 SI impares numeri quotcunque componantur, multit
autem ipſorum ſit par: Totus par erit.
23 SI impares numeri quotcunque componantur, multit
autem ipſorum ſit impar: Et totus impar erit.
24 SI à pari numero par detrahatur: Et reliquus par erit.
25 SI à pari numero impar detrahatur: Et reliquus impa
rit.
26 SI ab impari numero impar detrahatur: Reliquus pa
rit.
27 SI ab impari numero par detrahatur: Reliquus impar eri
28 SI impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem:
ctus par erit.
29 SI impar numerus imparem numerum multiplicans fec
aliquem: Factus impar erit.
30 SI impar numerus parem numerum metiatur: Et illius
midium metietur.
31 SI impar numerus ad aliquem numerum primus ſit: & ad
lius duplum primus erit.
32 NVMERORVM à binario duplorum, vnuſquiſque pari
par eſt tantùm.
33 SI numerus dimidium habeat imparem: Pariter impar
tantùm.
34 SI par numerus neque à binario duplus ſit, neq; dimidiu
habeat imparem: Pariter par eſt, & pariter impar.
35 SI ſint quotcunq; numeri deinceps proportionales, detr
hantur autem à ſecundo, & vltimo æquales ipſi primo: Erit
ſecundi exceſſus ad primum, ita vltimi exceſſus ad omnes
pſum antecedentes.
6 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur
dupla proportione, quoad totus compoſitus fiat primus;
totus hic in vltimum multiplicatus faciat aliquem: Factus
rit Perfectus.

DECIMI LIBRI.

DVABVS magnitudinibus inæqualibus propoſitis, ſi à ma

Digitized by Google

auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum eſt, detrahatur maius quàm dimidium; & hoc ſemper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit propoſita minore magnitudine.

2 SI duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minimè præcedentem metiatur: Incommenſurabiles erunt ipſæ magnitudines.

3 DVABVS magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum communem menſuram inuenire.

4 TRIBVS magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum menſuram communem inuenire.

5 COMMENSVRABILES magnitudines inter ſe rationem habent, quam numerus ad numerum.

6 SI duæ magnitudines inter ſe proportionem habeant, quàm numerus ad numerũ: Commenſurabiles erunt magnitudines.

7 INCOMMENSVRABILES magnitudines inter ſe proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

8 SI duæ magnitudines inter ſe proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommenſurabiles erunt magnitudines.

9 QVÆ à rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata: inter ſe proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: & latera habebunt longitudine commenſurabilia. Quæ verò à rectis lineis longitudine incommenſurabilibus fiunt quadrata: inter ſe proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et quadrata inter ſe proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: neque latera habebunt longitudine commenſurabilia.

10 SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima verò ſecundæ fuerit commenſurabilis: Et tertia quartæ commenſurabilis erit: Et ſi prima ſecundæ fuerit incommenſurabilis: Et tertia quartæ incommenſurabilis erit.

11 PROPOSITÆ rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommenſurabiles, alteram quidem longitudine tantùm, alteram verò etiam potentia.

12 QVÆ eidem magnitudini ſunt commenſurabiles: & inter ſe ſunt commenſurabiles.

13 SI ſint duæ magnitudines, & altera quidem eidem ſit commenſurabilis, altera verò incommenſurabilis: Incommenſurabiles erunt magnitudines.

Digitized by Google

14 SI ſint duæ magnitudines commenſurabiles, alterà aut ipſarum magnitudini cuipiam incommenſurabilis fuerit: reliqua eidem incommenſurabilis erit.

15 SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima ve tantò plus poſſit, quàm ſecunda, quantum eſt quadratum r ctæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine; Et tertia tan plus poterit, quàm quarta, quantum eſt quadratum rectæ lin ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi prima tantò pl poſſit, quam ſecunda, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſi incommenſurabilis longitudine: Et tertia tantò plus poteri quàm quarta, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi long tudine incommenſurabilis.

16 SI duæ magnitudines commenſurabiles componantur: E tota magnitudo vtrique ipſarum commenſurabilis erit. Quo ſi tota magnitudo vni ipſarum commenſurabilis fuerit: E quæ à principio magnitudines, commenſurabiles erunt.

17 SI duæ magnitudines incommenſurabiles componantur: Et tota magnitudo vtrique ipſarum incommenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo vni ipſarum incommenſurabilis fuerit: Et quæ à principio magnitudines, incommenſurabiles erunt.

18 SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidat: Maior tantò plus poterit quàm minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi maior tantò plus poſſit quàm minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, quartæ autem parti quadrati quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata: In partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidet.

19 SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommenſurabiles longitudine ipſam diuidat: Maior tantò plus poterit quàm minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quod ſi maior tantò plus poſſit quàm minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata: In partes longitudine incommenſurabiles ipſam diuidet.

Digitized by Google

QVOD ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis ſecundum aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum, Rationale eſt.

SI rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine commenſurabilem.

22 Quod ſub Rationalibus potentia ſolùm commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Irrationale eſt: Et recta linea ipſum potens, Irrationalis eſt. Vocetur autem Media.

23 QVOD à Media fit, ad Rationalem applicatum; latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine incommenſurabilem.

24 MEDIÆ commenſurabilis, Media eſt.

25 QVOD ſub Mediis longitudine commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Medium eſt.

26 QVOD ſub Mediis potentia tantùm commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel Rationale eſt, vel Medium.

27 MEDIVM non ſuperat Medium Rationali.

28 MEDIAS inuenire potentia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale comprehendant.

29 MEDIAS inuenire potentia tantùm commenſurabiles, quæ Medium contineant.

30 INVENIRE duas Rationales potentia tantùm commenſurabiles, ita vt maior quàm minor, plus poſſit quadrato rectæ lineæ longitudine ſibi commenſurabilis.

31 INVENIRE duas Rationales potentia tantùm commenſurabiles, ita vt maior quàm minor, plus poſſit quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

32 INVENIRE duas Medias potentia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior plus poſſit quàm minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

33 INVENIRE duas Medias potentia ſolùm commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior plus poſſit, quàm minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

34 INVENIRE duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Rationale: Rectangulum verò ſub ipſis contentum, Medium.

35 INVENIRE duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ipſarum qua-

dratis, Medium: Rectangulum verò ſub ipſis contentum, Rationale.

36 INVENIRE duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quę faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium & rectangulum ſub ipſis contentum, Medium, incommenſurabileq; compoſito ex ipſarum quadratis.

37 SI duæ Rationales potentia tantum commenſurabiles componantur: tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

38 SI duæ mediæ potentia tantum commenſurabiles componantur, quæ Rationale contineant: tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima.

39 SI duæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles componantur, quæ Medium contineant: tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis ſecunda.

40 SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale, quod autem ſub ipſis continetur, Medium: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

41 SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, quod autem ſub ipſis continetur, Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

42 SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur, Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

43 QVÆ ex binis nominibus, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

44 QVÆ ex binis Mediis prima, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

45 QVÆ ex binis Mediis ſecunda, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

46 MAIOR ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

47 RATIONALE ac Medium potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

48 BINA Media potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

49 INVENIRE ex binis nominibus primam.

50 INVENIRE ex binis nominibus ſecundam.

51 INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

52 INVENIRE ex binis nominibus quartam.

53 INVE-

Digitized by Google

53 VENIRE ex binis nominibus quintam.

54 VENIRE ex binis nominibus ſextam.

55 Si ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus prima: Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur.

56 Si ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſecunda: Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis Mediis prima appellatur.

57 SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus tertia: Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis Mediis ſecunda dicitur.

58 SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quarta: Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ vocatur Maior.

59 SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quinta: Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

60 SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſexta: Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ bina Media potens nominatur.

61 QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.

62 QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis Mediis prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam.

63 QVADRATVM eius, quæ ex binis Mediis ſecunda, ad Rationalem applicatũ, latitudinẽ facit ex binis nominibus tertiam.

64 QVADRATVM Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

65 QVADRATVM eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

66 QVADRATVM eius, quæ bina Media poteſt, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus ſextam.

67 EI, quæ eſt ex binis nominibus, longitudine commenſurabilis, & ipſa ex binis nominibus eſt, atque ordine eadem.

68 EI, quæ eſt ex binis Mediis, longitudine commenſurabilis, & ipſa ex binis Mediis eſt, atque ordine eadem.

69 MAIORI commenſurabilis, & ipſa Maior eſt.

70 RATIONALE ac Medium potenti commenſurabilis, & ipſa Rationale ac Medium potens eſt.

71 BINA Media potenti commenſurabilis, & ipſa bina Media potens eſt.

Digitized by Google

72 SI Rationale & Medium componantur: quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Mediis prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potens.
73 SI duo Media inter ſe incommenſurabilia componantur: duæ reliquæ Irrationales fiunt; vel ex binis Mediis ſecunda, vel bina Media potens.
74 SI à Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Apotome.
75 SI à Media Media auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota Rationale contineat: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.
76 SI à Media Media auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota Medium contineat: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome ſecunda.
77 SI à recta linea recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale, quod autem ſub ipſis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Minor.
78 SI à recta recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, quod autem ſub ipſis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.
79 SI à recta recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur, Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.
80 APOTOMÆ vna tantum congruit recta linea Rationalis potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti.
81 MEDIÆ Apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea Media potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota Rationale continens.
82 MEDIÆ Apotomæ ſecundæ vna tantum congruit recta linea Media potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota Medium continens.
83 MINORI vna tantum congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale, quod autem ſub ipſis continetur, Medium.
84 EI, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum

Digitized by Google

ſtam tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, quod autem ſub ipſis continetur, Rationale.

85 IL, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantum congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur, Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis.

86 INVENIRE primam Apotomen.

87 INVENIRE ſecundam Apotomen.

88 INVENIRE tertiam Apotomen.

89 INVENIRE quartam Apotomen.

90 INVENIRE quintam Apotomen.

91 INVENIRE ſextam Apotomen.

92 SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma prima: Recta linea ſpatium potens Apotome eſt.

93 SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſecunda: Recta linea ſpatium potens, Mediæ eſt Apotome prima.

94 SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma tertia: Recta linea ſpatium potens, Mediæ eſt Apotome ſecunda.

95 SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quarta: Recta linea ſpatium potens, Minor eſt.

96 SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quinta: Recta linea ſpatium potens eſt, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

97 SI ſpatiũ contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſexta: Recta linea ſpatium potens eſt, quæ cum Medio Medium totũ efficit.

98 QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam.

99 QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen ſecundam.

100 QVADRATVM Mediæ Apotomæ ſecundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen tertiam.

101 QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

102 QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

103 QVADRATVM eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen ſextam.

104 RECTA linea Apotomæ longitudine commenſurabilis, & ipſa Apotome eſt, atque ordine eadem.

105 RECTA linea Mediæ Apotomæ commenſurabilis, & ipſa Mediæ Apotome eſt, atque ordine eadem.

106 RE-

Digitized by Google

106 RECTA linea Minori commenſurabilis, & ipſa Minor eſt.
107 RECTA linea commenſurabilis ei, quæ cum Rationali Medium totum efficit; & ipſa cum rationali Medium totum efficiens eſt.
108 RECTA linea commenſurabilis ei, quæ cum medio Medium totum efficit, & ipſa cum Medio Medium totum efficiens eſt.
109 MEDIO à Rationali detracto: Recta linea, quæ rel quum ſpatium poteſt, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor.
110 RATIONALI à Medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali Medium totum efficiens.
111 MEDIO a Medio detracto, quod ſit incommenſurabile toti: reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome ſecunda, vel cum Medio Medium totum efficiens.
112 APOTOME non eſt eadem, quæ ex binis nominibus.
113 QVADRATVM Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus eius, quæ eſt ex binis nominibus, & in eadem proportione: & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ eſt ex binis nominibus.
114 QVADRATVM Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt Apotome nominibus, & in eadem proportione; & adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quem ipſa Apotome.
115 SI ſpatium contineatur ſub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus Apotome, & in eadem proportione; Recta linea ſpatium potens eſt Rationalis.
116 A Media infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium eſt eadem.
117 PROPOSITVM ſit nobis oſtendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommenſurabilem eſſe longitudine.

VNDECIMI LIBRI.

1 RECTÆ lineæ pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quædam verò in ſublimi.
2 SI duæ rectæ lineæ ſe mutuò ſecent, in vno ſunt plano. Atq; Triangulum omne in vno eſt plano.
3 SI duo plana ſe mutuò ſecent; communis eorum ſectio eſt linea recta.

Digitized by Google

4 SI recta linea rectis duabus lineis ſe mutuo ſecantibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat; illa ducto etiam per ipſas plano ad angulos rectos erit.

5 SI recta linea rectis tribus lineis ſe mutuo tangentibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat; Illæ tres rectæ in vno ſunt plano.

6 SI duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos ſint angulos; Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

7 SI duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque ſumpta ſint quælibet puncta; Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem eſt cum parallelis plano.

8 SI duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

9 QVÆ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, ſed non in eodem cum illa plano: Hæ quoque ſunt inter ſe parallelæ.

10 SI duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, ad duas rectas ſe mutuo tangentes ſint parallelæ, non autem in eodem plano: Illæ angulos æquales comprehendent.

11 A dato puncto in ſublimi, ad ſubiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

12 DATO plano à puncto, quod in illo datum eſt, ad rectos angulos rectam lineam excitare.

13 DATO plano, à puncto, quod in illo datum eſt, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad eaſdem partes.

14 AD quæ plana, eadem recta linea recta eſt: Illa ſunt parallela.

15 *SI* duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, ad duas ſe mutuo tangentes ſint parallelæ, non in eodem conſiſtentes plano; Parallela ſunt, quæ per illa ducuntur, plana.

16 *SI* duo plana parallela plano quopiam ſecentur; communes illorum ſectiones ſunt parallelæ.

17 *SI* duæ rectæ lineæ parallelis planis ſecentur; in eaſdem rationes ſecabuntur.

18 *SI* recta linea plano cuipiam ad rectos ſit angulos: Et omnia, quæ per ipſam, plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

19 *SI* duo plana ſe mutuo ſecantia, plano cuidam ad rectos ſint angulos; communis etiam illorum ſectio ad rectos eidem plano angulos erit.

20 *SI* ſolidus angulus tribus angulis planis contineatur: Ex his duo quilibet vt vt aſſumpti tertio ſunt maiores.

21 OMNIS ſolidus angulus ſub minoribus, quàm quatuor rectis angulis planis continetur.

22 SI fuerint tres anguli plani, quorum duo vt libet aſſumpti reliquo ſint maiores, comprehendant autem ipſos rectæ lineæ æquales:

Digitized by Google

æquales: fieri poteſt, vt ex lineis æquales illas rectas con-
ctentibus triangulum conſtituatur.

23 EX tribus angulis planis, quorum duo quomodocunque ſumpti reliquo ſunt maiores, ſolidum angulum conſtitue- Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores eſ-

24 SI ſolidum parallelis planis contineatur: aduerſa illius pl- na, parallelogramma ſunt ſimilia, & æqualia.

25 SI ſolidum parallelepipedum plano ſecetur aduerſis plan- parallelo: Erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum a- ſolidum.

26 AD datam rectam lineam, eiuſque punctum, angulum ſol- dum conſtituere ſolido angulo dato æqualem.

27 A data recta linea, dato ſolido parallelepipedo ſimile, & ſi- militer poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere.

28 SI ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per diagonios ad- uerſorum planorū: Bifariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano.

29 SOLIDA parallelepipeda ſuper eandem baſin conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ in iiſdem col- locantur rectis lineis: ſunt inter ſe æqualia.

30 SOLIDA parallelepipeda ſuper eandem baſin conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ non in iiſdem collocantur rectis lineis: inter ſe ſunt æqualia.

31 SOLIDA parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, & in eadem altitudine: æqualia ſunt inter ſe.

32 SOLIDA parallelepipeda ſub eadem altitudine: inter ſe ſunt, vt baſes.

33 SIMILIA ſolida parallelepipeda inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum laterum.

34 ÆQVALIVM ſolidorum parallelepipedorum baſes, & al- titudines reciprocantur. Et quorum ſolidorum parallelepipe- dorum baſes, & altitudines reciprocantur: Illa ſunt æqualia.

35 SI fuerint duo plani anguli æquales, quorum verticibus ſubli- mes rectæ lineæ inſiſtant, quæ cum lineis primo poſitis angu- los contineant æquales, vtrumque vtrique, in ſublimibus au- tem lineis quælibet ſumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus conſiſtunt anguli primum poſiti, ductæ fuerint per- pendiculares; à punctis verò, quæ in planis à perpendicula- ribus fiunt, ad angulos primum poſitos adiunctæ fuerint re- ctæ lineæ: Hæ cum ſublimibus æquales angulos compre- hendent.

36 SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tri- bus fit ſolidum parallelepipedum, æquale eſt deſcripto à media linea ſolido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem ſit, æquiangulum verò prædicto.

37 SI

Digitized by Google

37 [illegible] rectæ lineæ proportionales fuerint. Et ſolida parallelepipeda, quæ ab ipſis & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, proportionalia erunt. Et ſi ſolida parallelepipeda, quæ & ſimilia & ſimiliter deſcribuntur, fuerint proportionalia: Et ipſæ rectæ lineæ proportionales erunt.

38 Si planum ad planum rectum fuerit, & ab aliquo puncto eorum, quæ in vno ſunt planorum, ad alterum perpendicularis ducta fuerit. In communem ſectionem cadet planorum ducta perpendicularis.

39 SI ſolidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerſo, planorum latera bifariam ſecta ſint, per ſectiones autem plana ſint extenſa: Communis ſectio planorum, & ſolidi parallelepipedi diameter, bifariam ſe mutuo ſecabunt.

40 SI fuerint duo priſmata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat baſin parallelogrammum, illud verò triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Æqualia erunt ipſa priſmata.

DVODECIMI LIBRI.

1 QVÆ in circulis polygona ſimilia, inter ſe ſunt, vt à diametris quadrata.

2 CIRCVLI inter ſe ſunt, quemadmodum à diametris quadrata.

3 OMNIS pyramis triangularem habens baſim, diuiditur in duas pyramides æquales, & ſimiles inter ſe, triangulares habentes baſes, & ſimiles toti; & in duo priſmata æqualia, quæ duo priſmata maiora ſunt dimidio totius pyramidis.

4 SI fuerint duæ pyramides eiuſdem altitudinis, triangulares habentes baſes; ſit autem illarum vtraque diuiſa & in duas pyramides æquales inter ſe & ſimiles toti; & in duo priſmata æqualia: Ac eodem modo diuiſa ſit vtraque pyramidum, quæ ex ſuperiore diuiſione natæ ſunt, idque ſemper fiat: Erit vt vnius pyramidis ad alterius pyramidis baſim, ita & omnia, quæ in vna pyramide, priſmata ad omnia, quæ in altera pyramide, priſmata multitudine æqualia.

5 SVB eadem altitudine exiſtentes pyramides, & triangulares habentes baſes: inter ſe ſunt, vt baſes.

6 SVB eadem altitudine exiſtentes pyramides, & polygonas habentes baſes; inter ſe ſunt, vt baſes.

7 OMNE priſma triangularem habens baſim, diuiditur in tres pyramides æquales inter ſe triangulares baſes habentes.

8 SIMI-

Digitized by Google

8 SIMILES pyramides, quæ triangulares habent baſes triplicata ſunt homologorum laterum ratione.

9 ÆQVALIVM pyramidum, & triangulares baſes hab tium, reciprocantur baſes, & altitudines. Et quarum pyra dum triangulares baſes habentium reciprocantur baſes, & titudines: illæ ſunt æquales.

10 OMNIS conus tertia pars eſt cylindri eandem cum i baſim habentis, & altitudinem æqualem.

11 SVB eadem altitudine exiſtentes coni, & cylindri, inte ſunt, vt baſes.

12 SIMILES coni, & cylindri, in triplicata ratione ſunt dian trorum, quæ in baſibus.

13 SI cylindrus plano ſecetur aduerſis planis parallelo: Erit cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

14 SVPER æqualibus baſibus exiſtentes coni, & cylindri, in ſe ſunt, vt altitudines.

15 ÆQVALIVM conorum, & cylindrorum reciprocant baſes, & altitudines. Et quorum conorum, & cylindrorum r ciprocantur baſes, & altitudines: illi ſunt æquales.

16 DVOBVS circulis circa idem centrum exiſtentibus, in m iori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum i ſcribere, quod non tangat minorem circulum.

17 DVABVS ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in ma iori ſphæra ſolidum polyedrum inſcribere, quod non tang minoris ſphæræ ſuperficiem.

18 SPHÆRÆ inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum dia metrorum.

TERTIIDECIMI LIBRI.

1 SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur: maius ſegmentum aſſumens dimidiam totius, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia totius deſcribitur, quadrati.

2 SI recta linea ſuiipſius ſegmenti quintuplum poſſit: Duplæ prædicti ſegmenti extrema ac media ratione ſectæ, maius ſegmentum reliqua pars eſt eius, quæ à principio, rectæ.

3 SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur: minus ſegmentū aſſumens dimidiam maioris ſegmenti, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati.

4 SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur: Quod à tota, quodque à minore ſegmento, ſimul vtraque quadrata; tripla ſunt eius, quod à maiore ſegmento deſcribitur, quadrati.

Digitized by Google

5 Si recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; apponaturque ei æqualis maiori ſegmento: Tota recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecatur, & maius ſegmentum eſt, quæ à principio, recta linea.

6 SI recta linea Rationalis extrema ac media ratione ſecetur; vtrumque ſegmentum Irrationalis linea eſt, quæ vocatur Apotome.

7 SI pentagoni æquilateri tres anguli, ſiue qui deinceps, ſiue qui non deinceps ſint, æquales fuerint: Æquiangulum erit ipſum pentagonum.

8 SI pentagoni æquilateri, & æquianguli duos angulos, qui deinceps ſint, ſubtendant rectæ lineæ: hæ extrema & media ratione ſe mutuo ſecant, & maiora ipſarum ſegmenta æqualia ſunt pentagoni lateri.

9 SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo deſcriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione ſecatur, & maius eius ſegmentum eſt hexagoni latus.

10 SI in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur: Pentagoni latus poteſt & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo deſcriptorum.

11 SI in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum deſcribatur: Pentagoni latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor.

12 SI in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur: Trianguli latus potentia triplum eſt eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

13 PYRAMIDEM conſtituere, & data ſphæra complecti, & demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit ſeſquialtera lateris ipſius pyramidis.

14 OCTAEDRVM conſtituere, & ſphæra complecti, qua & pyramidem, & demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit dupla lateris ipſius octaedri.

15 CVBVM conſtituere, & ſphæra complecti, qua & priores figuras, & demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit tripla lateris ipſius cubi.

16 ICOSAEDRVM conſtituere, & ſphæra complecti, qua & ante dictas figuras, & demonſtrare, quod Icoſaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor.

17 DODECAEDRVM conſtituere, & ſphæra complecti, qua & prædictas figuras, & demonſtrare, quod Dodecaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Apotome.

18 LATERA quinque figurarum exponere, & inter ſe comparare.

Digitized by Google

QVARTIDECIMI LIBRI.

1 QVÆ ex centro circuli cuiuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus perpendicularis ducitur, dimidia eſt vtriuſque lineæ ſimul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inſcripti.

2 SI binæ rectæ lineæ extrema ac media ratione ſecentur; ipſæ ſimiliter ſecabuntur, in eaſdem ſcilicet proportiones.

3 SI in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur: quod à latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni ſubtenditur, recta linea, vtraque ſimul quadrata, quintupla ſunt eius, quod ex ſemidiametro deſcribitur, quadrati.

4 *SI latus hexagoni alicuius circuli ſecetur extrema ac media ratione: maius illius ſegmentum erit latus decagoni eiuſdem circuli*

5 IDEM circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum & Icoſaedri triangulum, eidem ſphæræ inſcriptorum.

6 SI ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pentagoni: Erit quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigeſies ſumptum, Dodecaedri ſuperficiei æquale.

7 SI ex centro circuli triangulum Icoſaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli: Erit quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigeſies ſumptum, Icoſaedri ſuperficiei æquale.

8 RECTANGVLVM contentum ſub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque ſextis partibus lineæ ſubtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo deſcripti, æquale eſt dicto pentagono.

9 SVPERFICIES Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti, eandem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icoſaedri.

10 SI recta linea ſecetur extrema ac media ratione: Erit vt recta potens id, quod à tota, & id, quod à maiori ſegmento ad rectam potentem id, quod à tota, & id, quod à minori ſegmento, ita latus cubi ad latus Icoſaedri eidem ſphæræ cum cubo inſcripti.

11 DODECAEDRVM ad Icoſaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum, eſt vt cubi latus ad latus Icoſaedri, in vna eademque ſphæra.

12 *LATVS trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt lineæ perpendicularis ab vno angulo ad latus oppoſitum deducta.*

13 *SI ſphæræ diameter fuerit Rationalis: Erit tam ſuperficies Tetraedri, quam Octaedri in ea ſphæra, Media.*

Digitized by Google

14 Tetraedrum, atque Octaedrum eidem ſphara inſcribantur: x baſis Tetraedri ſeſquitertia baſis Octaedri; ſuperficies autem Octaedri ſeſquialtera ſuperficiei Tetraedri.

15 RECTA linea ex angulo quouis Tetraedri in ſphara deſcripti a centrum ſphara ducta, cadit in centrum baſis oppoſita, eſtque perpendicularis ad dictam baſim.

16 OCTAEDRVM in ſphara deſcriptum diuiditur in duas pyramides aquales, & ſimiles aqualium altitudinum; baſis verò vtriuſque eſt quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphara.

17 TETRAEDRVM ſphara impoſitum ad Octaedrum in eadem ſphara deſcriptum ſe habet, vt rectangulum ſub linea potente vigintiſeptem ſexageſimasquartas partes quadrati lateris Tetraedri, & ſub linea continente octo nonas partes eiuſdem lateris comprehenſum, ad quadratum diametri ſphara.

Vel vt Campanus habet.

TETRAEDRVM ſphara impoſitum ad Octaedrum in eadem ſphara deſcriptum ſe habet, vt rectangulum ſub linea, qua potentia eſt ſubſeſquitertia trium quartarum partium lateris Tetraedri, & ſub linea ſuperquintupartiente vigeſimas ſeptimas partes earundem trium quartarum partium lateris Tetraedri contentum, ad quadratum diametri ſphara.

18 LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli aquilateri ad baſim oppoſitam demiſſa, tripla eſt eius perpendicularis, qua ex centro trianguli ad eandem baſim deducitur.

19 SI Octaedrum ſphara inſcribatur: Erit ſemidiameter ſphara potentia tripla eius perpendicularis, qua ex centro ſphara in baſim quamcunque Octaedri ducitur.

20 DVPLVM quadrati ex diametro cuiuslibet ſphara deſcripti, aquale eſt ſuperficiei cubi in illa ſphara collocati; Perpendicularis autem à centro ſphara in aliquam baſim cubi demiſſa, aqualis eſt dimidio lateris cubi.

21 IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & Octaedri triangulum, eiuſdem ſphara.

22 SI Octaedrum, atque Tetraedrum eidem ſphara inſcribantur: Erit Octaedrum ad triplum Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri.

23 SI recta linea propoſita potuerit totam aliquam lineam ſectam extrema ac media ratione, & maius eius ſegmentum; Item totam aliam ſimiliter ſectam, & minus eius ſegmentum: Erit maius ſegmentum prioris linea latus Icoſaedri, minus autem ſegmentum poſterioris linea latus Dodecaedri eius ſphara, cuius recta linea propoſita diameter exiſtit.

24 SI latus Octaedri potuerit maius & minus ſegmentum recta linea extre-

neæ extremæ ac media ratione ſectæ: Poterit latus Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti duplum minoris ſegmenti.

25 *SI recta linea diuiſa extrema ac media ratione cum minore ſegmento angulum rectum conſtituat, cui recta ſubtendatur: Erit recta linea, quæ potentia ſit ſubdupla ipſius rectæ ſubtenſæ, latus Octaedri eius ſphæræ, in qua dictum minus ſegmentum latus exiſtit Dodecaedri.*

26 *SI latus Tetraedri poßit maius & minus ſegmentum lineæ rectæ extrema ac media ratione ſectæ: Latus Icoſaedri eidem ſphæræ inſcripti potentia ſeſquialterum eſt minoris ſegmenti.*

27 *CVBVS ad Octaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum eſt vt ſuperficies cubi ad Octaedri ſuperficiem: Item vt latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ.*

28 *SI ſint quatuor lineæ rectæ continuè proportionales, nec non & aliæ quatuor, ita vt ſit eadem antecedens omnium: Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis ſecundæ ad ſecundam duplicata, & proportio quartæ ad quartam eiuſdem proportionis ſecundæ ad ſecundam triplicata.*

29 *QVADRATVM lateris trianguli æquilateri ad ipſum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppoſitum ductam, & dimidium ipſius lateris.*

30 *SI Cubus, & Tetraedrum in eadem ſphæra deſcribantur: Erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri, vt latus Tetraedri ad lineam perpendicularem, quæ ex vno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppoſitum deducitur.*

31 *LATVS Tetraedri potentia ſeſquialterum eſt axis, ſeu altitudinis ipſius; Axis verò, ſiue altitudo Tetraedri potentia ſeſquitertia eſt lateris cubi in eadem ſphæra deſcripti.*

32 *CVBVS triplus eſt Tetraedri eidem ſphæræ inſcripti.*

QVINTIDECIMI LIBRI.

1 IN dato cubo pyramidem deſcribere.

2 IN data pyramide Octaedrum deſcribere.

3 IN dato cubo Octaedrum deſcribere.

4 IN dato Octaedro cubum inſcribere.

5 IN dato Icoſaedro Dodecaedrum inſcribere.

6 *IN dato Octaedro pyramidem deſcribere.*

7 *IN dato Dodecaedro Icoſaedrum deſcribere.*

8 *IN dato Dodecaedro cubum deſcribere.*

9 *IN dato Dodecaedro Octaedrum deſcribere.*

10 *IN*

Digitized by Google

10 IN dato Dodecaedro pyramidem deſcribere.
11 IN dato Icoſaedro cubum deſcribere.
12 IN dato Icoſaedro Pyramidem deſcribere.
13 IN dato cubo Dodecaedrum deſcribere.
14 IN dato cubo Icoſaedrum deſcribere.
15 IN dato Icoſaedro Octaedrum deſcribere.
16 IN dato Octaedro Icoſaedrum deſcribere.
17 IN dato Octaedro Dodecaedrum deſcribere.
18 IN data pyramide Cubum deſcribere.
19 IN data pyramide Icoſaedrum deſcribere.
20 IN data pyramide Dodecaedrum deſcribere.
21 IN dato ſolido regulari ſphæram deſcribere.

SEXTIDECIMI LIBRI.

1 SI in Dodecaedro cubus deſcribatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum: Erit proportio Dodecaedri exterioris ad Dodecaedrum interius proportionis, quam habet maius ſegmentum ad minus rectæ lineæ diuiſæ extrema ac media ratione, triplicata.

2 LINEA perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri & æquianguli in latus oppoſitum demiſſa, ſecatur à recta illum angulum ſubtendente, extrema ac media ratione.

3 SI ab angulis trianguli pyramidis ducantur rectæ oppoſita latera ſecantes extrema ac media ratione, ita vt prope quemuis angulum ſit maius ſegmentum vnius lateris, & minus alterius; Hæ ſectionibus ſuis in medio producent baſin Icoſaedri in dicta pyramide deſcripti, inſcriptam quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis ſecant extrema ac media ratione, & latera ipſa biſariam ſecantur ab angulis baſis Icoſaedri.

4 MINVS ſegmentum lateris pyramidis extrema ac media ratione ſecti duplum eſt potentia lateris Icoſaedri in ea Pyramide deſcripti.

5 LATVS cubi potentia dimidium eſt lateris pyramidis in eo deſcripta: Latus verò pyramidis duplum eſt longitudine lateris Octaedri ſibi inſcripti: Latus denique cubi duplum eſt potentia lateris ſibi inſcripti Octaedri.

6 LATVS Dodecaedri maius ſegmentum eſt recta, quæ potentia eſt dimidia lateris pyramidis ſibi inſcripta.

7 SI in cubo deſcribatur & Icoſaedrum, & Dodecaedrum: Latus Icoſaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & Dodecaedri.

8 LATVS pyramidis potentia octodecuplum eſt lateris cubi in ea deſcripti.

Digitized by Google

9 *LATVS pyramidis potentia octodecuplum eſt recta extrema media ratione ſecta, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecae in pyramide deſcripti.*

10 *SI in Octaedro Icoſaedrum deſcribatur: Erit latus Icoſaedri potentia duplum minoris ſegmenti lateris Octaedri extrema ac media ratione diuiſi.*

11 *LATVS Octaedri potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi in ſeipſo deſcripti.*

12 *LATVS Icoſaedri maius ſegmentum eſt eius recta extrema media ratione ſecta, quæ potentia dupla eſt lateris Octaedri in Icoſaedro deſcripti.*

13 *LATVS cubi ad latus Dodecaedri in ipſo deſcripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius ſegmentum minus rectæ lineæ diuiſæ extrema ac media ratione: Latus Dodecaedri ad latus cubi in ipſo deſcripti proportionem hab quam minus ſegmentum ad maius eiuſdem rectæ lineæ.*

14 *LATVS Octaedri ſeſquialterum eſt lateris ſibi inſcripti pyramidis.*

15 *SI ex quadrato diametri Icoſaedri auferatur triplum quadra lateris cubi in eo deſcripti; relinquitur quadratum ſeſquitertiu quadrati lateris Icoſaedri.*

16 *LATVS Dodecaedri minus ſegmentum eſt rectæ lineæ extrem ac media ratione diuiſæ, quæ duplum poteſt lateris Octaedri in deſcripti.*

17 *DIAMETER Icoſaedri poteſt & ſui ipſius lateris ſeſquiter tium, & lateris pyramidis in eo deſcriptæ ſeſquialterum.*

18 *LATVS Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus ſe habe vt minus ſegmentum lineæ perpendicularis ab vno angulo penta goni ad latus oppoſitum ductæ, atque extrema ac media ratione diuiſæ, ad partem eiuſdem lineæ inter centrum pentagoni, & latu eiuſdem poſita.*

19 *SI dimidium lateris Icoſaedri extrema ac media ratione ſectum fuerit, minuſque eius ſegmentum à toto latere Icoſaedri ſublatum à reliqua quoque recta pars rurſum tertia detracta: Relinquetu latus Dodecaedri in Icoſaedro deſcripti.*

20 *CVBVS ſibi inſcripta pyramidis triplus eſt.*

21 *PYRAMIS ſibi inſcripti Octaedri dupla eſt.*

22 *CVBVS ſibi inſcripti Octaedri ſextuplus eſt.*

23 *OCTAEDRVM ſibi inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterum eſt.*

24 *OCTAEDRVM ſibi inſcriptæ pyramidis tredecuplum ſeſquialterum eſt.*

25 *PYRAMIS ſibi inſcripti cubi noncupla eſt.*

26 *OCTAEDRVM ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem ha-*

Digitized by Google

m habet, quam duæ baſes Octaedri ad quinque baſes Icoſaedri.

ICOSAEDRVM ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione lateris Icoſaedri ad latus cubi in eadem cum Icoſaedro ſphæra deſcripti, & ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Icoſaedri ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarum coniungentem.

28 DODECAEDRVM excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cuius quidem baſis à quadrato cubi deficit rectangulo contento ſub latere cubi, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi, at verò altitudo ab altitudine, ſiue latere cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit.

29 DODECAEDRVM ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra baſium Dodecaedri oppoſitarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum cubo deſcripti.

30 DODECAEDRVM Pyramidis, in qua deſcribitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide deſcripti æqualis eſt, latitudo verò tertiæ parti minoris ſegmenti lateris eiuſdem cubi, altitudo denique à latere eiuſdem cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiuſdem minus ſegmentum exiſtit: Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti eſt æqualis, altitudo verò minus ſegmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiuſdem ſegmentum minus exiſtit, ita vt amborum altitudines ſimul altitudini, ſiue lateri eiuſdem cubi ſint æquales.

31 OCTAEDRVM excedit ſibi deſcriptum Icoſaedrum Parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri, altitudo verò maius ſegmentum ſemidiametri Octaedri extrema ac media ratione ſecta.

Digitized by Google

INDEX PROBLEMATVM AC THEOREMATVM, QVÆ PRÆTER PROpoſitiones in ſexdecim libris Euclidis contentas in hiſce commentariis demonſtrantur.

IN PRIMO LIBRO.

1 *REGVLAM pro lineis rectis ducendis examinare, num recta ſit, nec ne.* Ad defin. 4.

2 *ANGVLVM rectilineum examinare, num rectus ſit, an obtuſus, vel acutus.* Ad defin. 12.

3 *NORMAM pro angulis rectis conſtituendis examinare, num accurate fabricata ſit.* Ad def. 12.

4 *CIRCVLVS biſariam à diametro ſecatur.* Ad def. 18.

5 *CIRCVLVS à linea per centrum non tranſeunte ſecatur in partes inæquales, maiorque eſt ea, in qua centrum.* Ad defin. 18.

6 *DVÆ rectæ lineæ non habent vnum & idem ſegmentum commune.* Ad Axioma 10.

7 *DVÆ rectæ in vno puncto concurrentes, ſi producantur ambæ, neceſſario ſe mutuo in eo puncto interſecabunt.* Ad Axioma 11.

8 *OMNES anguli recti ſunt inter ſe æquales.* Ad Axioma 12.

9 *DVÆ rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt.* Ad Axioma 14.

10 *SVPER data recta linea terminata triangulum Iſoſceles, & Scalenum conſtituere.* Ad propoſ. 1.

11 *OMNE triangulum æquilaterum eſt etiam æquiangulum.* Coroll. propoſ. 5.

12 *OMNE triangulum æquiangulum eſt etiam æquilaterum.* Coroll. propoſ. 6.

13 *SI trianguli cuiuslibet productis duobus lateribus, anguli infra baſin fiant æquales: Et duo latera illa æqualia inter ſe erunt.* Ad propoſ. 6.

14 *SI duo triangula baſes habuerint æquales, & angulos ſuper baſes conſtitutos æquales, vtrumque vtrique: Habebunt quoque reliqua latera æqualia, vtrumque vtrique, quæ videlicet æqualibus angulis ſubtenduntur, anguloſque reliquos hiſce lateribus incluſos, æquales.* Ad propoſ. 8.

15 *SI duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus vtrumque vtriq; æqualia, habuerint verò & baſim baſi æqualem: æquiangula inter ſe erunt, & æqualia.* Coroll. propoſ. 8.

Digitized by Google

[DV]Æ lineæ rectæ ſe mutuo ſecantes efficiunt ad punctum ſectio- [nis] quatuor angulos quatuor rectis æquales. Coroll. 1. propoſ. 15.

[Q]VOTLIBET anguli circa vnum & idem punctum conſti- [tuti] quatuor rectis ſunt æquales. Coroll. 2. propoſ. 15.

[SI] ad aliquam rectam lineam, ad eiuſque ſignum, duæ rectæ li- neæ non ad eaſdem partes ſumptæ, angulos ad verticem æquales fecerint: ipſæ rectæ lineæ in directum ſibi inuicem erunt. Ad pro- poſ. 15.

19 SI quatuor rectæ lineæ ab vno puncto exeuntes binos angulos op- poſitos inter ſe æquales fecerint: Erunt quælibet duæ lineæ aduerſæ in rectum ſibi, & continuum coniunctæ. Ad propoſ. 15.

20 AB vno puncto ad eandem lineam rectam non poſſunt duci plu- res lineæ rectæ, quàm duæ inter ſe æquales. Ad propoſ. 16.

21 AB vno puncto ad eandem lineam rectam non poſſunt duci plu- res lineæ perpendiculares, quàm vna. Ad propoſ. 17.

22 IN omni triangulo, cuius vnus angulus fuerit rectus, aut obtu- ſus, reliqui ſunt acuti. Coroll. 1. propoſ. 17.

23 SI linea recta cum alia recta angulos inæquales faciat, vnum obtuſum, & acutum alterum: Linea perpendicularis ex quouis eius puncto ad aliam illam rectam demiſſa cadit ad partes anguli acuti. Coroll. 2. propoſ. 17.

24 OMNES tres anguli in triangulo æquilatero, & duo ſupra baſim in Iſoſcele, ſunt acuti. Coroll. 3. propoſ. 17.

25 OMNES tres anguli in triangulo Scaleno ſunt inæquales. Co- roll. propoſ. 18.

26 OMNIVM rectarum ex quouis puncto ad rectam quamcun- que ductarum, ea quæ perpendicularis eſt, minima exiſtit. Co- roll. propoſ. 19.

27 SI trianguli angulus biſariam ſectus fuerit, ſecanſq; angulum recta linea ad baſim ducta in partes inæquales ipſam diuidat: La- tera illum angulum continentia inæqualia erunt, & maius qui- dem illud, quod cum maiori baſis ſegmento coincidit, minus verò, quod cum minori. Ad propoſ. 19.

28 SI trianguli duo latera inæqualia fuerint; Linea recta biſariam diuidens angulum ipſis contentum, ſecabit baſim in partes inæqua- les, maiuſque ſegmentum erit propè maius latus. Ad propoſ. 19.

29 SI trianguli angulum recta linea biſariam diuidens, baſim bi- ſariam quoque ſecet: Erunt duo latera angulum continentia æ- qualia. Quod ſi latera æqualia fuerint, baſim etiam biſariam ſe- cabit linea recta, quæ angulum biſariam diuidit. Ad propoſ. 19.

30 IN triangulo aliquo duci poſſunt duæ rectæ, vna quidem ab ex- tremo lateris, altera verò à puncto prope alterum extremum eiuſ- dem lateris, intra triangulum concurrentes, quæ maiores ſint duo- bus lateribus trianguli. Ad propoſ. 21.

31 SI duo triangula duos angulos duobus angulis æquales hab- rint, vtrumque vtrique: vnumque latus vni lateri æquale, ſ- quod æqualibus adiacet angulis, ſeu quod vni æqualium ang- rum ſubtenditur: ipſa æqualia inter ſe erunt. Coroll. prop. 31.

32 IN triangulo æquilatero, ſiue Iſoſcele, recta linea ab ang- duobus lateribus æqualibus comprehenſo ducta, diuidenſq; v- angulum vel baſim biſariam, perpendicularis eſt ad baſim; E- quidem angulum biſariam diuidat; ſecabit quoq; baſim biſar- ſi verò baſim ſecet biſariam, diuidet quoq; angulum biſariam. contrà, Linea perpendicularis ad baſim ducta diuidit & baſi- & angulum biſariam. Ad propoſ. 26.

33 TRIANGVLVM, in quo linea recta ab vno angulorum d- cta ad baſim perpendicularis diuidit vel baſim, vel angulum b- fariam, habet duo latera dictum angulum comprehendentia æ- qualia. Et ſi quidem baſis diuidatur biſariam, angulus quoq; bi- fariam ſecabitur, ſi verò angulus biſariam ſecetur, baſis quoq; di- uidetur biſariam. Ad propoſ. 26.

34 SI ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes infinitè pro- ducantur, ſemper magis ac magis inter ſe diſtabunt, omnemq; fi- nitam magnitudinem ipſarum diſtantia excedet. Ad propoſ. 28.

35 SI duarum parallelarum rectarum linearum alteram ſecet quæ- dam recta linea, reliquam quoq; productã ſecabit. Ad propoſ. 28.

36 SI ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter ſe æquales; quarum extrema puncta per lineam rectam con- iungantur: Erit perpendicularis ex quouis puncto huius rectæ ad priorem rectam demiſſa, vtrilibet priorum perpendicularium æ- qualis. Ad propoſ. 28.

37 SI ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter ſe æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam con- iungantur: Efficiet hæc recta cum vtraq; perpendiculari angulum rectum. Ad propoſ. 28.

38 SI in duas rectas lineas alia recta incidens faciat cum vna ea- rum angulum internum rectum, & cum altera ex eadem parte acutum: duæ illæ rectæ minus ſemper inter ſe diſtabunt ad eas partes, vbi eſt angulus acutus, ex altera verò parte ſemper inter ſe magis diſtabunt. Ad propoſ. 28.

39 SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad eaſdem- que partes angulos duobus rectis minores faciat: Duæ illæ rectæ li- neæ in infinitum productæ ſibi mutuò incident ad eas partes, vbi ſunt anguli duobus rectis minores. Ad propoſ. 28. Eſtq; axioma 13. Hæ porrò quatuor vltimæ propoſitiones demonſtrantur ex ſolis 28. propoſitionibus Euclidis, nulla adhibita proprie- tate parallelarum.

40 PARALLELOGRAMMVM conſtituere, cuius vnus angu-

gulorum æqualis ſit dato angulo rectilineo, lateraq́ angulum eum comprehendentia datis duabus rectis lineis æqualia. Ad propoſ. 31.

41 *A dato puncto extra datam rectam lineam, rectam lineam ducere, quæ cum data recta angulum efficiat dato angulo rectilineo æqualem.* Ad propoſ. 31.

42 *A dato puncto in extremo lineæ rectæ, ad ipſam, licet non producatur, aut produci non poſſit, perpendicularem lineam excitare.* Ad propoſ. 31.

43 *A dato puncto in extremo fere plani, & extra lineam rectam, ad ipſam rectam lineam perpendicularem demittere.* Ad propoſ. 31.

44 *SI ab uno angulo trianguli linea recta extra triangulum ducatur faciens externum angulum æqualem duobus internis, & oppoſitis: illa linea erit in directū ipſi lateri conſtituta.* Ad propoſ. 32.

45 *OMNES anguli figuræ cuiuſuis rectilineæ, ſunt æquales bis tot rectis, quota ipſa eſt inter figuras rectilineas.* Ad propoſ. 32.

46 *OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiuſuis æquales ſunt bis tot rectis, demptis quatuor, quot ipſa continet latera, ſeu angulos.* Ad propoſ. 32.

47 *SI ſingula latera figuræ cuiuſuis rectilineæ producantur verſus eandem partem; omnes anguli externi æquales ſunt quatuor tantum rectis.* Ad propoſ. 32.

48 *SI pentagoni ſingula latera producantur in utramque partem, ut quælibet duo extra pentagonum coeant: efficientur quinque anguli ex lateribus coeuntibus æquales duobus ſolùm rectis.* Ad propoſ. 32.

49 *TRES anguli cuiuslibet trianguli ſimul ſumpti æquales ſunt tribus angulis cuiuſuis alterius trianguli ſimul ſumptis.* Coroll. 1. propoſ. 32.

50 *IN triangulo Iſoſcele, ſi angulus à lateribus æqualibus comprehenſus fuerit rectus, erit uteruis æqualium angulorum ſupra baſim ſemirectus; ſi verò obtuſus, minor ſemirecto, ſi deniq; acutus, maior ſemirecto.* Coroll. 2. propoſ. 32.

51 *QVILIBET angulus trianguli æquilateri continet duas tertias partes unius recti, vel unam tertiam partem duorum rectorum.* Coroll. 3. propoſ. 32.

52 *SI ab uno angulo trianguli æquilateri perpendicularis ad latus oppoſitum ducatur, conſtituentur duo triangula ſcalena, quorum utrumq; habet unum angulum rectum prope perpendicularem, alium verò perpendiculari oppoſitum æqualem duabus tertijs partibus unius recti, reliquum deniq; æqualem tertiæ parti unius recti.* Coroll. 4. propoſ. 32.

53 *ANGVLVM rectum in tres angulos æquales diuidere.* Ad propoſ. 32.

54 OMNE

54 OMNE quadrilaterum habens latera oppoſita æqualia, parallelogrammum. Ad propoſ.34.

55 OMNE quadrilaterum habens angulos oppoſitos æquales, parallelogrammum. Ad propoſ. 34.

56 OMNE quadrilaterum habens omnes angulos rectos, eſt parallelogrammum. Ad propoſ. 34.

57 IN quadrato & Rhombo anguli oppoſiti bifariam ſecantur diametro. Ad propoſ.34.

58 IN altera parte longiori, & Rhomboide, anguli oppoſiti non bifariam ſecantur à diametro. Ad propoſ.34.

59 IN quadrato, & altera parte longiori, duæ diametri ſunt inter ſe æquales. Ad propoſ. 34.

60 IN Rhombo, & Rhomboide, duæ diametri non ſunt inter ſe æquales. Ad propoſ. 34.

61 IN omni parallelogrammo diametri ſe mutuò bifariam diuidunt. Ad propoſ.34.

62 OMNE quadrilaterum, in quo diametri ſe mutuò bifariam diuidunt, parallelogrammum eſt. Ad propoſ.34.

63 RECTA linea ſecans diametrum parallelogrammi bifariam quomodocunque, diuidit parallelogrammum quoq; bifariam. Et recta linea diuidens parallelogrammum bifariam quouis modo, ſecat quoque diametrum bifariam. Ad propoſ.34.

64 A quouis dato puncto lineam rectam ducere, quæ parallelogrammum datum ſecet bifariam. Ad propoſ.34.

65 INTER duas lineas rectas infinitas angulum facientes, lineam rectam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum altera illarum faciat angulum cuius angulo dato æqualem. Oportet autem hunc angulum datum, & eum, qui lineis datis continetur, minores eſſe duobus rectis. Ad propoſ. 34.

66 IN aliquo triangulo conſtitui poſſunt intra ipſum duæ rectæ à duobus punctis baſis, æquales duobus lateribus. Ad propoſ.34.

67 IN omni figura rectilinea latera habente numero paria, ſi quidem fuerit æquilatera & æquiangula, duo quælibet latera oppoſita parallela inter ſe ſunt. Ad propoſ.34.

68 PARALLELOGRAMMA æqualia ſuper eandem baſin, ad eaſdemq; partes conſtituta, inter eaſdem ſunt parallelas. Ad propoſ. 35.

69 PARALLELOGRAMMA æqualia ſuper baſes æquales, & ad eaſdem partes conſtituta, inter eaſdem ſunt parallelas. Et parallelogramma æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non eandem habuerint baſim, ſuper æquales baſes ſunt conſtituta. Ad propoſ.36.

70 SI duo parallelogramma inter eaſdem parallelas habeant baſes inæquales, illud, cuius baſis maior eſt, maius erit. Et contrà, ſi duo paral-

Digitized by Google

[...]llelogramma ſunt inæqualia inter eaſdem parallelas, baſis [...] maior erit. Ad propoſ. 36.

TRIANGVLA, quorum duo latera vnius æqualia ſint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique, & angulus vnius illis [...]ribus contentus maior angulo alterius, ſi quidem ambo ſimul [...] ſint rectis æquales, æqualia ſunt: Si verò duobus ſint rectis maiores, minus illud eſt, quod maiorem habet angulum; ſi denique ſint minores duobus rectis, maius illud erit, quod maiorem angulum habet. Ad propoſ. 37.

72 *SI à quouis angulo trianguli linea recta ducatur diuidens latus oppoſitum biſariam, triangulum quoque biſariam ſecabit.* Ad propoſ. 38.

73 *A puncto quouis dato in vno latere trianguli propoſiti lineam rectam ducere, quæ biſariam ſecet triangulum datum.* Ad propoſ. 38.

74 *LINEA recta ſecans duo trianguli latera biſariam, reliquo lateri eſt parallela.* Ad propoſ. 39.

75 *OMNE quadrilaterum, quod ab vtraque diametro biſariam diuiditur, parallelogrammum eſt.* Ad propoſ. 39.

76 *TRIANGVLA æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non eandem habuerint baſim, ſuper æquales baſes erunt conſtituta.* Ad propoſ. 40.

77 *SI duo triangula inter eaſdem parallelas habeant baſes inæquales, illud, cuius baſis maior eſt, maius erit. Et contrà, ſi duo triangula ſint inæqualia inter eaſdem parallelas, baſis maioris maior erit.* Ad propoſ. 40.

78 *TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſita baſes æquales ſint, ſunt inter ſe æqualia. Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, habent baſes oppoſitas æquales.* Ad propoſ. 40.

79 *TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſita baſes ſint inæquales, inæqualia ſunt, maiuſque eſt illud, cuius baſis maior eſt. Et trapezia inæqualia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, habent baſes oppoſitas inæquales, maiorque eſt illa, cuius trapezium maius eſt.* Ad propoſ. 40.

80 *TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, quorum oppoſita baſes ſint æquales, æqualia ſunt. Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, habent baſes oppoſitas æquales.* Ad propoſ. 40.

81 *TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, quorum oppoſita baſes ſint inæquales, inæqualia ſunt, maiuſque eſt illud, cuius baſis maior eſt. Et trapezia inæqualia in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, habent oppoſitas baſes inæquales, maiorque eſt illa, cuius trapezium maius eſt.* Ad propoſ. 40.

82 SI

Digitized by Google

82 *SI in triangulo linea recta vni laterum parallela ducatur:*
cta ex angulo oppoſito ducta, diuidenſq; alterutram parallelar
biſariam, diuidit quoq; alteram biſariam. Ad propoſ. 40.
83 *DATAM rectam lineam finitam in quotlibet partes æqu*
ſecare. Ad propoſ. 40.
84 *SI triangulum duplam habuerit baſim, fueritq; in eiſdem p*
rallelis cum parallelogrammo: triangulum parallelogrammo
quale eſt. Ad propoſ. 41.
85 *SI parallelogrammum & triangulum æquales habuerint baſ*
in eiſdemq; fuerint parallelis: duplum erit parallelogramm
trianguli. Ad propoſ. 41.
86 *SI trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemq; h*
buerint baſim, vel æquales, & ad eaſdem partes conſtituta: Eru
ipſa in eiſdem parallelis. Et ſi parallelogrammum duplum fuer
trianguli, in eiſdemq; parallelis: Erunt baſes æquales, ſi non ſ
eadem. Ad propoſ. 41.
87 *SI triangulum & trapezium ſuper eadem baſi, & in eiſde*
fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij ſit baſi
trianguli: Erit trapezium minus duplo trianguli: Si verò mino
linea trapezij baſis ſit trianguli, erit trapeziũ maius duplo trian-
guli. Ad propoſ. 41.
88 *TRAPEZIVM habens duo latera oppoſita parallela, du-*
plum eſt trianguli, quod baſim habet vnum latus trapezij con-
iungens duas parallelas; verticem verò in medio puncto lateris op-
poſiti. Ad propoſ. 41.
89 *DATO parallelogrammo æquale triangulum conſtituere, in*
dato angulo rectilineo. Ad propoſ. 42.
90 *SI parallelogrammũ diuiſum fuerit in quatuor parallelogram-*
ma, ita vt ex illis duo aduerſa ſint æqualia: conſiſtent reliqua duo
circa diametrum. Ad propoſ. 43.
91 *AD datam rectam lineam, dato parallelogrammo conſtituere*
æquale triangulum, in dato angulo rectilineo. Ad propoſ. 44.
92 *DATIS duobus rectilineis inæqualibus, exceſſum maioris ſu-*
pra minus inquirere. Ad propoſ. 45.
93 *LINEARVM æqualium æqualia ſunt quadrata. Et quadra-*
torum æqualium æquales ſunt lineæ. Ad propoſ. 46.
94 *TRES numeros inuenire, ita vt quadrati numeri duorum*
quadrato numero reliqui ſint æquales. Ad propoſ. 47.
95 *SI in quadrato quouis diameter ducatur, quadratum à diame-*
tro deſcriptum, duplum erit prædicti quadrati. Ad propoſ. 47.
96 *QVADRATVM diametri figuræ altera parte longioris æ-*
quale eſt duobus quadratis laterum inæqualium. Ad propoſ. 47.
97 *SI fuerint duo triangula rectangula, quorum latera rectis an-*
gulis oppoſita ſint æqualia: Erunt duo quadrata reliquorum duo-
rum

Digitized by Google

laterum vnius trianguli æqualia duobus quadratis reliquorum duorum laterum alterius. Ad propoſ. 47.

98 *DVOBVS quadratis inæqualibus propoſitis, inuenire alia duo quadrata, quæ & æqualia ſint inter ſe, & ſimul ſumpta æqualia duobus inæqualibus propoſitis ſimul ſumptis.* Ad propoſ. 47.

99 *PROPOSITIS duabus lineis inæqualibus, inuenire id, quo plus poteſt maior, quàm minor.* Ad propoſ. 47.

100 *PROPOSITIS quotcunque quadratis, ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis æquale.* Ad propoſ. 47.

101 *PROPOSITIS duobus quadratis quibuſcunq;, alteri illorum adiungere figuram, quæ reliquo quadrato ſit æqualis, ita vt tota figura compoſita ſit etiam quadrata.* Ad propoſ. 47.

102 *COGNITIS duobus lateribus quibuſcunq; trianguli rectanguli, in cognitionem reliqui lateris peruenire.* Ad propoſ. 47.

103 *SI ex angulo à duobus lateribus inæqualibus trianguli comprehenſo ad baſin perpendicularis ducatur cadens intra triangulum: Secabitur baſis in partes inæquales, maiorq; pars iuxta maius latus erit. Et contrà, ſi baſis à perpendiculari ſecetur non bifariam: Erunt duo latera inæqualia, maiusq; illud erit, quod maiori baſis ſegmento adiacet.* Ad propoſ. 47.

104 *IN omni triangulo, parallelogramma quæcunq; ſuper duobus lateribus deſcripta, æqualia ſunt parallelogrammo ſuper reliquo latere conſtituto, cuius alterum latus æquale ſit, & parallelum rectæ ductæ ab angulo, quem duo illa latera comprehendunt, ad punctum, in quo conueniunt latera parallelogrammorum lateribus trianguli oppoſita, ſi ad partes anguli illius producantur.* Ad propoſ. 47.

105 *TRIANGVLORVM comparationes in primo libro demonſtratas explicare.* Ad finem lib. 1.

106 *QVANDO duo latera vnius trianguli duobus lateribus alterius trianguli æqualia ſunt, vtrumq; vtriq;, & vnus angulus vni angulo, qui vni æqualium laterum opponitur; baſes æquales eſſe nequeunt, niſi quando angulus in vtroq; triangulo alteri lateri æquali oppoſitus vel eſt minor recto, vel non minor recto.* Ad finem lib. 1.

107 *QVANDO duo latera vnius trianguli duobus lateribus alterius trianguli æqualia ſunt, vtrumq; vtriq;, & vnus angulus vni angulo, ita vt vnus vni æqualium laterum, & alter alteri opponatur: nihil colligi poteſt.* Ad finem lib. 1.

108 *QVANDO duo latera vnius trianguli duobus lateribus alterius trianguli æqualia ſunt, vtrumq; vtriq;, & angulus in vno triangulo illis lateribus comprehenſus, æqualis angulo, qui in altero triangulo opponitur vni illorum laterum: nihil poteſt inferri.* Ad finem lib. 1.

Digitized by Google

IN SECVNDO LIBRO.

1 *IN omni parallelogrammo, ſi vnus angulus duntaxat detur rectus, reliqui etiam tres recti erunt.* Ad defin.1.

2 *SI fuerint duæ rectæ lineæ, ſecenturq; ambæ in quotcunq; ſegmenta: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis æquale eſt eis, quæ ſub ſingulis ſegmentis vnius, & quolibet ſegmentorum alterius continentur, rectangulis.* Ad propoſ.1.

3 *SI ſint duæ rectæ lineæ, ſecenturq; ambæ vtcunque: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, vna cum rectangulo ſub vna parte vnius, & vna parte alterius comprehenſo, æquale eſt eis, quæ ſub totis lineis, & dictis partibus mutuo continentur, rectangulis, vna cum rectangulo ſub reliquis partibus comprehenſo.* Ad propoſ.1.

4 *SI linea recta ſecetur in quotcunque ſegmenta: Quadratum, quod à toto fit, æquale eſt eis, quæ ſub ſingulis ſegmentis, & quolibet ſegmento comprehenduntur, rectangulis.* Ad propoſ.2.

5 *PARALLELOGRAMMA circa diametrum quadrati ſunt quadrata.* Ad propoſ. 4.

6 *DIAMETER cuiuſuis quadrati diuidit eius angulos biſariam.* Ad propoſ.4.

7 *SI linea recta fuerit dupla lineæ rectæ, quadratum ex illa deſcriptum, quadruplum eſt quadrati ex hac deſcripti. Et ſi quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum eſt lateris huius.* Ad propoſ. 4.

8 *NVMERVM quadratum inuenire, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoque numerum conſtituat.* Et *viciſſim quadratum numerum reperire, à quo datus quiuis numerus ſubtractus relinquat numerum quoque quadratum.* Ad propoſ. 4.5.6.& 8.

9 *SI tres lineæ habeant proportionalitatem Arithmeticam; Rectangulum ſub extremis contentum, vna cum quadrato exceſſus, æquale eſt quadrato mediæ.* Ad propoſ.6.

10 *SI recta linea in partes inæquales ſecetur: Earum partium quadrata æqualia ſunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur, vna cum quadrato eius lineæ, qua maior pars ſuperat minorem.* Ad propoſ.7.

11 *IN omni triangulo obtuſangulo, linea perpendicularis ducta ex quouis acutorum angulorum ad latus oppoſitum, cadit in ipſum latus ad partes anguli obtuſi protractum.* Ad propoſ.12.

12 *SI in triangulo quadratum vnius lateris maius ſit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppoſitus, obtuſus eſt.* Ad propoſ. 12.

13 *SI in triangulo quadratum vnius lateris maius ſit quadratis reli-*

Digitized by Google

utrorum duorum laterũ, rectangulo bis comprehenſo ſub alterutro horum laterum, & ſub exteriore linea, quam ex illo latere educto recta linea ab oppoſito angulo demiſſa abſcindit: Demiſſa hæc linea ad latus productum perpendicularis erit, & angulus propoſiti trianguli priori illi lateri oppoſitus, obtuſus. Ad propoſ. 12.

14 AMBLYGONIA triangula conſtituere laterum commenſurabilium, in quibus ſegmentum inter angulum obtuſum, & perpendicularem commenſurabile etiam ſit latus Ad propoſ. 12.

15 SI in triangulo quadratum vnius lateris minus ſit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppoſitus, acutus erit. Ad propoſ. 13.

16 SI in triangulo quadratum vnius lateris minus ſit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenſo ſub alterutro horum laterum, & ſub recta linea inter angulum priori lateri oppoſitum, & rectam lineam ab angulo alteri illi lateri oppoſito demiſſam: Linea hac demiſſa ad alterum illud latus perpendicularis erit, & angulus propoſiti trianguli priori illi lateri oppoſitus, acutus. Ad propoſ. 13.

17 TRIANGVLA commenſurabilium laterum conſtituere, in quibus ſegmenta inter perpendicularem, quæ in baſim cadit, eiſdem lateribus commenſurabilia quoq; ſunt. Ad propoſ. 13.

18 SI in triangulo à quouis angulo recta linea ducatur, diuidens latus oppoſitum biſariam: erunt duo quadrata laterum eum angulum ambientium ſimul dupla duorum quadratorum ſimul ſumptorum, quorum vnum ex linea ducta, alterum verò ex dimidiato latere deſcribitur. Ad propoſ. 13.

19 AREAM cuiuſque trianguli latera habentis nota inuenire. Ad propoſ. 13.

20 DATO exceſſu diametri alicuius quadrati ſupra latus eiuſdem: Inuenire latus ipſius quadrati. Ad propoſ. 14.

21 DATIS duobus exceſſibus diametri alicuius parallelogrammi rectanguli ſupra vtrumque latus: Inuenire latera ipſius rectanguli. Ad propoſ. 14.

IN TERTIO LIBRO.

1 SI in circulo recta aliqua linea aliquam rectam lineam biſariam, & ad angulos rectos ſecet: in ſecante eſt centrum circuli. Coroll. propoſ. 1.

2 LINEA recta, quæ circulum tangit, ita vt eum non ſecet; in vno tantùm puncto ipſum tangit. Coroll. propoſ. 2.

3 IN triangulo æquilatero, vel Iſoſcele, recta ſecans baſim biſariam,

riam, ad baſim perpendicularis eſt. Et perpendicularis ad baſi *ſecat baſim biſariam.* Coroll. propoſ. 3.

4 *DVOBVS circulis ex eodem centro deſcriptis, ſi ab ali* *puncto circumferentiæ exterioris rectæ ducatur interioris circu* *ferentiam ſecans: Erunt eius ſegmenta inter Vtramq; circum* *rentiam poſita, inter ſe æqualia.* Ad propoſ. 3.

5 *SI intra circulum punctum ſumatur, ab eoq; puncto in circul* *rectarum linearum cadentium, Vna quidem maxima ſit, Vna V* *minima; & reliquarum aliæ ſint inæquales, aliæ æquales: Ma* *ma quidem per centrum tranſibit, minima Verò erit reliqua p* *diametri; & aliarum maiores quidem erunt maximæ propinqu* *res; æquales autem ab eadem maxima, Vel minima æqualiter* *ſtabunt.* Ad propoſ. 7.

6 *SI in ſemidiametro circuli producta punctum Vltra centrum ſ* *matur, circulus ex eo puncto, Vt centro, per extremum ſemidiam* *tri punctum deſcriptus, tanget priorem circulum in dicto punc* *extremo ſemidiametri, totuſque extra eundem cadet.* Ad pro poſ. 13.

7 *RECTA linea à diametri circuli extremitate ad angulos re* *ctos ducta ipſum circulum tangit. Hinc facilè per datum punctum* *in circumferentiam duci poterit linea circulum tangens.* Coroll propoſ. 16.

8 *DIGRESSIO de angulo contactus aduerſus Iacobum Pele* *tarium.* Ad propoſ. 16.

9 *QVOTLIBET anguli contactus æquales ſimul ſumpti, mi* *nores ſunt quouis angulo acuto rectilineo.* Ad propoſ. 16.

10 *ALIQVA quantitas poteſt continuè, & infinitè augeri, altera* *Verò infinitè minui: & tamen augmentum illius, quantumcunq;* *ſit, minus ſemper erit decremento huius.* Ad propoſ. 16.

11 *TRANSITVR à minori ad maius, Vel contrà, & per o* *mnia media: & tamen non per æquale. Item reperitur maius* *hoc, & minus eodem: & tamen non æquale.* Ad propoſ. 16. & 31.

12 *PROPOSITIS duobus circulis, quorum neuter alterum in* *cludat, rectam lineam ducere, quæ Vtrumq; tangat circulum.* Ad propoſ. 17.

13 *PER datum punctum deſcribere circulum, qui alium tangat* *ſiue interius, ſiue exterius.* Ad propoſ. 17.

14 *CIRCVLVM, qui duos alios circulos, quorum Vnus non ſit* *totus intra alium, tangat, deſcribere.* Ad propoſ. 17.

15 *LINEÆ rectæ, quæ circulum ſecet, lineam p rallelam ducere,* *quæ eundem circulum tangat.* Ad propoſ. 17.

16 *DVOBVS circulis ex eodem centro deſcriptis: erunt omnes re* *ctæ lineæ interiorem circulum tangentes, & Vſque ad circumfe*

rentiam

Digitized by Google

tiam exterioris circuli extenſa, inter ſe æquales, bifariamq́; in ipſo contactu mutuo ſecabuntur. Ad propoſ. 18.

q̃ circulo ſpatiũ ad centrum duplex eſt anguli ad peripheriã, ſi fuerit eadem peripheria baſis ſpatij & anguli. Ad propoſ. 20.

Si a duobus punctis quatuor rectæ lineæ ducantur, ex ſingulis binæ, quæ ad eaſdem partes contineant angulos duos æquales: Circulus per duo illa puncta, & alterutrum illorum angulorum deſcriptus, per alterum quoq; angulum tranſibit. Ad propoſ. 21.

19 *SI in quadrilatero anguli qui ex aduerſo duobus rectis ſint æquales: circulus, qui per tres quoſcunq; eius angulos deſcribitur, tranſibit etiam per reliquum quartum angulum; atq; adeò circa ipſum quadrilaterum circulus deſcribi poteſt.* Ad propoſ. 22.

20 *SI ex ſemicirculis, aut circulis, ſegmenta ſimilia detrahantur; reliqua quoq; ſegmenta ſimilia erunt.* Ad propoſ. 22.

21 *ANGVLI inſiſtentes arcubus circulorum ſimilibus ſiue ad centra, ſiue ad circumferentias, ſunt inter ſe æquales. Et contra arcus, quibus anguli æquales ſiue ad centra, ſiue ad circumferentias inſiſtunt, ſimiles ſunt.* Ad propoſ. 22.

22 *SI duo aut plures circuli ex eodem centro deſcribantur atque ex centro duæ, aut plures rectæ lineæ ducantur: erunt arcus inter quaſcunque duas lineas intercepti, ſimiles.* Ad propoſ. 22.

23 *SI duo aut plures circuli ſe mutuò tangant interius in vno puncto, à quo duæ aut plures rectæ educantur: erunt & arcus inter quaſcunq; duas lineas intercepti, & arcus inter quamcunq; lineam, & punctum contactus intercepti, ſimiles.* Ad propoſ. 22.

24 *SI vnum latus quadrilateri in circulo deſcripti producatur, erit angulus externus angulo, qui angulo ei deinceps opponitur, æqualis.* Ad propoſ. 22.

25 *SEGMENTA circulorum æqualia ſuper æquales lineas, vel ſuper eandem conſtituta, ſunt ſimilia.* Ad propoſ. 24.

26 *IN æqualibus circulis inæquales anguli inæqualibus peripherijs inſiſtunt, maior maiori, & minor minori, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant.* Ad propoſ. 26.

27 *IN æqualibus circulis anguli, qui inæqualibus peripherijs inſiſtunt, ſunt inter ſe inæquales, maior, qui maiori, & minor, qui minori, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant.* Ad propoſ. 27.

28 *DVÆ rectæ lineæ, quæ in eodem circulo æquales arcus intercipiunt, ſe mutuò non ſecantes, ſunt parallelæ. Et contra, duæ lineæ parallelæ in eodẽ circulo arcus æquales intercipiunt.* Ad propoſ. 27.

29 *LINEA recta, quæ ex medio puncto peripheriæ alicuius ducitur tangens circulum, parallela eſt rectæ lineæ, quæ peripheriam illam ſubtendit.* Ad propoſ. 27.

30 *ANGVLVS rectus in centro inſiſtit quadranti: acutus verò*

arcui quadrante minori: & obtuſus arcus quadrante ma
Et contrà, angulus in centro quadranti inſiſtens rectus eſt:
ſtens verò arcui quadrante minori, acutus: & arcui quadr
maiori, obtuſus. Ad propoſ.27.

31 *RECTA linea è centro circuli ducta, ſecanſq; aliam re*
non per centrum ductam bifariam, ſecabit & arcum, cui ha
cta ſubtenditur, bifariam. Et contra, ſi ſecet & arcum bifari
ſecabit & rectam ei ſubtenſam bifariam. Ad propoſ.27.

32 *SI in circulo, ductis duabus diametris ſeſe ad angulos recto*
cantibus, altera earum producatur, eiq; ex vna parte quot
parallelæ agantur diuidentes vtrumq; quadrantem in part
quales, ac deniq; ex puncto extremo alterius diametri per extr
punctum proximæ parallelæ recta ducatur conueniens cum dia
tro producta: Erit tota recta inter punctum concurſus, & cen
uam peripheriam circuli, omnibus parallelis vnà cum diame
quæ producta eſt, ſimul ſumptis, æqualis. Ad propoſ. 27.

33 *IN æqualibus circulis inæquales rectæ lineæ inæquales perip*
rias auferunt, maior quidem maiorem, & minor minorem, ſi
quamur de ſegmentis circuli minoribus ſemicirculo: At ver
de ſegmentis circuli maioribus ſermo habeatur, maior minore
& minor maiorem. Ad propoſ 28.

34 *IN æqualibus circulis, inæquales peripherias inæquales re*
lineæ ſubtendunt, maiorem quidem maior, & minorem minor
de ſegmentis ſemicirculo minoribus fiat ſermo: At verò ſi de ſ
gmentis ſemicirculo maioribus loquamur, minorem maior, & ma
iorem minor. Ad propoſ.29.

35 *CIRCVLI, è quibus æquales rectæ lineæ auferunt ſimiles ci*
cumferentias, æquales ſunt. Ad propoſ. 29.

36 *EX circulis inæqualibus æquales rectæ lineæ circumferentias di*
ſimiles auferunt. Ad propoſ.29.

37 *EX circulis inæqualibus lineæ rectæ, quæ circumferentias ſimi-*
les auferunt, inæquales ſunt. Ad propoſ. 29.

38 *RECTÆ lineæ, quæ ex quibuſcunque circulis circumferentia*
ſimiles inæquales auferunt, inæquales ſunt. Ad propoſ.29.

39 *SI in diametro circuli præter centrum punctum ſumatur, a*
eoq; in peripheriam duæ rectæ non in eaſdem partes cadentes eff
ciant ad diametrum angulos æquales: Rectæ illæ lineæ æquales e
runt, & arcus abſcindent æquales. Et ſi lineæ ſint æquales, con-
ſtituent ad diametrum angulos æquales, abſcindentq; æquales
arcus. Si deniq; arcus æquales abſcindant, erunt rectæ illæ æqua-
les, conſtituentq; ad diametrum angulos æquales. Ad propoſ.29.

40 *SI in diametro circuli præter centrum ſumatur punctum quod-*
piam, in quo ad eaſdem partes duo anguli æquales conſtituantur,
inſiſtent

Digitized by Google

ſunt hi anguli arcubus inæqualibus, maiorque erit ille, qui à ... parte diametri remotior eſt. Ad propoſ. 29.

ANGVLVS trianguli, qui reliquis duobus æqualis exiſtit, rectus eſt. Coroll. propoſ. 31.

SEGMENTVM circuli, in quo angulus conſtitutus eſt rectus, eſt ſemicirculus: in quo vero angulus eſt acutus, eſt ſegmentum maius: & in quo angulus eſt obtuſus, eſt ſegmentum minus: & ſegmentum, cuius angulus recto eſt maior, eſt ſemicirculo maius, cuius vero angulus eſt recto minor, eſt vel ſemicirculus, vel ſemicirculo minus. Ad propoſ. 31.

42 SI angulo recto linea recta ſubtenſa, hoc eſt, ſi in triangulo rectangulo latus recto angulo oppoſitum, biſariam ſecetur, & ex puncto diuiſionis circa illam rectam, vel latus illud circulus deſcribatur: tranſibit neceſſariò circulus ille per angulum rectum. Ad propoſ. 31.

43 A dato puncto extra circulum, rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum. Ad propoſ. 31.

44 SI per centrum circuli alius circulus deſcribatur, & per vtriuſque circuli centrum recta eijciatur, à puncto verò, vbi hæc recta a poſteriori circulo ſecatur, ducatur recta vtcunque; ſecabitur eius portio intra priorem circulum à circumferentia poſterioris biſariam. Ad propoſ. 31.

45 QVADRILATERVM in circulo deſcriptum, cuius duo latera oppoſita ſunt parallela, & æqualia, parallelogrammum eſt rectangulum, hoc eſt, vel quadratum, vel altera parte longius. Ad propoſ. 31.

46 SI linea recta ducta ad extremitatem lineæ circulum ſecantis fecerit cum ipſa angulos æquales ijs, qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt, angulis: Linea ducta circulum tanget. Ad propoſ. 32.

47 SI duæ rectæ ita ſe ſecent, vt rectangulum ſub vnius ſegmentis comprehenſum, æquale ſit ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur, rectangulo: deſcribi poterit per quatuor illarum puncta extrema circulus: hoc eſt, circulus per quælibet tria puncta earum extrema deſcriptus, per quartum quoque punctum tranſibit. Ad propoſ. 35.

48 SI à puncto quouis extra circulum aſſumpto plurimæ lineæ rectæ circulum ſecantes ducantur: Rectangula comprehenſa ſub totis lineis, & partibus exterioribus inter ſe ſunt æqualia. Coroll. 1. propoſ. 36.

49 DVÆ rectæ lineæ ab eodem puncto ductæ, quæ circulum tangant, inter ſe ſunt æquales. Coroll. 2. propoſ. 36.

50 AB eodem puncto extra circulum aſſumpto, duci tantum poſſunt duæ lineæ, quæ circulum tangant. Coroll. 3. propoſ. 36

51 SI duæ rectæ æquales ex puncto quopiam in conuexam periphe-

riam incidant, & earum vna circulum tangat, altera quoq;
culum tanget. Coroll. 4. propoſ. 36.

52 SI à puncto aliquo binæ lineæ rectæ finitæ egrediantur, qu
ſecentur in binas partes, vt rectangula ſub totis, & ſegmentis p
punctum comprehenſa ſint æqualia; deſcribi poterit per extr
puncta aliorum ſegmentorum circulus, hoc eſt, circulus per
puncta extrema aliorum ſegmentorum deſcriptus, per quart
etiam punctum extremum tranſibit. Ad propoſ. 36.

53 DATIS duabus rectis ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, al
earum rectam adiungere, vt rectangulum ſub tota compoſita
adiuncta comprehenſum, quadrato alterius ſit æquale. Ad prop

54 SI à puncto extra circulum dato duæ lineæ rectæ circulum t
gentes ducantur, aut duæ lineæ vſque ad conuexam peripheri
inter ſe æquales; Linea recta ab eodem puncto per centrum circ
eiecta angulum ab eis comprehenſum diuidit biſariam. Et conu
Linea recta angulum ab eis comprehenſum diuidens biſaria
per centrum circuli tranſibit. Ad propoſ. 37.

IN QVARTO LIBRO.

1 IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem data r
cta lineæ, quæ circuli diametro non ſit maior, & alteri datæ para
lelam. Ad propoſ. 1.

2 IN omni triangulo, ſi circulus inſcribatur, duo quælibet later
ſuperant reliquum recta linea, cuius quadratum quadruplum e
rectanguli comprehenſi ſub recta ab angulo illis lateribus compre
henſo in cauam peripheriam ducta, & ſub eius ſegmento exterio
re. Quod ſi angulus comprehenſus ſit rectus, ſuperabunt illa du
latera latus recto angulo oppoſitum diametro circuli triangulo in
ſcripti. Ad propoſ. 4.

3 SI circulo circa triangulum deſcripto, centrum intra triangu-
lum cadat, triangulum eſt acutangulum: Si verò in vnum latus
trianguli, rectangulum: Si deniq; extra triangulum obtuſangu-
lum. Coroll. propoſ. 5.

4 CENTRVM circuli circa triangulum acutangulum deſcri-
pti intra triangulum cadit: circa rectangulum verò, in latus re-
cto angulo oppoſitum: circa obtuſangulum deniq;, extra triangu-
lum. Coroll. propoſ. 5.

5 PER data tria puncta non in vna recta linea exiſtentia circu-
lum deſcribere. Ad propoſ. 5.

6 SI circa datum circulum deſcribatur quadratum, & in eodem
circulo quadratum inſcribatur. Erit quadratum circumſcriptum
quadrati inſcripti duplum. Ad propoſ. 9.

7 IN triangulo Iſoſcele, cuius vterq; angulorum æqualium reli-
qui duplus eſt: Angulus æqualibus lateribus comprehenſus, quin-

ta

Digitized by Google

tres eſt duorum rectorũ, vterlibet autem æqualium, duæ quintæ partes. Item ille duas quintas partes vnius recti continet, vterlibet autem horum quatuor quintas partes. Coroll. propoſ. 10.

8 *Si recta linea ſecetur, vt propoſ. 11. lib. 2. traditum eſt: Iſoſceles triangulum, cuius baſis maiori ſegmento æqualis eſt, vtrumuis vero laterum æqualium ipſi datæ lineæ æquale, habet vtrumlibet angulorum æqualium duplum reliqui.* Ad propoſ. 11.

9 *ANGVLVS pentagoni æquilateri, & æquianguli complectitur tres quintas partes duorum rectorum, vel ſex quintas vnius recti.* Coroll. propoſ. 11.

10 *SVPER data recta linea terminata Pentagonum æquilaterum, & æquiangulum conſtituere.* Ad propoſ. 11.

11 *SI in circulo quæcunq; figura æquilatera, & æquiangula deſcribatur, & ad extrema ſemidiametrorum ex centro ad angulos ductarum excitentur lineæ perpendiculares: Hæ perpendiculares conſtituent aliam figuram totidem laterum, & angulorum æqualiũ circulo circumſcriptam.* Coroll. propoſ. 12.

12 *IN figura æquilatera, & æquiangula, ſi quidem angulorum numerus impar eſt: Recta linea ex quouis angulo demiſſa ſecans oppoſitum latus bifariam, diuidit quoq; angulum bifariam: Et contrà, recta linea diuidens angulum bifariam ſecat quoq; latus oppoſitum bifariam. Si verò numerus angulorum eſt par, Recta linea ex quouis angulo ad oppoſitum angulum ducta, ſecat vtrumque angulum bifariam: Et contrà, Recta linea ſecans quemuis angulum bifariam cadit in oppoſitum angulum, eumque bifariam quoque diuidit.* Ad propoſ. 12.

13 *LATVS hexagoni æquale eſt ſemidiametro circuli, in quo deſcribitur.* Coroll. propoſ. 15.

14 *ISOSCELES triangulum oxygonium conſtituere, cuius tertium latus vtroque æqualium maius ſit.* Ad propoſ. 15.

15 *SI in circulo ab eodem puncto inſcribantur duo latera duarum figurarum æquilaterarum, & æquiangularum: Continebit arcus inter illa latera incluſus tot latera alterius figuræ inſcribendæ in eodem circulo, quot vnitatibus inter ſe differunt denominatores earundem laterum. Continebit autem figura inſcribenda tot latera, anguloſq; æquales, quot vnitates ſunt in numero, qui ex multiplicatione denominatorum producitur.* Ad propoſ. 16.

16 *OMNIS figura æquilatera circulo inſcripta, æquiangula quoque eſt: at non omnis figura æquilatera circulo circumſcripta neceſſariò æquiangula quoque eſt, niſi quando numerus angulorum ipſum eſt impar, vel ſi par eſt, quando duo anguli proximi æquales ſunt, vel duo non proximi, dummodo vno eorum primo poſito, alter occupet locum parem quemcunq;, vt quartum ab eo, vel ſextum, octauum, decimum, &c.* Ad propoſ. 16.

17 *OMNIS figura æquiangula circulo circumſcripta, eſt etiam*

æquilatera: at non omnis figura æquiangula circulo inſcripta, ne-ceſſario æquilatera quoque eſt, niſi quando numerus laterum ipſius eſt impar; vel ſi par eſt, quando duo latera proxima æqua-lia ſunt, vel duo non proxima, dummodo vno eorum poſito prim alterum occupet locum parem quemcunque, vt quartum ab e vel ſextum, octauum, decimum, duodecimum, &c. Ad propoſ. 16.

18 IMPARIVM laterum figuræ inſcribuntur in circulo benefici Iſoſcelium triangulorum, quorum anguli æquales ad baſim mul-tiplices ſunt eorum, qui ad verticem ſunt, angulorum. Parium verò laterum figuræ inſcribuntur beneficio triangulorum Iſoſce-lium, quorum anguli ad baſim æquales, multiplices ſeſquialteri ſunt eorum, qui ad verticem ſunt angulorum. Ad propoſ. 16.

19 FIGVRAM quamcunque æquilateram, & æquiangulam in circulo practicè deſcribere, ſine ope triangulorum Iſoſcelium præ-dictorum. Ad propoſ. 16.

20 FIGVRAM quamcunque æquilateram, & æquiangulam ſu-pra datam rectam practicè deſcribere. Ad propoſ. 16.

21 LATERA pentagoni, & decagoni in circulo deſcribendorum, vna eademq́; opera inuenire. Ad propoſ. 16.

22 SI biſariã ſectiones laterum figuræ æquilateræ, & æquiangulæ rectis coniungantur lineis, inſcripta erit figura æquilatera quoq́; & æquiangula totidem laterum in illa figura, idem centrum ha-bens. Ad propoſ. 16.

23 INTER omnes figuras æquilateras, & æquiangulas, ſolum triangulum, quadratum, & hexagonum, locum replere poſſunt. Ad propoſ. 16.

IN QVINTO LIBRO.

1 TRACTATVS de proportionibus, & proportionalitatibus copioſiſſimus. Ad defin. 4.

2 ANGVLVM curuilineum angulo rectilineo exhibere æqua-lem. Ad defin. 5.

3 CVR Euclides in defin. 6. & 8. quatuor magnitudines propor-tionales, & non proportionales, per earum æquè multiplicia defi-nierit. Ad defin. 8.

4 NVMERVS integer cum fractione in ſe multiplicatus pro-ducit neceſſario numerum integrum cum fractione. Ad defin. 8.

5 SI quatuor magnitudines fuerint proportionales, & conuertẽn-do proportionales erunt. Coroll propoſ. 4.

6 ÆQVALES magnitudines ad æquales eandem habent ra-tionem. Ad propoſ. 7.

7 QVÆ eidem ſunt eadem rationes, & inter ſe ſunt eædem. Ad propoſ. 11.

Digitized by Google

8 *prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia verò ad quartam, minorem rationem habuerit quam quinta ad ſextum: Prima quoque ad ſecundam, minorem rationem habebit, quam quinta ad ſextum.* Ad propoſ. 13.

9 *prima ad ſecundam maiorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, tertia autem ad quartam maiorem habuerit quam quinta ad ſextum: Prima quoque ad ſecundam multo magis maiorem rationem habebit quam quinta ad ſextum.* Ad propoſ. 13.

10 *SI prima ad ſecundam minorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam minorem habuerit, quam quinta ad ſextum: Prima quoq; ad ſecundam multo magis minorem rationem habebit, quã quinta ad ſextum.* Ad propoſ. 13.

11 *SI compoſitæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque per Diuiſionem rationis conuerſam proportionales erunt.* Ad propoſ. 17.

12 *SI compoſitæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque per Diuiſionem rationis contrariam proportionales erunt.* Ad propoſ. 17.

13 *SI diuiſæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque per compoſitionem rationis conuerſam proportionales erunt.* Ad propoſ. 18.

14 *SI diuiſæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque per compoſitionem rationis contrariam proportionales erunt.* Ad propoſ. 18.

15 *SI quatuor magnitudines fuerint proportionales: Et quoque per conuerſionem rationis proportionales erunt.* Coroll. propoſ. 19.

16 *SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam: Habebunt etiam æquè multiplices prima ac tertia ad ſecundam, & quartam, eandem rationem: Item æquè multiplices ſecunda & quarta ad primam, & tertiam, eandem rationem habebunt. Et contra, eandem rationem habebunt ſecunda & quarta ad æquè multiplices prima & tertia: Item prima ac tertia ad æquè multiplices ſecunda & quarta, rationem habebunt eandem.* Ad propoſ. 22.

17 *SI duæ magnitudines ad duas magnitudines eandem habeant proportionem, & detractæ quædam habeant ad eaſdem eandem proportionem: Et reliquæ ad eaſdem eandem proportionem habebunt.* Ad propoſ. 24.

18 *SI tres magnitudines fuerint proportionales: Maxima & minima maiores erunt, quam dupla reliqua.* Ad propoſ. 25.

19 *SI prima ad ſecundam habuerit minorem proportionem, quam tertia ad quartam, habebit conuertendo ſecunda ad primam maiorem proportionem, quam quarta ad tertiam.* Ad propoſ. 26.

Digitized by Google

20 *SI prima ad ſecundam habuerit minorem proportionem, qu tertia ad quartam: habebit quoq; viciſſim prima ad tertiam, norem proportionem, quam ſecunda ad quartam.* Ad propoſ.

21 *SI prima ad ſecundam habuerit minorem proportionem qu tertia ad quartam: habebit quoque compoſita prima cum ſecun ad ſecundam, minorem proportionem, quam compoſita tertia cu quarta ad quartam.* Ad propoſ. 28.

22 *SI compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam habuerit min rem proportionem, quam compoſita tertia cum quarta ad qua tam, habebit quoque diuidendo prima ad ſecundam minorem pr portionem, quam tertia ad quartam.* Ad propoſ. 29.

23 *SI compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam habuerit mino rem proportionem, quam compoſita tertia cum quarta ad quar tam: habebit per conuerſionem rationis prima cum ſecunda a primam, maiorem proportionem, quam tertia cum quarta, ad tertiam.* Ad propoſ. 30.

24 *SI ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitque minor proportio prima priorum ad ſecundam, quam prima poſteriorum ad ſecundam: Item ſecunda priorum ad tertiam minor, quam ſecunda poſteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate, minor proportio prima priorum ad tertiam, quam prima poſteriorum ad tertiam.* Ad propoſ. 31.

25 *SI ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitque minor proportio prima priorum ad ſecundam, quam ſecunda poſteriorum ad tertiam; Item ſecunda priorum ad tertiam minor, quam prima poſteriorum ad ſecundam: Erit quoque ex æqualitate, minor proportio prima priorum ad tertiam, quam prima poſteriorum ad tertiam.* Ad propoſ. 32.

26 *SI fuerit minor proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum minor proportio quam totius ad totum.* Ad propoſ. 33.

IN SEXTO LIBRO.

1 *PROPOSITIS quotcunque quantitatibus, proportio primæ ad vltimam componitur ex proportionibus omnibus intermediis.* Ad defin. 5.

2 *TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita ſe habent inter ſe, vt baſes, æquales habent altitudines, vel eandem.* Ad propoſ. 1.

3 *TRIANGVLA, & parallelogramma, quorum æquales ſunt baſes, vel eadem, ita ſe habent inter ſe, vt altitudines.* Ad propoſ. 1.

Digitized by Google

4 *TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita ſe habent inter ſe, vt altitudines: æquales habent baſes, ſi vnam & eandem non habeant.* Ad propoſ.1.

5 *LINEA recta, quæ parallela ducitur vni lateri in triangulo, aufert triangulum toti triangulo ſimile.* Coroll. propoſ.4.

6 *SI ex duobus punctis cuiuſuis rectæ, quorum alterum ſit extremum, alterum verò intra lineam, duæ parallelæ inter ſe ad eaſdem partes educantur, ita vt proportionem habeant eandem, quam recta inter ipſas, & alterum extremum punctum incluſa: Recta coniungens extremum vnius earum cum extremo prioris lineæ, tranſibit per extremum alterius lineæ.* Ad propoſ. 4.

7 *SI ex duobus punctis cuiuſuis rectæ duæ parallelæ educantur in diuerſas partes, habentes eandem proportionem, quam ſegmenta rectæ inter parallelas contermina, & aliquod idem punctum intra datam rectam: Recta coniungens extrema puncta parallelarum tranſibit per dictum punctum intra rectam.* Ad propoſ. 4.

8 *SI in triangulo quouis vni lateri parallela recta agatur, & ex quocunque puncto illius lateris ad angulum oppoſitum recta educatur linea: diuidentur lineæ parallela, & latus illud in eaſdem rationes.* Ad propoſ.4.

9 *RECTA perpendicularis, quæ in rectangulo triangulo ab angulo recto in baſim demittitur, eſt media proportionalis inter duo baſis ſegmenta: Item latus vtrumlibet angulum rectum ambiens, medium proportionale eſt inter totam baſim, & illud ſegmentum baſis, quod dicto lateri adiacet.* Coroll. propoſ.8.

10 *DATAM rectam lineam in partes quotcunque æquales diuidere.* Ad propoſ.10.

11 *DATAM rectam ſecare in duas partes, quæ habeant proportionem quamcunque datam.* Ad propoſ.10.

12 *SI duæ rectæ lineæ ſecentur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoque intermediæ ſectiones in eadem proportione cum quibuslibet ſegmentis duobus.* Ad propoſ.10.

13 *SI linea recta ſit ſecta in quotcunque partes Arithmetice proportionales, & alia recta ſecetur in totidem partes, quæ eaſdem inter ſe, quas illa, proportiones habeant: Erunt quoque partes huius lineæ Arithmetice proportionales.* Ad propoſ.10.

14 *SI duæ lineæ inæquales ad alias duas eandem habeant proportionem, minor ad minorem, & maior ad maiorem: Erit quoque exceſſus priorum ad exceſſum poſteriorum, vt priorum linearum vna ad vnam poſteriorum.* Ad propoſ. 10.

15 *LINEAM rectam datam, vel numerum, in quotuis partes Arithmetice proportionales ſecare.* Ad propoſ. 10.

16 *QVOTLIBET lineas continuè proportionales in data ratione inuenire.* Ad propoſ. 11.

17 *IN-*

Digitized by Google

17 *INTER duas rectas, duas medias proportionales practice inue-nire.* Ad propoſ. 11.

18 *DATIS duabus rectis lineis, duas alias in eadem cum illis pro-portione inuenire.* Ad propoſ. 12.

19 *TRIBVS datis rectis lineis, quartam inuenire, quæ ſit ad ter-tiam, Vt prima ad ſecundam.* Ad propoſ. 12.

20 *RECTA linea, quæ in circulo à quouis puncto diametri ipſi diametro perpendicularis ducitur ad circumferentiam Vſque, me-dia eſt proportionalis inter duo diametri ſegmenta, quæ à perpen-diculari facta ſunt.* Ad propoſ. 13.

21 *DATA recta linea, aliam rectam (quæ minor non ſit, quam du-pla illius) ita ſecare, Vt data recta ſit media proportionalis inter ſegmenta huius.* Ad propoſ. 13.

22 *RECTA linea qualibet eſt media proportionalis inter quaſuis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato il-lius æquale.* Ad propoſ. 17.

23 *SECTA linea recta in duas partes Vtcunque, alterutram ea-rum ita rurſus partiri in duas partes, Vt omnes tres partes ſint con-tinuè proportionales.* Ad propoſ. 17.

24 *DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Arith-metica proportionalitate inuenire.* Ad propoſ. 17.

25 *DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Arith-metica proportionalitate inuenire.* Ad propoſ. 17.

26 *DATIS duabus rectis lineis, maiorem extremitatem in propor-tionalitate Arithmetica inuenire.* Ad propoſ. 17.

27 *DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Geo-metrica proportionalitate inuenire, aliter, quam propoſ. 13. factum eſt.* Ad propoſ. 17.

28 *DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in propor-tionalitate Geometrica inuenire, aliter, quam propoſ. 11. factum eſt.* Ad propoſ. 17.

29 *DATIS duabus rectis lineis, maiorem extremitatem in pro-portionalitate Geometrica inuenire, aliter, quam propoſ. 11. factum eſt.* Ad propoſ. 17.

30 *DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Har-monica proportionalitate inuenire.* Ad propoſ. 17.

31 *DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Har-monica Medietate inuenire.* Ad propoſ. 17.

32 *DATIS duabus rectis lineis, maiorem extremitatem in propor-tionalitate Harmonica inuenire.* Ad propoſ. 17.

33 *QVANDO duo numeri proportionem habent dupla maiorem, non poteſt illis adiungi tertius maior in proportionalitate Harmo-nica.* Ad propoſ. 17.

34 *EX datis quibuſuis duobus numeris, tres numeros Harmonica propor-*

Digitized by Google

portionales, quorum extremi eandem proportionem habeant, cum dati duo numeri, reperire. Ad propoſ.17.

35 *TRES numeros Harmonice proportionales inuenire, quorum extremi proportionem habeant datam, & medius ſit dato numero æqualis.* Ad propoſ.17.

36 *DATIS duobus numeris, medium Harmonice proportionalem inuenire.* Ad propoſ.17.

37 *DATIS duobus numeris, minorem extremum in proportionalitate Harmonica inuenire.* Ad propoſ.17.

38 *DATIS duobus numeris, maiorem extremum in Harmonica proportionalitate inuenire.* Ad propoſ.17.

39 *PROPOSITIS tribus terminis Geometrice proportionalibus ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus: Summa ex primo ſemel, ſecundo bis, & tertio ſemel collecta; ac ſumma conflata ex ſecundo & tertio ſemel; ac tertius ſemel, ſunt Geometrice proportionales.* Ad propoſ.17.

40 *PROPOSITIS tribus terminis ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, Geometrice proportionalibus: Summa ex primo bis, ſecundo bis, & tertio ſemel collecta; ac ſumma ex primo, ſecundo, & tertio ſemel conflata; ac denique tertius ſemel, ſunt Arithmetice proportionales.* Ad propoſ. 17.

41 *PROPOSITIS tribus terminis ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, Geometrice proportionalibus: Summa collecta ex primo bis, ex ſecundo ter, & tertio ſemel; ac ſumma conflata ex ſecundo bis, & tertio ſemel; & denique ſumma ex ſecundo ſemel, & tertio ſemel coaceruata, Harmonice proportionales ſunt.* Ad propoſ.17.

42 *A data recta linea dato rectilineo ſimile ſimiliterque poſitum rectilineum deſcribere, expeditius, quam ab Euclide factum eſt.* Ad propoſ.18.

43 *SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: erit vt prima ad tertiam, ita triangulum ſuper primam deſcriptum ad triangulum ſuper ſecundam ſimile, ſimiliterque deſcriptum: Item ita triangulum ſuper ſecundam ad triangulum ſuper tertiam ſimile, ſimiliterque deſcriptum.* Coroll. propoſ.19.

44 *SI fuerint tres rectæ lineæ proportionales: erit vt prima ad tertiam, ita polygonum ſuper primam deſcriptum ad polygonum ſuper ſecundam ſimiliterque deſcriptum: Item ita polygonum ſuper ſecundam ad polygonum ſuper tertiam ſimile, ſimiliterque deſcriptum.* Coroll. propoſ.20.

45 *POLYGONA ſimilia, æquilatera & æquiangula diuiduntur in ſimilia triangula, & numero æqualia, ductis è centris circulorum ipſa circumſcribentium ad omnes angulos rectis lineis.* Ad propoſ.20.

46 *SI linea recta dupla fuerit lineæ rectæ, quadratum illius quadruplum erit*

Digitized by Google

plum erit quadrati huius. Et contra, ſi quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum erit lateris huius. Ad propoſ. 20.

47 *ÆQVALIA rectilinea ſimilia, ſimiliterque deſcripta, conſtituta ſunt ſuper æquales rectas lineas.* Ad propoſ. 22.

48 *SI fuerint tres rectæ lineæ proportionales: erunt & rectilinea ſimilia, ſimiliterque deſcripta ab eis, proportionalia. Et ſi à tribus rectis lineis ſimilia ſimiliterque deſcripta rectilinea proportionalia fuerint: ipſæ etiam rectæ proportionales erunt.* Ad propoſ. 22.

49 *TRIANGVLA, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habent: proportionem habent ex lateribus æqualem angulum comprehendentibus compoſitam.* Ad propoſ. 23.

50 *PROPORTIONEM ex duabus proportionibus, vel pluribus componere.* Ad propoſ. 23.

51 *PROPORTIONEM minorem ex minore auferre.* Ad propoſ. 23.

52 *TRIANGVLA, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habent eandem proportionem habent, quam rectangula, quæ ſub lateribus æqualem angulum comprehendentibus continentur.* Ad propoſ. 23.

53 *PARALLELOGRAMMA inter ſe æquiangula, eandem habent proportionem, quam rectangula ſub lateribus ipſorum æqualem angulum continentibus comprehenſa.* Ad propoſ. 23.

54 *TRIANGVLA & parallelogramma in ſe proportionem habent compoſitam ex proportione baſium, & proportione altitudinum.* Ad propoſ. 23.

55 *DATIS duobus parallelogrammis æquiangulis, ſed non ſimilibus: ex quouis illorum alteri ſimile reſecare.* Ad propoſ. 24.

56 *DATO parallelogrammo, deſcribere aliud maius, aut minus ſimile illi, ſimiliterque deſcriptum.* Ad propoſ. 24.

57 *SI ad rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens quadrato: ipſum applicatum æquale eſt rectangulo quod ſub ſegmentis lineæ per applicationem factis continetur.* Ad propoſ. 28.

58 *SI figura, quæ ab vno laterum trianguli deſcribitur, æqualis ſit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus deſcribuntur, figuris ſimilibus, ſimiliterque poſitis: Angulus comprehenſus ſub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus eſt.* Ad propoſ. 31.

59 *SECTOR ad ſectorem eſt, vt angulus ad angulum.* Coroll. 1. propoſ. 33.

60 *ANGVLVS in centro circuli ita eſt ad quatuor rectos, vt arcus illi ſubtenſus ad totam circumferentiam. Et contra. Ita ſe habent quatuor recti ad angulum in centro, vt tota circumferentia ad arcum illi angulo ſubtenſum.* Coroll. 2. propoſ. 33.

61 *SIMILIA circulorum ſegmenta, hoc eſt, in quibus anguli ſunt æquales,*

Digitized by Google

ales, eandem proportionem habent ad integras circumferentias ſuorum. Ad propoſ.33.

62 · *duo aut plures circuli ex eodem centro deſcribantur, atque ex eo duæ, aut plures rectæ lineæ ducantur: erunt arcus inter quaſcunque duas lineas intercepti, ſimiles.* Ad propoſ.33.

63 *ÆQVALES rectæ lineæ ex circulis inæqualibus auferunt arcus inæquales, maiorq; eſt arcus minoris circuli, & etiam maior, quam ut ſimilis ſit arcui circuli maioris.* Ad propoſ.33.

64 *A dato rectilineo imperatam partem auferre, ita tamen, ut & ablatum, & id, quod relinquitur, ſimile ſit cuiuis rectilineo dato, ſimiliterque poſitum.* Ad propoſ.33.

65 *DVOBVS datis rectilineis, tertium proportionale inuenire.* Ad propoſ.33.

66 *TRIBVS datis rectilineis, quartum proportionale inuenire.* Ad propoſ.33.

67 *DVOBVS datis rectilineis, medium proportionale inuenire.* Ad propoſ.33.

68 *DATO rectilineo duo rectilinea æqualia conſtituere, quæ ſimilia ſint, ſimiliterque deſcripta cuicunque rectilineo, habeantque inter ſe proportionem propoſitam quamcunque.* Ad propoſ.33.

69 *DATO rectilineo duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuiuis rectilineo ſimilia ſint, ſimiliterque deſcripta, lateraque eorum homologa habeant inter ſe proportionem datam.* Ad propoſ.33.

70 *DVOBVS datis rectilineis æquale rectilineum conſtituere, quod ſimile ſit, ſimiliterque poſitum cuiuis rectilineo dato.* Ad propoſ.33.

71 *SI in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecuerint: Erunt ſegmenta unius ſegmentis alterius reciproca* Ad propoſ.33.

72 *SI extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ circulum ſecantes: Erunt tota, & ſegmenta extra circulum reciproca. Quod ſi ab eodem puncto linea ducatur, quæ circulum tangat: Erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectam, quæ circulum ſecet, & eius ſegmentum externum.* Ad propoſ.33.

73 *SI duæ rectæ lineæ ſeſe mutuò ſecuerint, & à duobus earum terminis perpendiculares ſibi mutuo demittantur: Erunt duæ lineæ, quarum una inter unum terminorum & ſectionem, altera verò inter ſectionem, & prioris lineæ aſſumptæ perpendicularis interiicitur, aliis duabus eodem modo incluſis reciproca.* Ad propoſ.33.

74 *IN parallelogrammo duæ rectæ lateribus parallelæ ſe mutuò ſecantes, diuidunt parallelogrammum in quatuor parallelogramma proportionalia.* Ad propoſ.33.

75 *OMNE quadrilaterum à duabus diametris ſe mutuò ſecantibus diuiditur in quatuor triangula proportionalia.* Ad propoſ.33.

76 IN

Digitized by Google

76 *IN triangulo rectangulo, in quo perpendicularis ab angulo re demiſſa ſecat baſem extrema ac media ratione, tria latera ſu continuè proportionalia. Et ſi tria latera trianguli rectanguli ſu continuè proportionalia, perpendicularis ad baſem ex angulo re demiſſa ſecat baſem extrema ac media ratione.* Ad propoſ. 33.

77 *A dato puncto in latere trianguli lineam rectam ducere, q triangulum diuidat in duo ſegmenta ſecundum proportionem d tam.* Ad propoſ. 33.

78 *IMPERATAM partem ex triangulo auferre per lineam r ctam, quæ à quouis dato puncto lateris ducitur.* Ad propoſ. 33.

79 *DATO rectilineo ſimile ſimiliterque poſitum rectilineum d ſcribere, maius vel minus, ſecundum proportionem datam.* A propoſ. 33.

80 *IN dato triangulo quocunque quadratum deſcribere.* Ad pro poſ. 33.

81 *INTRA datum quadratum, aliud quadratum deſcribere i data proportione. Oportet autem datam proportionem dupla no eſſe maiorem.* Ad propoſ. 33.

82 *SI ad diametrum circuli in extremis punctis duæ perpendiculare excitentur, & ab eiſdem extremis per vnum idemque punctum cir cumferentiæ, duæ aliæ rectæ circulum ſecantes ducantur, occurren tes duabus perpendicularibus: Erit rectangulum comprehenſum ſub vtralibet ſecantium, & eius ſegmento interiore, quadrato dia metri æquale.* Ad propoſ. 33.

83 *SI in circulo duæ diametri ſeſe ad rectos angulos ſecent, & ab vnius extremo puncto recta ducatur vtcunque ſecans circumfe rentiam, & alteram diametrum ſiue productam, ſiue non produ ctam: Erit rectangulum comprehenſum ſub duobus ſegmentis huius lineæ ductæ, quorum vnum inter extremum punctum prioris diametri, & ſecundam diametrum, alterum verò inter idem pun ctum extremum, & circumferentiam interiicitur, æquale quadra to intra circulum deſcripto.*

VEL VNIVERSALIVS.

SI in circulo à quouis puncto diametri ad diametrum perpendicu laris excitetur, ad quam ex alterutro terminorum diametri duæ rectæ ducantur, vna ad eius interſectionem in circumferentia, al tera verò vt libet, ſecans circumferentiam in alio puncto: Erit re ctangulum ſub ſegmentis huius poſterioris lineæ, quorum vnum ſit inter prædictum terminum, & perpendicularem, alterum verò in ter eundem terminum, & circumferentiam, æquale quadrato prioris rectæ inter eundem terminum, & circumferentiam, ſeu per pendicularem interceptæ. Ad propoſ. 33.

84 *DATO circulo, & duobus punctis ſiue extra circulum, ſiue in tra, dum-*

Digitized by Google

inde eo modo neutrum ſit in circumferentia: per ea puncta duas duci ducere ad aliquod vnum punctum circumferentiæ, ita vt rectæ coniungentes duo puncta, quibus duæ illæ rectæ circumferentiam tangunt, parallela ſit rectæ data duo puncta connectenti. Ad propoſ. 33.

85 *QVADRATRICEM lineam deſcribere.* Ad finem lib. 6.

86 *SI ex centro per quæuis puncta lineæ Quadratricis rectæ ducantur vſque ad circumferentiam Quadrantis ex eodem centro deſcripti, & ex eiſdem punctis ad baſim demittantur perpendiculares, & alia recta eidem baſi parallela: Erunt arcus Quadrantis inter ſemidiametros intercepti, perpendicularibus; vel ſegmentis ſemidiametri inter parallelas poſitis, proportionales.* Ad finem lib. 6.

87 *DATVM arcum circuli in datam proportionem diuidere.* Ad finem lib. 6.

88 *ANGVLVM quemuis rectilineum in duos angulos datam habentes proportionem partiri: atque adeo & quemlibet arcum, & angulum in quotuis partes æquales diſtribuere.* Ad finem lib. 6.

89 *ISOSCELES triangulum conſtituere, cuius vterque angulorum æqualium ad reliquum habeat proportionem datam.* Ad finem lib. 6.

90 *OMNES figuras æquilateras in circulo deſcribere.* Ad finem lib. 6.

91 *SI Quadrantis, & Quadratricis idem centrum ſit: erunt arcus Quadrantis, ſemidiameter, & baſis Quadratricis, continuè proportionales.* Ad finem lib. 6.

92 *RECTAM cuilibet arcui circuli, ex quo Quadratrix deſcripta eſt, æqualem reperire.* Ad finem lib. 6.

93 *SI baſis Quadratricis ſtatuatur ſemidiameter alicuius circuli: Erit eius latus Quadranti eiuſdem circuli æqualis.* Ad finem lib. 6.

94 *SI duæ rectæ eandem proportionem habeant, quam baſis Quadratricis ad eius latus, minor autem fiat ſemidiameter alicuius circuli; erit maior æqualis Quadranti eiuſdem circuli.* Ad finem lib. 6.

95 *DATO circulo quadratum æquale conſtituere.* Ad finem lib. 6.

96 *DATO quadrato circulum æqualem deſcribere.* Ad finem lib. 6.

97 *RECTILINEO cuicunque circulum æqualem: Et circulo figuram rectilineam æqualem conſtituere, quæ dato rectilineo cuicunque ſimilis ſit, & ſimiliter deſcripta.* Ad finem lib. 6.

98 *DATÆ rectæ lineæ circumferentiam circuli reperire æqualem.* Ad finem lib. 6.

99 *DATIS duobus circulis inæqualibus, datoque arcu in vno eorum: ex*

Digitized by Google

rum: ex altero arcum æqualem abſcindere. Oportet autem arc
in maiore circulo datum non eſſe maiorem circumferentiæ mino
ris circuli. Ad finem lib. 6.

IN SEPTIMO LIBRO.

1 *SI duobus numeris inter ſe primis propoſitis, detrahatur ſe*
per minor de maiore, alterna quadam detractione: nunquam r
liquus metietur præcedentem, quoad aſſumpta ſit vnitas. Ad pr
poſ. 1.

2 *SI propoſitis duobus numeris inter ſe compoſitis, detrahatur ſe*
per minor de maiore, alterna quadam detractione: Detractio a
vnitatem vſque non perueniet, ſed ad numerum, qui præcedente
detractum metiatur. Ad propoſ. 1.

3 *NVMERVS duos numeros metiens, metitur quoq; maxima*
eorum menſuram communem. Coroll. propoſ. 2.

4 *PROPOSITIS duobus, aut pluribus numeris, explorare, a*
ſint inter ſe primi, nec ne. Ad propoſ. 2.

5 *NVMERVS tres numeros, vel plures metiens, metitur quoqu*
maximam eorum menſuram communem. Ad propoſ. 3.

6 *SI vnitas numeri pars fuerit, & altera vnitas, vel numerus al*
tertius numeri eadem pars: Et ſimul vtraque vnitas, vel vnitas, &
numerus ſimul, vtriuſque numeri ſimul eadem pars erit, quæ vni
tas numeri. Ad propoſ. 5.

7 *SI ſint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium*
numero, ſinguli ſingulorum eadem pars: Et omnes omnium ſimul
eadem pars erunt, quæ vnus vnius. Ad propoſ. 5.

8 *SI ſint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium*
numero, ſinguli ſingulorum æquè multiplices: quam multiplex eſt
vnius vnus numerus, tam multiplices erunt & omnes omnium.
Ad propoſ. 5.

9 *SI ſint quotcunque numeri quotcunque numerorum, ſinguli ſin-*
gulorum, eadem partes: Et omnes omnium ſimul eadem partes
erunt, quæ vnus vnius. Ad propoſ. 6.

10 *SI numerus numeri æquè fuerit multiplex, atque ablatus abla-*
ti: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius. Ad
propoſ. 7.

11 *SI primus ſecundum æqualiter contineat, atq; tertius quartum,*
eandemque inſuper partem, vel partes: Erit è contrario ſecundus
primi eadem partes, quæ quartus tertij. Et ſi fuerit primus ſecundi
eadem partes quæ tertius quarti: Continebit è contrario ſecundus
primum æqualiter, atque quartus tertium, eandemque inſuper
partem vel partes. Ad propoſ. 11.

12 *QVÆ*

Digitized by Google

12 *Æ proportiones numerorum eidem proportioni eadem ſunt, inter ſe quoque ſunt eadem.* Ad propoſ. 14.

13 *SI numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent: Habebunt producti numeri eaſdem rationes, quas numeri multiplicati, vel multiplicantes.* Ad propoſ. 18.

14 *SI maior fuerit proportio primi ad ſecundum, quam tertij ad quartum: qui ex primo & quarto fit, numerus, maior erit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero. Et ſi, qui ex primo & quarto fit numerus, maior fuerit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero: maior erit proportio primi ad ſecundum, quam tertij ad quartum.* Ad propoſ. 19.

15 *SI maior fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertium: maior fiet numerus ex primo in tertium, quam ex ſecundo in ſe. Et ſi maior numerus fiat ex primo in tertium quam ex ſecundo in ſe: maior erit proportio primi ad ſecundum, quam ſecundi ad tertium.* Ad propoſ. 20.

16 *QVOTLIBET numeri minimi in continuatione ſuarum proportionum, ſiue eadem ſint, ſiue diuerſa proportiones, metiuntur æque totidem alios numeros, qui eaſdem cum eis proportiones habent, primus primum, ſecundus ſecundum, tertius tertium, &c.* Ad propoſ. 21.

17 *SI quatuor numeri proportionales ſint: Et conuertendo proportionales erunt.* Ad propoſ. 22.

18 *SI compoſiti numeri proportionales ſint: Hi quoque diuiſi proportionales erunt* Ad propoſ. 22.

19 *SI diuiſi numeri proportionales ſint: Hi quoque compoſiti proportionales erunt.* Ad propoſ. 22.

20 *SI compoſiti numeri proportionales ſint: Hi quoque per conuerſionem rationis proportionales erunt.* Ad propoſ. 22.

21 *SI primus ad ſecundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & quintus ad ſecundum eandem rationem, quam ſextus ad quartum: Etiam compoſitus primus cum quinto ad ſecundum eandem habebit rationem, quam tertius cum ſexto ad quartum.* Ad propoſ. 22.

22 *SI duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eoſdem eandem: Et reliqui ad eoſdem eandem rationem habent.* Ad propoſ. 22.

23 *SI primus ad ſecundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum, habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad ſextum: Etiam primus ad compoſitum ſecundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum ſexto,* Ad propoſ. 22.

24 *SI quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, quas*

Digitized by Google

alij illis multitudine æquales ad quendam alium eundem: Hab- bunt quoque illi omnes ſimul ad eundem, proportionem, quam a- omnes hi ſimul ad alium illum eundem. Et ſi idem numerus a- quotcunque numeros proportiones habuerit, quas idem alius nu- merus ad alios multitudine illis æquales: Habebit quoque idem numerus ad omnes illos ſimul proportionem, quam idem alius numerus ad hos omnes ſimul. Ad propoſ. 22.

25 *QVOTCVNQVE numeri inter ſe primi, minimi ſunt in continuatione ſuarum proportionum. Et quotcunque numeri in continuatione ſuarum proportionum minimi, ſunt inter ſe primi.* A propoſ. 24.

26 *NVMERVS, qui ex duobus compoſitus ad vnum illorum primus eſt, ad reliquum quoque eſt primus.* Ad propoſ. 30.

27 *SI duo numeri ſeſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem, genitum autem ex ipſis metiatur aliquis non primus numerus, ve certè ad ipſum ſit compoſitus: is etiam ad vnum eorum, qui in principio, compoſitus erit.* Ad propoſ. 32.

28 *MAXIMA menſura quotlibet numerorum metitur ipſos per numeros, qui minimi ſunt eandem proportionem cum ipſis habentium.* Coroll. propoſ. 35.

29 *DVOS minimos numeros inuenire, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunque numeri dati continuè proportionales.* Ad propoſ. 35.

30 *SI duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, vel minor maiorem, producitur minimus numerus, quem illi metiantur.* Coroll. propoſ. 36.

31 *SI tres, vel plures numeri numerum quempiam metiantur: metietur quoque eundem minimus numerus, quem illi metiantur.* Coroll propoſ. 38.

32 *MINIMVS numerus, quem quotlibet numeri metiuntur, minimus eſt, habens partes à numeris metientibus denominatas.* Ad propoſ. 41.

33 *NVMERVM reperire, qui minimus cum ſit, habeat datas partes, hac lege, vt qualibet pars ſubſequentem partem contineat.* Ad propoſ. 41.

IN OCTAVO LIBRO.

1 *SI tres numeri minimi ſint continuè proportionales: erunt extremi eorum quadrati: Si autem fuerint quatuor, erunt cubi, &c.* Coroll 1 propoſ. 2.

2 *EXTREMI numeri proportionalium quotcunque ſecundum doctrinam propoſ. 2. inuentorum, in data ratione minimorum, inter ſe primi ſunt.* Coroll. 2. propoſ. 2.

3 *DVO*

3 *VO numeri minimi in data ratione, metiuntur omnes medios quocunque minimorum in eadem ratione.* Coroll.3. propoſ.2.

4 *SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundi non ſit multiplex: neque alius quiſquam vllius multiplex erit.* Ad propoſ.6.

5 *SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus verò ſecundum metiatur: & quicunque alius quemlibet ſequentium metietur. Si primus autem ſecundi ſit multiplex: & quicunque alius cuiuslibet ſequentium multiplex erit.* Ad propoſ.6.

6 *SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quiſquam nullum à ſecundo metiatur: neque primus ſecundum metietur. Et ſi primus, vel alius quiſquam nullius à ſecundo ſit multiplex: neque primus ſecundi multiplex erit.* Ad propoſ.6.

7 *SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quiſquam quemlibet à ſecundo metiatur: metietur & primus ſecundum. Et ſi primus, vel alius quiſquam cuiuslibet à ſecundo ſit multiplex: primus quoque ſecundi multiplex erit.* Ad propoſ.7.

8 *INTER numeros duplæ proportionis, vel ſuperparticularis, vel ſuperbipartientis, non poteſt cadere numerus medius proportionalis.* Ad propoſ. 8.

9 *MVSICVM interuallum, quod Diapaſon appellatur, bifariam ſecari non poteſt in duas proportiones æquales. quod etiam de Tono dicendum eſt.* Ad propoſ. 8.

10 *DIAMETER quadrati cuiuſuis lateri eiuſdem eſt incommenſurabilis.* Ad propoſ.8.

11 *SI numerus ſeipſum multiplicans aliquem fecerit, & rurſum multiplicet productum, & ſic deinceps: erunt omnes producti continuè proportionales ab vnitate.* Ad propoſ.9.

12 *SI quotquot numeri fuerint ab vnitate continuè proportionales: ſecundus ab vnitate in ſe multiplicatus producit tertium, & ex eodem in hunc fit quartus, & ex eodem in hunc quintus, & ſic de ceteris.* Ad propoſ.10.

13 *SI ſint ab vnitate duo ordines numerorum continuè proportionalium, & multitudine æqualium: habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatam eius, quam habent ſecundi ab vnitate; quarti verò eiuſdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & ſemper deinceps vno amplius.* Ad propoſ.10.

14 *SI ſint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continuè proportionalium, & multitudine æqualium; Habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent ſecundi ab eodem; quarti verò eiuſdem triplicatam, &c.* Ad propoſ.10.

15 *SI inter duos numeros, & aliquem alium numerum aſſumptum, conti-*

Digitized by Google

continuè proportionales ceciderint numeri: quot inter vtrumq ipſorum, & aſſumptum, deinceps medij continua proportione c dunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent. Ad propoſ. 10.

16 *INTER duos quadratos numeros cadit numerus medius pr portionalis in continua proportione lateris ad latus.* Ad propoſ. 1

17 *NVMERVS medius proportionalis inter duos quadratos, & vterius ipſorum quadratorum, compoſiti inter ſe ſunt.* Ad pro poſ. 11.

18 *INTER duos cubos cadunt duo numeri medij proportionales i continua proportione lateris ad latus.* Ad propoſ. 12.

19 *DVO numeri medij proportionales inter duos cubos, & vteru ipſorum cuborum, inter ſe compoſiti ſunt.* Ad propoſ. 12.

20 *SI quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi ſit multiplex: & vnius latus lateris alterius multiplex erit. Et ſi vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius ſit multiplex: & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si vero quadratus quadrati, & cubus cubi non ſit multiplex: neque latus lateris erit multiplex. Et ſi latus lateris non ſit multiplex: neque quadratus quadrati, neque cubus cubi erit multiplex.* Ad propoſ. 17.

21 *INTER duos ſimiles planos cadit medius proportionalis in ratione laterum homologorum, per quæ medius proportionalis inquiritur.* Ad propoſ. 18.

22 *NVMERVS medius proportionalis inter duos planos ſimiles, & vterus ipſorum planorum, ſunt inter ſe compoſiti.* Ad propoſ. 18.

23 *INTER duos ſimiles ſolidos cadunt duo medij proportionales in proportione laterum homologorum, per quæ medij proportionales inquiruntur.* Ad propoſ. 19.

24 *DVO numeri medij proportionales inter duos ſolides ſimiles, & vterus ipſorum ſolidorum, inter ſe ſunt compoſiti.* Ad propoſ. 19.

25 *DATIS quotlibet numeris, procreabitur ex eorum mutua multiplicatione idem ſemper numerus, quomodocunque ordinem inter ſe permutent.* Ad propoſ. 19.

26 *PROPORTIO cuiuſuis numeri quadrati ad quemlibet numerum non quadratum, exhiberi nullo modo poteſt in duobus numeris quadratis.* Coroll. propoſ. 24.

27 *NVMERI in dupla proportione vel quintupla proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum.* Coroll. propoſ. 24.

28 *PROPORTIO cuiuſuis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum reperiri non poteſt in duobus numeris cubis.* Coroll. propoſ. 25.

29 *NVMERI, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſimiles plani ſunt.* Ad propoſ. 26.

30 PLANI

Digitized by Google

30 *SANI numeri non ſimiles, proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum.* Ad propoſ.26.

31 *NVMERI, qui proportionem habent quam cubus numerus ad cubum numerum, ſunt ſolidi ſimiles* Ad propoſ.27.

32 *NVLLI numeri habentes duplam proportionem, vel ſuperparticularem, vel ſuperbipartientem, ſunt ſimiles plani, vel ſolidi.* Ad propoſ. 27.

33 *DVO quæuis numeri primi, non ſunt ſimiles plani, vel ſolidi.* Ad propoſ. 27.

34 *DVO quicunque numeri inter ſe primi, qui quadrati non ſint, vel cubi (quamuis neuter eorum primus ſit) plani ſimiles non ſunt, vel ſolidi.* Ad propoſ.27.

35 *DVO numeri plani, vel ſolidi ſimiles, quorum minor ſit Primus, minor maiorem numerat.* Ad propoſ.27.

36 *DVO numeri inter ſe primi, quorum minor Primus ſit, non poſſunt eſſe plani, vel ſolidi ſimiles.* Ad propoſ. 27.

37 *DVOS numeros planos, vel ſolidos, non ſimiles inuenire.* Ad propoſ.27.

IN NONO LIBRO.

1 *SI duo numeri quadrati ſe mutuo multiplicantes faciant quempiam: Productus quadratus erit.* Ad propoſ.2.

2 *SI duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant quadratum, alter autem ſit quadratus: Et reliquus quadratus erit.* Ad propoſ. 2.

3 *SI duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant non quadratum, alter autem ſit quadratus: Reliquus non quadratus erit.* Ad propoſ.2.

4 *SI duo numeri, quadratus & non quadratus, ſe mutuo multiplicantes faciant aliquem, Productus non quadratus erit.* Ad propoſ.2.

5 *SI cubus numerus non cubum numerum multiplicans faciat aliquem, Factus non cubus erit.* Ad propoſ.5.

6 *SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat non cubum: Et multiplicatus non cubus erit.* Ad propoſ.5.

7 *SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: quilibet maior numerus acceptus tantum diſtabit ab aſſumpto quouis minore, quantum ab vnitate abeſt is numerus, per quem minor maiorem metitur.* Ad propoſ.11.

8 *SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: quilibet illorum ſeipſum multiplicans producit numerum, qui tantum ab eo diſtat in numeris proportionalibus, quantum ipſe ab vnitate. Minor verò quiuis maiorem quempiam multipli-*

Digitized by Google

çans producit numerum, qui tantum à maiore diſtat, quantu *minor ab vnitate.* Ad propoſ. 11.

9 *NVLLVS numerus primus, qui maior ſit eo, qui proximus eſ* *vnitati, aut minor proximum vnitati non metiens, metiri poteſ* *vltimum, vel quemuis maiorem in proportionalibus numeris.* Coroll. propoſ. 12.

10 *SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipſis: Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoque alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione ſumuntur minimi, vel certè ad alterum erit compoſitus.* Ad propoſ. 14.

12 *PRIORA* 10. *theoremata ſecundi libri in numeris demonſtrare.* Ad propoſ. 15.

13 *NVLLVS numerus ſecari poteſt in duas partes ita, vt qui ſit ex toto in minorem partem, quadrato maioris partis æqualis ſit.* Ad propoſ. 14. & 29.

14 *SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipſis rationem habentium: Ad quemlibet eorum reliqui omnes ſimul compoſiti, erunt primi.* Ad propoſ. 15.

15 *PROPOSITIS quotcunque numeris continuè proportionalibus, an ipſis poßit alius proportionalis adiungi, conſiderare.* Ad propoſ. 19.

16 *SI ſint quatuor numeri proportionales, ſed non deinceps, quorum primus & tertius primi inter ſe ſint, fieri non poteſt, vt detur alius, ad quem ita ſe habeat quartus, ſicut ſecundus ad tertium.* Ad propoſ. 19.

17 *PRIMIS numeris quotcunque propoſitis, inuenire alium primum numerum ab illis diuerſum.* Ad propoſ. 20.

18 *IMPAR numerus pari numero, vel pluribus paribus numeris additus, facit imparem.* Ad propoſ. 23.

19 *SI par numerus parem, aut ſeipſum multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.* Ad propoſ. 28.

20 *IMPAR numerus in ſe multiplicatus, imparem gignit.* Coroll. propoſ. 29.

21 *IMPAR numerus numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur.* Ad propoſ. 29.

22 *IMPAR numerus numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.* Ad propoſ. 29.

23 *NVMERVS impar, qui ad aliquem numerus primus eſt; Primus quoque eſt ad eius duplum, quadruplum, octuplum, & ſic deinceps per proportionem duplam progrediendo.* Coroll. propoſ. 31.

24 *NVMEROS omnes pariter tantum pares inuenire.* Ad propoſ. 32.

25 *NVME-*

Digitized by Google

25 NVMEROS omnes pariter tantùm impares inuenire. Ad propoſ. 33.

26 NVMEROS omnes, qui & pariter pares ſint & pariter impares inuenire. Ad propoſ. 34.

27 QVOTCVNQVE numerorum continuè proportionalium, quorum primus, ſecundus, & vltimus noti ſunt, ſummam inuenire. Ad propoſ. 35.

28 NVMEROS omnes perfectos, & eorum partes aliquotas inuenire. Ad propoſ. 36.

29 QVOLIBET numero per duos quoſuis numeros diuiſo; Erunt duo hi numeri Quotientibus conuerſo ordine proportionales. Ad propoſ. 36.

30 QVOLIBET numero per quotuis numeros diuiſo: Erunt bini numeri diuidentes binis Quotientibus reſpondentibus conuerſo ordine proportionales. Ad propoſ. 36.

31 QVOLIBET numero per quotuis numeros continuè proportionales diuiſo; Erunt Quotientes conuerſo ordine in eadem proportione continuè proportionales. Ad propoſ. 36.

32 SI ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus: Erit vt ſumma priorum ad quemlibet eorum, ita ſumma poſteriorum ad eum, qui illi in poſterioribus reſpondet: Ad propoſ. 36.

33 SI ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus: Summa priorum per ipſos diuiſa ſigillatim, faciet eoſdem prorſus Quotientes, quos ſumma poſteriorum per ipſos diuiſa facit. Ad propoſ. 36.

34 SI ſumma quotuis numerorum continuè proportionalium per eos ſigillatim diuidatur, & Quotientum ſumma per ipſos Quotientes: & horum ſecundorum Quotientum ſumma per eoſdem ſecundos Quotientes, & ſic deinceps in infinitum: Procreabuntur alternis ſemper ijdem primi Quotientes ordine conuerſo. Ad propoſ. 36.

35 SI ſumma quotuis numerorum continuè proportionalium per eos ſigillatim diuidatur: Erit ſumma omnium Quotientum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter diſtantium, vel denique (ſi Quotientum numerus fuerit impar) ex multiplicatione medij Quotientis in ſe. Ad propoſ. 36

36 SI ſumma quotuis numerorum continuè proportionalium, quorum numerus ſit impar, per eos ſigillatim diuidatur: Erit ſumma omnium Quotientum numerus quadratus, cuius latus, ſiue radix eſt medius terminus. Ad propoſ. 36.

37 NVMEROS quotcunque in data ratione continuè proportio-

nales reperire, quorum omnium ſumma æqualis ſit numero ex primo in ultimum gignitur, vel ex quibuſuis duobus, qui a[…] tremis æqualiter diſtant. Ad propoſ. 36.

38 *DVOS numeros in data proportione reperire, quorum ſum[…] æqualis ſit numero producto ex uno in alterum.* Ad propoſ. 36[…]

39 *MINVTIARVM, ſiue numerorum fractorum proprieta[…] operationeſq; varias demonſtrare.* Ad finem lib. 9.

40 *PROPORTIONVM compoſitionem, contra quoſdam […]centiores, explicare.* Ad finem lib. 9.

IN DECIMO LIBRO.

1 *SI duabus magnitudinibus incommenſurabilibus propoſitis, d[…]trahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractio[…] Nunquam reliqua præcedentem metietur.* Ad propoſ. 1.

2 *SI duabus magnitudinibus commenſurabilibus propoſitis, d[…]trahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione[…] Metietur quadam reliqua præcedentem.* Ad propoſ. 2.

3 *MAGNITVDO metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum menſuram communem.* Coroll. propoſ. 3.

4 *AN quotlibet magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles necne, conſiderare.* Ad propoſ. 3.

5 *MAGNITVDO metiens quotlibet magnitudines, metitu[…] & maximam earum menſuram communem.* Coroll. propoſ. 4.

6 *SI ſint quotcunque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione ſumantur, in qua bina magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines, & numeri.* Ad propoſ. 4.

7 *MAGNITVDINES commenſurabiles proportionem habent eandem, quam numeri, per quos earum communis menſura maxima ipſas metitur.* Ad propoſ. 5.

8 *LINEAM rectam inuenire, ad quam ita ſe habeat quæuis alia data recta linea, vt numerus ad numerum: Item rectam, ad cuius quadratum ita ſe habeat quadratum alterius datæ rectæ, vt numerus ad numerum* Coroll. propoſ. 6.

9 *SI ſint quotuis quantitates continuè proportionales, & aliæ totidem continuè quoq; proportionales, ſitq; vt prima illarum ad vltimam, ita prima harum ad vltimam: Erit & vt prima illarum ad ſecundam, ita prima harum ad ſecundam.* Ad propoſ. 8.

10 *RECTÆ lineæ, quæ longitudine ſunt commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles ſunt: Quæ verò potentia commenſurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine incommenſurabiles ſunt, non omnino & potentia incommenſurabiles:*

Quæ

Digitized by Google

... verò potentia incommenſurabiles, omnino & longitudine incommenſurabiles ſunt. Coroll. propoſ 9.

DIAMETER quadrati cuiuſuis lateri eiuſdem incommenſurabilis eſt. Ad propoſ 9.

12 *DVOS numeros planos inuenire, qui proportionẽ non habeant, quam quadratus numerus ad numerum quadratum.* Ad prop.10.

13 *QVOTLIBET numeros inuenire, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.* Ad propoſ 10.

14 *RECTA media proportionalis inter duas rectas potentia tantum commenſurabiles, vtralibet illarum incommenſurabilis eſt longitudine & potentia.* Ad propoſ.11.

15 *SI ſint duæ magnitudines incommenſurabiles, altera verò ſit vni cuipiam commenſurabilis: erit & reliqua eidem commenſurabilis.* Ad propoſ.12.

16 *QVÆ incommenſurabilibus ſunt commenſurabiles: & inter ſe incommenſurabiles erunt.* Ad propoſ.14.

17 *DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, inuenire id, quo maior plus poteſt, quàm minor. Item datis duabus rectis ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas poteſt.* Ad propoſ.14.

18 *SI tota magnitudo ex duabus compoſita commenſurabilis ſit alteri ipſarum: eadem & reliqua commenſurabilis eſt.* Coroll. propoſ.16.

19 *SI tota magnitudo ex duabus compoſita, incommenſurabilis ſit alteri ipſarum: eadem & reliqua incommenſurabilis eſt.* Coroll. propoſ. 17.

20 *DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore deſcripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.* Ad propoſ.17.

21 *DATAM rectam lineam ita ſecare, vt rectangulum ſub partibus contentum, æquale ſit dato rectilineo, quod tamen maius non ſit, quàm quadratum à dimidia linea deſcriptum.* Ad propoſ.17.

22 *SI ſint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore deſcripti, deficiens figura quadrata: Non erunt ſegmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia.* Ad propoſ.17.

23 *QVOTCVNQVE lineas Rationales longitudine inter ſe commenſurabiles inuenire.* Ad propoſ. 19.

24 *RATIONALES lineæ non ſolùm expoſitæ Rationali, ſed etiam inter ſe ſunt commenſurabiles* Ad propoſ.19.

25 *SI ſint duæ rectæ lineæ, erit vt prima ad ſecundam, ita quadratũ quod fit à prima, ad rectangulum, quod ſub duabus illis rectis lineis continetur: Et vt ſecunda ad primam, ita rectangulum ſub ipſis, ad quadratum ex prima.* Ad propoſ.19.

26 *SPA-*

Digitized by Google

26 *SPATIVM Rationali ſpatio commenſurabile, & ipſum* [R]*tionale eſt.* Ad propoſ.19.

27 *RECTA linea potens ſpatium Irrationale, Irrationalis* Ad propoſ.21.

28 *DVAS aut plures quotcunque lineas Rationales potentia ta*[n]*tùm inter ſe commenſurabiles inuenire.* Ad propoſ. 21.

29 *PROPOSITIS quotcunque Rationalibus lineis potentia* [ſo]*lùm commenſurabilibus, inuenire adhuc aliam quæ omnibus* [il]*lis commenſurabilis ſit potentia tantùm.* Ad propoſ.21.

30 *LINEA media proportionalis inter duas Rationales potent*[ia] *tantùm inter ſe commenſurabiles, Irrationalis eſt, quæ vocat*[ur] *Media.* Ad propoſ.22.

31 *OMNE ſpatium Medium æquale eſt cuidam alteri rectangu*[lo] *lo contento ſub duabus Rationalibus potentia tantùm commenſu*[ra]*rabilibus, ſi ipſum ſub talibus iam non contineatur.* Ad propoſ. 22. & 23.

32 *SPATIVM Medio ſpatio commenſurabile, Medium eſt.* Ad propoſ.24.

33 *DVAS rectas Medias longitudine commenſurabiles: Item duas potentia tantùm commenſurabiles inuenire.* Ad propoſ.24.

34 *RECTANGVLVM ſub duabus Medijs longitudine & poten*-*tia incommenſurabilibus contentum, neque Rationale eſt, neque Medium, ſed æquale alteri cuipiam rectangulo, quod continetur ſub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur.* Ad propoſ. 26.

35 *RATIONALE ſuperat Rationale Rationali.* Ad propoſ.27.

36 *DVOS numeros planos ſimiles inuenire.* Ad propoſ.29.

37 *DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis quadratus etiam ſit.* Ad propoſ.29.

38 *DVOS numeros quadratos inuenire, quorum exceſſus ſit numerus quadratus.* Ad propoſ.29.

39 *DVOS numeros quadratos inuenire, quorum exceſſus non ſit numerus quadratus.* Ad propoſ.29.

40 *DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis non ſit quadratus.* Ad propoſ.29.

41 *DVOS numeros inuenire, ita vt ex illis compoſitus ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum.* Ad propoſ.29.

42 *SI ſint duæ rectæ lineæ inæquales, erit vt maior ad minorem, ita rectangulum ſub ipſis contentum, ad quadratum minoris.* Et *vt minor ad maiorem, ita rectangulum ſub ipſis ad quadratum maioris.* Ad propoſ. 31.

43 *SI ſint tres lineæ rectæ, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum*

ſub

Digitized by Google

prima & ſecunda contentum, ad id, quod ſub ſecunda & tertia continetur. Ad propoſ. 32.

SI recta linea ſecetur in duas partes inæquales: erit vt vna pars ad alteram, ita rectangulum ſub tota & illa parte, ad rectangulum ſub tota & hac altera parte contentum. Ad propoſ. 33.

SI ſint duæ rectæ lineæ inæquales, vna autem ſecetur bifariam: erit rectangulum ſub ipſis contentum, duplum rectanguli, quod ſub inſecta linea, & dimidia parte lineæ ſectæ continetur. Ad propoſ. 33.

46 *FIERI poteſt, vt duo ſpatia Irrationalia componant ſpatium Rationale.* Ad propoſ. 34.

47 *DVO ſpatia Rationalia Rationale ſpatium componunt.* Ad propoſ. 34.

48 *INVENIRE duas Medias longitudine, & potentia incommenſurabiles.* Ad propoſ. 36.

49 *QVOD ſub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale eſt.* Ad propoſ. 38.

50 *SI recta linea non bifariam ſecetur, erit compoſitum ex quadratis partium maius, quàm rectangulum ſub partibus bis comprehenſum, quadrato eius lineæ, qua maior pars minorem ſuperat.* Ad propoſ. 39.

51 *SI recta linea in partes inæquales ſecetur, & rurſus in alias partes inæquales: erunt quadrata partium magis inæqualium ſimul maiora quadratis partiũ minus inæqualium ſimul.* Ad propoſ. 42.

52 *SI recta linea ſecta ſit vtcunque: erit rectangulum ſub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata. Item rectangulum contentum ſub tota, & vna parte, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis.* Ad propoſ. 54.

53 *EI, quæ eſt ex binis nominibus, potentia tantùm commenſurabilis, & ipſa ex binis nominibus eſt, ſed non ſemper ordine eadem.* Ad propoſ. 67.

54 *EI, quæ eſt ex binis Medijs, potentia tantùm commenſurabilis, & ipſa ex binis Medijs eſt, atq; ordine eadem.* Ad propoſ. 68.

55 *RECTA linea, quæ ex binis nominibus, & reliquæ Irrationales per compoſitionem factæ ipſum ſubſequentes, neque ipſi Mediæ, neque inter ſe eadem ſunt.* Ad propoſ. 73.

56 *RECTA linea media proportionalis ſecundum Analogiam Arithmeticam inter duo nomina cuiuſuis lineæ Irrationalis, quæ per compoſitionem fit, eſt quoque Irrationalis eadem illi, inter cuius nomina media exiſtit.* Ad propoſ. 73.

57 *SI a maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Apotome.* Ad propoſ. 74.

Digitized by Google

58 *SI à maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs prima, minus no-*
men auferatur: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Me-
Apotome prima. Ad propoſ. 75.

59 *SI à maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs ſecunda, minus no-*
men auferatur: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Me-
Apotome ſecunda. Ad propoſ. 76.

60 *SI à maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur: Re-*
liqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Minor. Ad propoſ. 77.

61 *SI à maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, mi-*
nus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem
cum Rationali Medium totum efficiens. Ad propoſ. 78.

62 *SI à maiori nomine eius, quæ bina Media poteſt, minus nomen*
auferatur: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Medi-
Medium totum efficiens. Ad propoſ. 79.

63 *SI idem exceſſus ſit inter primam magnitudinem & ſecundam*
qui inter tertiam magnitudinem & quartam, erit viciſſim idem
exceſſus inter primam magnitudinem & tertiam, qui inter ſe-
cundam magnitudinem & quartam: Ac proinde Quatuor ma-
gnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habent quoque
viciſſim Arithmeticam Analogiam Ad propoſ. 79.

64 *RECTA lineæ Apotomæ potentia tantùm commenſurabi-*
lis, & ipſa Apotome eſt, ſed non ſemper ordine eadem. Ad pro-
poſ. 104.

65 *APOTOME, & cæteræ ipſam conſequentes Irrationales li-*
neæ per detractionem factæ, neq; ipſi Mediæ, neq; inter ſe ſunt ea-
dem. Coroll. propoſ. 112.

66 *FIERI poteſt, vt ſpatium Rationale contineatur ſub duabus*
rectis Irrationalibus. Coroll. propoſ. 115.

67 *NON ſolùm lineæ, ſed magnitudines etiam planæ, ac ſolidæ in-*
commenſurabiles eſſe poſſunt. Ad propoſ. 117.

IN VNDECIMO LIBRO.

1 *A puncto in ſublimi ad ſubiectum planum duæ rectæ lineæ ad*
angulos rectos non demittentur. Ad propoſ. 13.

2 *SI fuerint duo plana parallela: Recta linea, quæ ad vnum eo-*
rum recta fuerit, ad reliquum quoq; recta erit. Ad propoſ. 14.

3 *DATO plano, per datum punctum, quod in eo non eſt, paralle-*
lum planum ducere. Ad propoſ. 15.

4 *QVÆ eidem plano parallela, & inter ſe ſunt parallela: Vel ſi*
concurrunt, vnum planum efficiunt. Ad propoſ. 16.

5 *SI in planis parallelis duo anguli ſint æquales, & lineæ vna vnius*
anguli, lineæ vnæ alterius anguli parallela: Erit quoq; altera li-
nea alteri lineæ parallela, ſi modo ductæ ſint ex eadem parte plani
per priores parallelas ductis. Ad prop. 16.

Digitized by Google

lineæ, aut plures lineæ rectæ in uno plano exiſtentes ſecētur quotcunque parallelis: Segmenta illarum linearum inter parallelas proportionalia erunt. Ad propoſ.17.

7 *DVO plana ad idem planum recta, in quo faciant communes lineas parallelas: parallela ſunt. Et duorum planorum parallelorum ſi vnum cuipiam plano ad rectos ſit angulos, erit & alterum eidem rectum.* Ad propoſ.18.

8 *PER rectam in plano quouis datam, planum ducere, quod ad ipſum planum ſit rectum.* Ad propoſ.18.

9 *SI Priſma quodcunque ſecetur plano aduerſis planis parallelo; erit vt baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum.* Ad propoſ.25.

10 *SI Priſma quodcunque ſecetur plano aduerſis planis parallelo: ſectio eſt figura æqualis, & ſimilis planis oppoſitis.* Coroll. propoſ.25.

11 *SOLIDA parallelepipeda æqualia ſuper eandem baſim, ſiue inſiſtentes lineæ in eiſdem collocentur rectis, ſiue non: in eadem ſunt altitudine.* Ad propoſ.30.

12 *SOLIDA parallelepipeda æqualia ſuper æquales baſes, in eadem ſunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine, ſuper æquales ſunt baſes, ſi non habuerint baſim eandem.* Ad propoſ.31.

13 *SI ſolida parallelepipeda inter ſe ſunt, vt baſes: ipſa erunt ſub eadem altitudine.* Ad propoſ.32.

14 *SI fuerint quatuor lineæ rectæ proportionales continuè: vt eſt prima ad quartam, ita erit parallelepipedum ſuper primam deſcriptum, ad parallelepipedum ſimile, ſimiliterque deſcriptum ſuper ſecundam.* Coroll propoſ.33.

15 *PRISMATA, quorum baſes ſunt triangula ſuper eandem baſim, vel æquales, & in eadem altitudine, ſunt inter ſe æqualia.* Ad propoſ.34.

16 *PRISMATA, quorum baſes ſunt triangula, ſub eadem altitudine; inter ſe ſunt, vt baſes.* Ad propoſ.34.

17 *PRISMATA ſimilia, quorum baſes ſunt triangula, inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum laterum.* Ad propoſ.34.

18 *PRISMATVM æqualium, quorum baſes ſunt triangula, baſes & altitudines reciprocantur. Et quorum priſmatum triangulares baſes habentium baſes & altitudines reciprocantur, illa ſunt æqualia.* Ad propoſ.34.

19 *SI fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ æquales inſiſtant, quæ cum lineis primo poſitis angulos contineant æquales, vtrumque vtrique: Erunt à punctis extremis linearum ſublimium ad plana angulorum primo poſitorum demiſſæ perpendiculares inter ſe æquales.* Coroll. propoſ.35.

20 *SI parallelepipedum ex tribus lineis rectis deſcriptum, æqua- fuerit parallelepipedo ſibi æquiangulo à media linea deſcripto: erunt tres rectæ lineæ continuè proportionales.* Ad propoſ.36.

21 *SI fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda ſimilia, ſimiliterq; deſcripta ex eis, proportionalia. Et ſi tria ſolida parallelepipeda, quæ & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, fuerint proportionalia: & ipſæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.* Ad propoſ.37.

22 *SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et priſmata triangulares baſes habentia, quæ ab ipſis ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, proportionalia erunt. Et ſi priſmata triangula baſes habentia, quæ & ſimilia, ſimiliterq; deſcribuntur, fuerint proportionalia. Et ipſæ rectæ lineæ proportionales erunt.* Ad propoſ.37.

23 *SI fuerint tres rectæ proportionales, erunt & priſmata triangulares baſes habentia, quæ ab ipſis & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, proportionalia. Et ſi tria priſmata triangulares baſes habentia, quæ & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, fuerint proportionalia: Et ipſæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.* Ad propoſ.37.

24 *IN omni parallelepipedo diametri ſe mutuò biſariam ſecant in vno puncto.* Coroll. propoſ.39.

25 *SI ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per centrum: biſariã ſecabitur ſolidum ab ipſo plano. Et ſi ſolidum parallelepipedum plano ſecetur biſariam: per centrum tranſibit ipſum planum.* Ad propoſ.39.

IN DVODECIMO LIBRO.

1 *CIRCVLVS ad circulum eſt, vt polygonum in illo deſcriptum ad polygonum ſimile in hoc deſcriptum.* Coroll.propoſ.2.

2 *SI pyramides triangulares inter ſe ſint, vt baſes: ipſæ erunt ſub eadem altitudine.* Ad propoſ.5.

3 *PYRAMIDES triangulares eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes conſtitutæ: ſunt inter ſe æquales. Et pyramides triangulares æquales ſuper eandem, vel æquales baſes: eandem habent altitudinem. Item pyramides triangulares æquales, eandemq; habentes altitudinem: baſes habent æquales, ſi non habuerint eandem.* Coroll.propoſ.5.

4 *PYRAMIDES quarumlibet baſium, quæ inter ſe ſunt, vt baſes: eandem habent altitudinem.* Ad propoſ.6

5 *PYRAMIDES eiuſdem altitudinis ſuper æquales baſes quaslibet, vel ſuper eandem conſtitutæ: ſunt inter ſe æquales. Et pyramides æquales ſuper æquales baſes quaslibet, vel ſuper eandem conſtructæ: eandem habent altitudinem. Item pyramides quarumli-*

libet baſium æquales, eandemq; habentes altitudinem: æquè iubent baſes, ſi non habuerint eandem. Coroll. propoſ. 6.

6 *PYRAMIS qualibet tertia pars eſt priſmatis, quod eandem habet & baſim, & altitudinem; Siue, Priſma quodlibet triplum eſt pyramidis, quæ eandem cum ipſo habet & baſim, & altitudinem.* Coroll. 1 propoſ. 7.

7 *PYRAMIS qualibet tertia pars eſt Priſmatis, quod æqualem habet & baſim, & altitudinem, licet baſis vnius plura vel pauciora latera contineat, quam baſis alterius.* Ad propoſ. 7.

8 *PRISMATA ſub eadem altitudine, quaſcunque habeant baſes: inter ſe ſunt, vt baſes. Et priſmata quarumcunq; baſium, ſi inter ſe ſint, vt baſes: ſub eadem ſunt altitudine.* Ad propoſ. 7.

9 *PRISMATA eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes quaſcunque: inter ſe ſunt æqualia. Et Priſmata æqualia ſuper æquales baſes quaſcunque, vel ſuper eandem: in eadem ſunt altitudine.* Coroll. 2. propoſ. 7.

10 *PYRAMIDES ſimiles, quarum baſes plura latera, quàm tria, continent: proportionem habent homologorum laterum triplicatam.* Coroll. propoſ. 8.

11 *PRISMATA ſimilia quarumcunq; baſium: proportionem habent laterum homologorum triplicatam.* Ad propoſ. 8.

12 *PYRAMIDES multangula ſimiles diuiduntur in pyramides triangulares ſimiles, & numero æquales, & homologas totis.* Ad propoſ. 8.

13 *PRISMATA multangula ſimilia diuiduntur in priſmata ſimilia triangulares baſes habentia, & numero æqualia, & homologa totis.* Ad propoſ. 8.

14 *PYRAMIDVM æqualium quaſcunque baſes habentium, reciprocantur baſes, atq; altitudines. Et quarum pyramidũ quaſcunq; baſes habentium, reciprocantur baſes, atq; altitudines: illæ ſunt æquales.* Ad propoſ. 9.

15 *PRISMATVM quorumlibet æqualium reciprocantur baſes, & altitudines. Et quorum priſmatum baſes, atq; altitudines reciprocantur, illa inter ſe ſunt æqualia.* Ad propoſ. 9.

16 *OMNIS conus ſiue rectus, ſiue ſcalenus; tertia pars eſt cuiuslibet cylindri, ſiue recti, ſiue ſcaleni, eandem cum ipſo & baſim, & altitudinem habentis, licet non ſit idem axis coni, & cylindri.* Ad propoſ. 10.

17 *CONI, & cylindri ſub eadem altitudine, ſiue ambo ſint recti, ſiue ſcaleni; ſiue vnus rectus, & alter ſcalenus: inter ſe proportionem habent, quam baſes.* Ad propoſ. 11.

18 *SI coni, & cylindri inter ſe ſint, vt baſes: ipſi ſub eadem altitudine erunt.* Ad propoſ. 11.

19 *CONI, & cylindri eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æqua-*

les baſes conſtituti, ſiue ambo ſint recti, ſiue ſcaleni, ſiue vnus re-ctus, & alter ſcalenus: inter ſe ſunt æquales. Coroll. propoſ. 11.
20 CONI, *& cylindri æquales ſuper eandem, vel æquales baſes in eadem ſunt altitudine. Et coni, ac cylindri æquales in eadem altitudine ſuper æquales baſes ſunt, ſi non habuerint eandem.* Coroll. propoſ. 11.
21 CONI, *& cylindri ſcaleni ſimiles, in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus.* Ad propoſ. 12.
22 CONI, *& cylindri ſcaleni ſuper æqualibus baſibus, vel etiam ſi vnus ſit rectus, & alter ſcalenus: inter ſe ſunt, vt altitudines.* Ad propoſ. 14.
23 SVPER *æqualibus baſibus priſmata, parallelepipeda, & pyramides; inter ſe ſunt, vt altitudines.* Ad propoſ. 14.
24 CONI, *& cylindri tam recti, quam ſcaleni: Item priſmata, parallelepipeda & pyramides, ſi ſint, vt altitudines, baſes habent æquales.* Ad propoſ. 14.
25 CONORVM, *& cylindrorum æqualium, ſiue ambo ſcaleni ſint, ſiue vnus rectus, & alter ſcalenus: baſes & altitudines reciprocantur. Et quorum conorum, & cylindrorum, ſiue ambo ſint ſcaleni, ſiue vnus rectus & alter ſcalenus, baſes & altitudines reciprocantur: illi ſunt æquales.* Ad propoſ. 15.
26 SI *duobus circulis circa idem centrum exiſtentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inſcribatur minorem circulum non tangens, & ab extremitate vnius lateris polygoni inſcripti, quod cum diametro conuenit, ad diametrum perpendicularis ducatur: hæc nullo modo circulum minorem tangit, ſed extra ipſum cadit.* Coroll. propoſ. 16.
27 DVO *polyedra ſimilia in duabus ſphæris deſcripta, proportionem habent triplicatam eius, quam habent ſphærarum diametri.* Coroll. propoſ. 17.
28 SPHÆRA *ad ſphæram eſt, vt polyedrum in illa deſcriptum, ad polyedrum in hac deſcriptum.* Coroll. propoſ. 18.

IN TERTIODECIMO LIBRO.

1 SI *recta inæqualiter ſecetur, & minus ſegmentum aſſumens dimidium maioris ſegmenti quintuplum poſſit eius, quod à dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati: Recta illa linea ſecta erit extrema & media ratione.* Ad propoſ. 3.
2 SI *recta linea inæqualiter ſecetur, ſitque quadratum totius, vna cum quadrato minoris ſegmenti, triplum quadrati ex maiore ſegmento deſcripti: Recta illa linea extrema ac media ratione ſecabitur.* Ad propoſ. 4.
3 SI *recta linea extrema ac media ratione ſecetur: tota linea*

aſſumens

quens minus ſegmentum, quintuplum poteſt eius, quod à maiore ſegmento deſcribitur, quadrati. Et ſi recta linea inæqualiter ſecetur, totaque aſſumens minus ſegmentum poſſit quintuplum eius, quod à maiori ſegmento deſcribitur, quadrati. Recta illa linea extrema & media ratione ſecta eſt. Ad propoſ.4.

4 *SI recta linea ſecetur extrema ac media ratione, detrahaturque maiori ſegmento ſegmentum minus: erit maius ſegmentum ſectum extrema ac media ratione, & minus ſegmentum eſt illa linea, quæ prioris lineæ minus ſegmentum erat.* Ad propoſ.5.

5 *SI linea ſecetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidia maioris ſegmenti: Erit quoque dimidia totius diuiſa extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit dimidium maioris ſegmenti totius lineæ.* Ad propoſ.5.

6 *SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, ſitque maius ſegmentum lineæ Rationalis: Erit minus ſegmentum Apotome.* Ad propoſ. 6.

7 *RECTA, quæ angulum Pentagoni æquilateri, & æquianguli ſubtendit, parallela eſt oppoſito lateri.* Ad propoſ.8.

8 *SI latus hexagoni in quopiam circulo deſcripti ſecetur extrema & media ratione: maius illius ſegmentum eſt latus decagoni in eodem circulo deſcripti.* Ad propoſ.9.

9 *SI linea diuiſa extrema ac media ratione, maius ſegmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli: Erit minus ſegmentum latus decagoni eiuſdem circuli: Quod ſi minus ſegmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli, erit maius ſegmentum latus hexagoni eiuſdem circuli.* Ad propoſ. 9.

10 *LINEA recta, quæ ex centro circuli ducta diuidit arcũ quempiam bifariam, diuidit quoque rectam illi arcui ſubtenſam bifariam, & ad angulos rectos.* Coroll.1.propoſ.10.

11 *DIAMETER circuli ex angulo quouis pentagoni in eo deſcripti ducta, & arcum, quem latus pentagoni illi angulo oppoſitum ſubtendit, & latus ipſum oppoſitum bifariam, & ad angulos rectos.* Coroll.propoſ 10.

12 *IN dato circulo latera pentagoni, & decagoni vna eademque opera inuenire.* Ad propoſ.10.

13 *DIAMETER circuli potentia eſt ſeſquitertia lateris trianguli æquilateri in eo circulo deſcripti.* Coroll. 1.propoſ.12.

14 *SI in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur: Diameter ex vno angulo ducta diuidet & angulum bifariam, & latus oppoſitum, atque inſuper ad angulos rectos: Semidiameter quoque viciſſim bifariam, & ad angulos rectos ſecabitur à latere oppoſito* Ad propoſ.12.

15 *SI ad lineam rectam perpendicularis ducatur, quæ ſit media proportionalis inter ſegmenta lineæ: Semicirculus circa illam lineam ro-*

Digitized by Google

ctam deſcriptus, tranſibit per extremum punctum lineæ perpen-dicularis. Ad propoſ. 13.

14 *DIAMETER ſphæræ potentia eſt quadrupla ſeſquialte[ra] ſemidiametri circuli circa baſim pyramidis in ea ſphæra conſtr[u]ctæ deſcripti.* Coroll.1. propoſ 13.

15 *LINEA perpendicularis ex centro ſphæræ ad planum baſis py-ramidis in ea ſphæra conſtructæ demiſſa, ſexta pars eſt diame[tri] ſphæræ, & tertia pars ſemidiametri* Coroll. 2 propoſ 13.

16 *ALTITVDO pyramidis in ſphæra deſcriptæ, duas terti[as] partes diametri ſphæræ continet.* Coroll.2. propoſ 13.

17 *IN Octaedro tres diametri ſe mutuò ad angulos rectos ſecant i[n] centro ſphæræ: nec non & tria quadrata ex lateribus Octaedr[i] compoſita ſe mutuò ad angulos rectos ſecant.* Coroll.1 propoſ. 14

18 *OCTAEDRVM diuiditur in duas pyramides ſimiles, & æquales, quarum baſis communis eſt quadratum ex Octaedri lateribus compoſitum.* Coroll.2. propoſ. 14.

19 *SI Tetraedrum, & Octaedrum in eadem ſphæra deſcribantur, erit Tetraedri latus potentia ſeſquitertium lateris Octaedri.* Coroll.3. propoſ 14.

20 *BASES Octaedri oppoſitæ, ſunt parallelæ.* Coroll.4. propoſ. 14.

21 *OMNES diametri cubi ſunt inter ſe æquales, ſeſeq; mutuò bifariam ſecant in centro ſphæræ: nec non & rectæ lineæ, quæ centra baſium cubi oppoſitarum coniungunt, biſariam in eodem centro diuiduntur.* Coroll.1. propoſ. 15.

22 *POTENTIA diametri ſphæræ æqualis eſt potentijs laterum Tetraedri, & cubi ſimul ſumptis.* Coroll.2. propoſ.15.

23 *DIAMETER ſphæræ potentia eſt quintupla ſemidiametri circuli quinq; latera Icoſaedri pentagonum conſtituentia ambientis.* Coroll.1 propoſ.16.

24 *DIAMETER ſphæræ compoſita eſt ex latere hexagoni, hoc eſt, ex Semidiametro, & duobus lateribus decagoni eiuſdem circuli, qui circa quinq; Icoſaedri latera deſcribitur.* Coroll.2.prop.16.

25 *ICOSAEDRI latera oppoſita, ſunt parallela.* Coroll. 3. propoſ. 16.

26 *SI latus cubi ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſt latus Dodecaedri in eadem ſphæra cum cubo deſcripti.* Coroll.1. propoſ.17.

27 *LATVS cubi æquale eſt lineæ rectæ ſubtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eadẽ ſphæra comprehenſi.* Coroll 2. propoſ.17.

28 *SI recta linea ſecetur extrema ac media ratione, cuius minus ſegmentum eſt latus Dodecaedri, maius ſegmentum eſt latus cubi eiuſdem ſphæræ* Coroll.2. propoſ 17.

29 *IN Dodecaedro ſunt ſex latera, quorum bina oppoſita ſunt parallela, biſariamque ſecantur, & ad angulos rectos, à tribus li-*

neis

Digitized by Google

rectis æqualibus ſeſe in centro Dodecaedri bifariam quoque, & ad angulos rectos ſecantibus. Coroll. 3. propoſ. 17.

10 *SI recta dividens oppoſita latera Dodecaedri bifariam & ad angulos rectos, ſecetur extrema ac media ratione: maius ſegmentum erit latus cubi, minus vero latus Dodecaedri eadem ſphæra comprehenſi.* Coroll. 4. propoſ. 17.

11 *PRÆTER quinque corpora regularia, quæ Euclides hoc lib. 13. conſtruxit, nullum aliud dari poteſt.* Ad propoſ. 18.

12 *QVOTNAM latera, & angulos quodvis Regularium ſolidorum contineat.* Ad propoſ. 18.

13 *CVBVS, & Octaedrum: Item Icoſaedrum, & Dodecaedrum, reciproca ſunt, quod ad numerum baſium, & angulorum ſolidorum attinet: Solum Tetraedrum cum nullo reciprocatur, ſed tot baſes habet, quot angulos ſolidos.* Ad propoſ. 18.

IN QVARTODECIMO LIBRO.

1 *LINEA perpendicularis ducta ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo aptatam, ſecat arcum, quem dicta hæc linea ſubtendit, bifariam.* Coroll. 1. propoſ. 1.

2 *LINEA perpendicularis ex centro ad latus pentagoni ducta, æqualis eſt utrique lineæ ſimul, & ei, quæ ex centro ad latus trianguli æquilateri eidem circulo inſcripti ducitur, perpendiculari, & dimidio lateris decagoni.* Coroll. 2. propoſ. 1.

3 *LATVS hexagoni ad latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum eandem proportionem habet, quam recta ſubtendens angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli ad latus ipſius pentagoni.* Ad propoſ. 2.

4 *SI linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo deſcripti ducta ſecetur extrema ac media ratione: maius ſegmentum æquale eſt perpendiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri ductæ: minus vero æquale eſt dimidio lateris decagoni in eodem circulo deſcriptorum.* Ad propoſ. 2.

5 *SI in ſphæra eadem cubus, & Dodecaedrum inſcribantur: quadratum lateris cubi, & quadratum lateris Dodecaedri, utraque ſimul, quintupla ſunt quadrati ſemidiametri circuli pentagonum Dodecaedri circumſcribentis.* Coroll. propoſ. 3.

6 *SVPERFICIES cuiuslibet Dodecaedri ad ſuperficiem cuiuſcunque Icoſaedri, etiamſi non deſcribantur ambæ figuræ in eadem ſphæra, eſt ſicut rectangulum contentum ſub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni Dodecaedri in latus dictum, ad rectangulum contentum ſub latere Icoſaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icoſaedri in dictum latus.* Coroll. propoſ. 7.

7 *SI ex centro circul. triangulum Tetraedri, vel Octaedri, ſi[ue] quadratum cubi circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad vnum aliquod eorum latus. Erit, quod ſub dicto latere, & perpendiculari continetur, rectangulum, in Tetraedro quidem ſumptu[m] ſexies, ſuperficiei Tetraedri; In Octaedro vero, & cubo, duodeci[es] ſumptum, ſuperficiei Octaedri, & cubi æquale.* Ad propoſ. 7.

8 *RECTANGVLVM comprehenſum ſub perpendiculari ab angulo trianguli Icoſaedri ad vnum eius latus ducta, & ſu[b] quinque ſextis partibus lateris cubi eidem ſphæræ, in qua Icoſaedrum, inſcripti, æquale eſt pentagono Dodecaedri in eadem ſphæra conſtituti.* Coroll. propoſ. 8.

9 *QVAM proportionem habent latera cubi, & Icoſaedri eiuſdem ſphæræ, eandem habent latera cubi, & Icoſaedri in quauis alia ſphæra deſcriptorum.* Ad propoſ. 10.

10 *SVPERFICIES Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri non ſolùm habet eandem proportionem, quam latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum ipſis, vt vult propoſ. 6. huius lib. ſed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icoſaedri in quacunque alia ſphæra,* Ad propoſ. 10.

11 *SI ſphæra plano quopiam ſecetur, communis ſectio circulus erit.* Ad propoſ. 10.

12 *SI planum ſphæram ſecans tranſierit per centrum, efficietur circulus idem centrum habens, quod ſphæra: Si vero planum ſecans per ſphæræ centrum non tranſierit, efficietur circulus habens aliud centrum quàm ſphæra, illud videlicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro ſphæræ ad planum ſecans ducta.* Coroll. propoſ. 10.

13 *CIRCVLI in ſphæra æquales æqualiter diſtant à centro ſphæræ. Et circuli æqualiter diſtantes à centro ſphæræ, æquales ſunt.* Ad propoſ. 10.

14 *EADEM proportio eſt lateris cubi ad latus Icoſaedri, quæ ſuperficiei Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri: Et lineæ potentis totum quamcunq; ſectam extrema ac media ratione, & eius ſegmẽtum maius; ad lineam potentem totum eandem, & minus ſegmentum illius. Et Dodecaedri ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæræ.* Coroll. propoſ. 11.

15 *LINEA perpendicularis ex vno angulo trianguli æquilateri ad latus oppoſitum demiſſa ſecat & angulum, & latus biſariam.* Coroll. propoſ. 12.

16 *OMNE triangulum æquilaterum, cuius latus ſit Rationale, eſt ſuperficies Media.* Coroll. propoſ. 13.

17 *LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad baſim oppoſitam ducta ſeſquialtera eſt eius, quæ inter centrum trianguli, & dictum angulum interijcitur: Hæc autem inter*

ter

Digitized by Google

...triangulis, & dictum angulum interjecta dupla eſt perpendicularis, quæ ex centro trianguli, ad baſim eiuſdem ...tur. Coroll. propoſ. 18.

SOLIDVM, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias ...tes quadrati diametri, ſphæra dictum cubum comprehendentis æquale eſt cubo. Vel ſolidum, quod fit ex latere cubi in tertiam partē quadrati diametri ſphæra, æquale eſt cubo. Coroll. prop. 20.

19 SOLIDVM, quod fit ex perpendiculari è centro cuiuſcunque corporis regularis ad aliquam eius baſim ducta, in tertiam partem ſuperficiei ipſius corporis, æquale eſt propoſito corpori regulari. Ad propoſ. 20.

20 LINEÆ perpendiculares coniungentes centra circulorum, qui baſes oppoſitas tam cubi, quàm Octaedri in eadem ſphæra circumſcribunt, inter ſe æquales ſunt. Coroll. propoſ. 21.

21 ALTITVDO Octaedri ad altitudinem Tetraedri eiuſdem ſphæræ eſt, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri. Coroll. propoſ. 22.

22 DIAMETER ſphæræ ad latus Tetraedri eſt, vt latus Octaedri ad Latus cubi eiuſdem ſphæræ. Coroll. propoſ. 22.

23 SI linea quæuis recta ſecetur extrema ac media ratione, & alia linea potentia huius ſeſquialtera ſit latus Octaedri: maius ſegmētum erit latus Dodecaedri eiuſdem ſphæræ, in qua Octaedrum deſcribitur. Coroll. propoſ. 25.

24 SI in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur ex vno angulo ad latus oppoſitum: quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis eſt inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris, æquale eſt ipſi triangulo. Coroll. propoſ. 29.

25 DIAMETER ſphæræ potentia eſt dupla ſeſquiquarta axis Tetraedri, ſeu altitudinis ipſius; atque adeò diameter longitudine eſt ſeſquialtera axis, vel altitudinis Tetraedri. Coroll. 1. prop. 31.

26 AXIS, ſeu altitudo Tetraedri ad latus cubi eidem ſphæræ inſcripti eſt, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo baſis ad latus oppoſitum ductam. Coroll. 2. propoſ. 31.

27 PRISMA eandem habens & baſim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale eſt cubo in eadem ſphæra, in qua Tetraedrum, deſcripto. Coroll. propoſ. 32.

IN QVINTODECIMO LIBRO.

1 SI in Tetraedro Octaedrum inſcribatur, diuidetur Tetraedrum bifariam tribus quadratis æqualibus, quæ Octaedrum bifariam quoque, & ſeſe ad angulos rectos interſecant. Coroll. propoſ. 2.

2 RECTÆ lineæ centra baſium cubi oppoſitarum connectentes, ſe mutuò & bifariam, & ad angulos rectos ſecant. Coroll. propoſ. 3.

3 *IDEM eſt centrum Icoſaedri, ac ſibi inſcripti Dodecaedri.* Coroll. propoſ. 5.

4 *SI Tetraedrum Octaedro inſcribatur, erunt quatuor baſes Tetraedri octo baſibus Octaedri parallelæ, ſingulæ videlicet binis oppoſitis.* Coroll. 1. propoſ. 6.

5 *SI in Octaedro Tetraedrum inſcribatur; recta, quæ centra baſium Octaedri oppoſitarum coniungit, ſeſquialtera eſt axis Tetraedri, hoc eſt, perpendicularis ab angulo Tetraedri ad baſim oppoſitam deducta.* Coroll. 2. propoſ. 6.

6 *RECTA ſubtendens vnum angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli, parallela eſt oppoſito lateri.* Coroll. propoſ. 8.

7 *DIAMETER Dodecaedri duo latera poteſt, ipſius ſcilicet Dodecaedri, & cubi, in quo Dodecaedrum inſcribitur.* Ad prop. 13.

8 *SI latus cubi ſecetur extrema ac media ratione, minus ſegmentum latus eſt Dodecaedri in cubo deſcripti: Maius vero ſegmentum latus cubi in hoc Dodecaedro deſcripti.* Ad propoſ. 13.

9 *LATVS cubi æquale eſt duobus lateribus, Dodecaedri videlicet in ipſo deſcripti, & Dodecaedri circa eundem cubum deſcripti.* Ad propoſ. 13.

10 *RECTA duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppoſitos connectens, æqualis eſt lateri cubi, cui Dodecaedrum inſcribitur.* Ad propoſ. 13.

11 *DIAMETER Icoſaedri poteſt & latus Icoſaedri, & cubi Icoſaedrum ambientis.* Ad propoſ. 14.

12 *BIFARIÆ ſectiones ſex oppoſitorum laterum Icoſaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, ſeſe in centro Icoſaedri bifariam, & ad angulos rectos ſecantibus.* Ad propoſ. 14.

13 *SI latus cubi extrema ac media ratione ſecetur, maius ſegmentum latus eſt Icoſaedri in dicto cubo deſcripti.* Ad propoſ. 14.

14 *ICOSAEDRI tam latera, quàm triangula oppoſita ſunt inter ſe parallela.* Ad propoſ. 14.

15 *IDEM eſt centrum Icoſaedri, & Octaedri in eo deſcripti.* Coroll. propoſ. 15.

16 *SI duo latera trianguli æquilateri ſecentur extrema ac media ratione, ita vt vnius maius ſegmentum, alterius verò minus ſit prope angulum ab ipſis comprehenſum: Recta connectens dictas ſectiones duplum poteſt minoris ſegmenti.* Coroll. 1. propoſ. 16.

17 *SI in Octaedro Icoſaedrum deſcribatur, collocabuntur octo baſes Icoſaedri in octo baſibus Octaedri, idemq; erit centrum baſis Octaedri, & baſis Icoſaedri.* Coroll. 2. propoſ. 16.

18 *IDEM centrum eſt Octaedri, atq; ſibi inſcripti Icoſaedri.* Coroll. 3. propoſ. 16.

19 *IDEM eſt centrum pyramidis, & cubi in ea deſcripti.* Coroll. 1. propoſ. 18.

20 RE-

Digitized by Google

20 *RECTA coniungens biſarias ſectiones oppoſitorum laterum pyramidis, tranſit per centrum pyramidis, triplaque eſt lateris cubi in pyramide deſcripti.* Coroll. 2. propoſ. 18.

21 *IDEM eſt centrum pyramidis, & Octaedri in ea deſcripti.* Ad propoſ. 18.

IN SEXTODECIMO LIBRO.

1 *LATVS Icoſaedri Octaedro inſcripti, maius eſt ſegmentum rectæ diuiſæ extrema ac media ratione, quæ ab vno angulo baſis Octaedri ducta ſecat latus oppoſitum extrema quoque ac media ratione.* Coroll. propoſ. 3.

2 *LATVS Icoſaedri in pyramide deſcripti, eſt Apotome.* Coroll. propoſ. 4.

3 *LATVS Octaedri potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi in ipſo deſcripti, vel eius recta extrema, ac media ratione diuiſa, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri Octaedro inſcripti.* Coroll. propoſ. 11.

4 *DIAMETER Icoſaedri binas rectas poteſt, diametrum ſcilicet cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli triangulum Icoſaedri ambientis.* Coroll. propoſ. 15.

5 *IDEM centrum eſt Octaedri, atque cubi ſibi inſcripti.* Coroll. 1. propoſ. 23.

6 *OCTAEDRVM ad ſibi inſcriptum cubum eandem habet rationem, quam eorum laterum quadrata habent.* Coroll. 2. propoſ. 23.

7 *DODECAEDRVM à duplo cubi ſibi inſcripti deficit duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi eſt æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi, altitudo denique à latere cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus ſegmentum exiſtit: Alterius verò & longitudo & latitudo lateri cubi æqualis eſt, altitudo autem minus ſegmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit; ita vt amborum altitudines ſimul altitudini ſiue lateri cubi ſint æquales.* Coroll. propoſ. 28.

8 *PYRAMIS excedit duplum Icoſaedri ſibi inſcripti parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri, altitudo verò recta linea biſarias ſectiones oppoſitorum laterum Icoſaedri coniungens* Coroll. propoſ. 31.

9 *DATIS duobus circulis in ſphæra parallelis, dataque in vno eorum linea recta, ducere in altero diametrum huic rectæ datæ parallelam.* Ad finem lib. 16.

10 *SI in planis parallelis deſcripti ſint duo circuli, in quibus duæ*

Digitized by Google

rectæ parallelæ abſcindant arcus ſimiles: erunt duæ rectæ coniu
gentes extrema vnius rectæ cum centro, parallelæ duabus rectis, q
extrema alterius rectæ cum centro coniungunt. Ad finem lib. 1

11 SI in ſphæra ſint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus du
ſint duæ rectæ parallelæ & æquales, ad eaſdem partes centroru
Rectæ harum parallelarum extrema puncta ad eaſdem partes co
iungentes, æquales quoque, & parallelæ ſunt, & ad plana circu
rum perpendiculares. Ad finem lib. 16.

12 SI in ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales, in quibus du
ſint duæ rectæ parallelæ & æquales, non ad eaſdem partes centr
rum: Rectæ harum parallelarum extrema puncta non ad eaſde
partes coniungentes, in centro ſphæræ ſe interſecant, ac proinde di
metri ſphæræ erunt, & inter ſe æquales: Rectæ verò earundem pa
rallelarum extrema puncta ad eaſdem partes connectentes, &
æquales ac parallelæ inter ſe ſunt, & cum parallelis rectos angulo
conſtituunt. Ad finem lib. 16.

13 IN data ſphæra duos circulos æquales, ac parallelos deſcribere,
ita vt diameter ſphæræ ſit vtriuſque diametri potentia ſeſquialte-
ra. Ad finem lib. 16.

14 IN data ſphæra Pyramidem aliter, quam ab Euclide factum eſt,
deſcribere. Ad finem lib. 16.

15 In data ſphæra Octaedrum aliter, quam ab Euclide factum eſt,
deſcribere Ad finem lib. 16.

16 IN data ſphæra cubum aliter, quam ab Euclide factum eſt, de-
ſcribere. Ad finem lib. 16.

17 IN data ſphæra Icoſaedrum aliter, quam ab Euclide factum eſt,
deſcribere. Ad finem lib. 16.

18 IN data ſphæra Dodecaedrum aliter, quam ab Euclide factum
eſt, deſcribere. Ad finem lib. 16.

19 SI quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia habeant
latera: erunt viginti triangula ſimul maiora, quam octo quadra-
ta ſimul. Ad finem lib. 16.

20 OCTO quadrata ex ſemidiametro ſphæræ deſcripta, æqualia
ſunt ſuperficiei cubi in ea ſphæra deſcripti. Ad finem lib. 16.

21 SI Octaedrum, cubus, & Icoſaedrum in eadem ſphæra deſcri-
bantur; erit perpendicularis è centro ſphæræ ad vnam baſim Ico-
ſaedri ducta, maior perpendiculari ex eodem centro ſphæræ ad
vnam baſim Octaedri, & cubi ducta. Ad finem lib. 16.

22 SI cubus, & Icoſaedrum in eadem ſphæra deſcribantur: ſuper-
ficies Icoſaedri ſuperficie cubi maior eſt. Ad finem lib. 16.

23 DODECAEDRVM Icoſaedro in eadem ſphæra maius eſt.
Ad finem lib. 16.

24 ICOSAEDRVM cubo in eadem ſphæra maius eſt. Ad fi-
nem lib. 16.

25 CVBVS

Digitized by Google

25 *CVBVS Octaedro in eadem ſphæra maior eſt.* Ad finem lib. 16.

26 *OCTAEDRVM Tetraedro in eadem ſphæra maius eſt.* Ad finem lib. 16.

27 *SVPERFICIES conuexa Dodecaedri maior eſt ſuperficie conuexa Icoſaedri in eadem ſphæra: Et ſuperficies Icoſaedri maior ſuperficie cubi: Et ſuperficies cubi maior ſuperficie Octaedri: Superficies denique Octaedri maior ſuperficie Tetraedri.* Ad finem lib. 16.

28 *ANGVLVM inclinationis duarum baſium cuiuſcunque corporis regularis inuenire.* Ad finem lib. 16.

29 *OMNES inclinationes baſium cuiuſcunque corporis regularis, æquales inter ſe ſunt.* Ad finem lib. 16.

ITAQVE in Codicibus Græcis habentur in primo libro propoſitiones 48: In ſecundo, 14: In tertio, 37: In quarto, 16: In quinto, 25: In ſexto, 33: In ſeptimo, 41: In octauo, 27: In nono, 36: In decimo, 117: In vndecimo, 40: In duodecimo, 18: In tertiodecimo, 18: In quartodecimo, 11: In quintodecimo, 5: Atque in vniuerſum, 486.

PROPOSITIONES verò additæ, in quinto libro, 9: In quartodecimo, 21: In quintodecimo, 16: In ſextodecimo, 31: Atque omnes numero, 77.

IN ſcholiis denique, & corollariis demonſtrantur propoſitiones in primo libro, 108: In ſecundo, 21: In tertio, 54: In quarto, 23: In quinto, 26: In ſexto, 99: In ſeptimo, 33: In octauo, 37: In nono, 40: In decimo, 67: In vndecimo, 25: In duodecimo, 28: In tertiodecimo, 33: In quartodecimo, 27: In quintodecimo, 21: In ſextodecimo, 29. Quæ omnes conficiunt numerum 671.

IN vniuerſum ergo 1234. propoſitiones in noſtro Euclide demonſtrantur.

IN EV-

Digitized by Google

IN EVCLIDIS ELEMENTA PRÆFATIO.

SI QVIS fortè miratur, cur poſt tot præclariſſimos in Euclidis Elementa Geometrica Commentarios ab egregiis, & in primis Mathematicarum rerum peritis Scriptoribus editos, nouas adhuc ipſi commentationes conſcripſerimus; is facilè ſibi perſuadebit, nõ temere id à nobis eſſe factum, ſi conſilij noſtri rationem cognouerit. Cum enim longa diuturnaque experientia nobis eſſet perſpectum, atque exploratum, eam eſſe vtilitatem, atque adeo neceſſitatem horum elementorum, vt fruſtra quiſquam ſe ſperet ſine ipſorum præſidio, acutiſſimas, ſubtiliſſimasque Archimedis, Apollonij, Theodoſij, Menelai, Ptolemæi, cæterorumque illuſtrium Mathematicorum demonſtrationes poſſe percipere; vehementer dolebamus, tam inſignem & illuſtrem auctorem à pleriſque omnino negligi, à perpaucis verò pro dignitate tractari, ita vt vix hoc noſtro ſeculo reperiantur, qui ſedulam operam, ac ſtudium in perdiſcendis his elementis ponant; ob eam potiſſimum, vt arbitror, cauſam, quod difficultate rerum, quas tractant, atque obſcuritate deterreantur, nullumque habeant hac in re ducem, quem ſibi citra erroris periculum ſequendum proponant. Extant quidem Commenta-

[illegible]ij Campani, ac Theonis in ſingulos Euclidis li-
[illegible]nè eruditi, qui ſatis eſſe poſſint cuiuis ad facilè cō-
[illegible]dam horum elementorum doctrinam: Sed alter
[illegible] in omnibus eſt traditionem Arabum, qui ma-
[illegible] parte Euclidis ordinem, ac methodum peruerte-
[illegible], verbaque propoſitionum eiuſdem locis non pau-
[illegible]mmutarunt, vt verus germanusque auctoris ſenſus
[illegible]difficile poſſit intelligi; id quod maximè in 10. lib.
[illegible]ſpicitur: Alter (Theonem intelligo) penè innume-
ris mendis, vitiisque incuria librariorum ita eſt deprauа-
tus, & propter notas Græcas, quæ in eius demonſtratio-
nibus adhibentur, obſcuras illas ac malè expreſſas adeo
impeditus, vt magnam difficultatem inexercitatis inge-
niis, perplexitatemque gignat. Quo fit, vt Euclidem ſine
maximo labore ac ſtudio nemo percipiat. Iam ſi alij ad
noſtram vſque memoriam maius aliquod ſtudium ope-
ramque in hoc munus interpretandi Euclidis elementa
contulerunt, hi vel ſex priores tantum libros expoſue-
runt: vel ſi qui in vniuerſum Euclidem Commentarios
ediderunt, hi perſæpe, relictis antiquorum demonſtra-
tionibus certiſſimis, proprias alias, ac nouas confinxe-
runt, quæ plerunque non tam firmæ ſunt, neque rem
ipſam ſimpliciter & abſolutè conficiunt; præſertim
quòd modò è propoſitionibus voces quaſdam perpe-
ram detrahunt, modò alias ineptè apponunt, modò de-
nique nonnullas temere immutant, vt meritò de vero
proprioque Euclidis ſenſu dubitare quis poſſit. Qua ta-
men in re Federicum Commandinum Vrbinatem,
Geometram non vulgarem excipio, qui nuper Eucli-
dem Latinè redditum in priſtinum nitorem reſtituit,
paucis locis exceptis, in quibus non parum à vero aber-
rauit, vt ſuo loco monebimus. Quæ cum ita ſint, resque
ac ſcientia tam præclara digna ſit, quæ ope, ſtudio, indu-
ſtria ab ijs adiuuetur, qui aliquid ad hoc momenti affer-
re poſſunt, poſt diuturni temporis in rebus Mathema-
ticis operam collocatam; faciendum putauimus, vt lu-
cubra-

Digitized by Google

cubrationes noſtras ac vigilias ſtudioſis harum reru nonnihil (niſi fallimur) ſubſidij allaturas in publicu ederemus. Acceſſit editionis cauſa altera: Nam cum Eu clides, propter ſingularem vtilitatem, inſtar enchiridi manibus ſemper debeat circumgeſtari, neque vnquar deponi ab his, qui fructum aliquem ſerium ex hoc ſuau Matheſeos ſtudio capere volunt, in eoque progredi; i vero in hunc diem, exemplaribus omnibus maiore fo ma impreſſis, needum factum videamus; hoc noſtr editio certè, ſi nihil aliud attulerit commodi, atqu emolumenti. Sunt enim hi noſtri Commentarij in vni uerſum Euclidem conſcripti commodiore nunc forma quam vulgo cæteri, (id quod magnopere à nobis, qu nos audierunt, efflagitabant,) volumineque editi, vt facilè iam queant, nulloque negotio, è loco in locum, cum res tulerit, ferri atque portari. Nunc quo modo, via, ac ratione res tota à nobis pertractetur, quidque in hac interpretatione præſtitum ſit, paucis accipe. Demonſtrationes aliorum, maximè Theonis, quas quidem ipſius eſſe Euclidis, non leuibus argumentis adducti cum pleriſque aſſeueramus, & Proclus etiam teſtatur, breuiores, quantum per rei difficultatem licuit, vel certè planiores, quando illud non potuimus, dilucidioresque reddere conati ſumus. Non enim illas nudè, ac totidem verbis, quot erant ſcriptæ, propoſuimus. Etenim ea eſt interdum illarum breuitas, vt illud accidat, quod ab elegantiſſimo Poeta dictum eſt: *Breuis eſſe laboro, obſcurus fio.* Interdum etiam cum breuius, atque ſuccinctius efferri poſſint, magna, ob longiorem, quàm ſatis eſt, ſermonem, affertur moleſtia legenti. Quare vtrumque vitantes, eas, velut παραφραστικῶς, atque ad eum ferè modum tradidimus, quem, cum publicè Euclidem interpretaremur, obſeruauimus; hac etiam re auditorum deſiderio, & voluntati, quantum eſt in nobis, ſatisfacere cupientes. Ita enim, noſtra ſententia, Euclides facilius à ſtudioſis, ijs præſertim, qui ceu tyrones, hæc Mathematica ſtudia

nunc

Digitized by Google

maximum auſpicantur, ac maiore voluptate, vtilitateq; cognoſcetur. Præter hæc adiunximus multis in locis problemata, ac theoremata ſcitu non iniucunda, neque à ſcopo Geometriæ aliena, quæ partim ex Proclo, Campano, aliiſque auctoribus decerpſimus, partim proprio (vt aiunt) Marte, aſſiduiſque meditationibus ipſi confecimus. Data inſuper in hoc diligens opera, vt definitiones Euclidis, præſertim obſcuriores, & quæ aliquid viſæ ſunt habere difficultatis, (in quas plurimi, tanquam in ſcopulos quoſdam incidentes, à recto curſu deflexerunt, & in errores varios atque abſurdos, prorſuſque ab inſtituto diſciplinæ abhorrentes dilapſi ſunt) dilucidè atque perſpicuè, quoad eius fieri potuit, explicarentur; id, quod harum artium ſtudioſi facilè iudicabunt. Quæ res cum in ampliorem magnitudinem excreſceret, quàm vt vnius libri ſpatiis, hac præſertim forma commodè includi poſſent, in duas partes totam tractationem diuiſimus. Altera ſex prioribus libris continetur: altera nouem reliquos, vnà cum decimo ſexto ad comparationes quinque corporum regularium pertinente, quem ex Franciſco Fluſſate Candalla, vt Elementa hæc Geometrica euaderent perfectiora, adiicere voluimus, complectitur.

Digitized by Google

BENIGNO LECTORI.

QVONIAM ſuperiorem editionem Element-
rum Euclidis non ingratam fuiſſe Mathemat-
carum diſciplinarum ſtudioſis intelleximu
exhibemus tibi benigne Lector, alteram editio
nem priore illa multo locupletiorem: in qu
ſcilicet varia tum problemata, tum theoremata, quæ rebus Ma
thematicis magnum adiumentum allatura, longo vſu, atqu
experientia comprobauimus, & quæ in priore editione deſunt
adiecimus, plurimaque loca ſubobſcura clarioribus notis illu
ſtrauimus. Addidimus præterea nouam demonſtrationem vn
decimi axiomatis Euclidis, (quod in hiſce Commentariis e
tertiumdecimum) quo vult, Si in duas rectas lineas altera rect
incidens, internos ad eaſdemque partes angulos duobus rectis mi
nores faciat, duas illas rectas lineas in infinitum productas, coi-
turas tandem ad eas partes, vbi ſunt anguli duobus rectis mino-
res: addidimus, inquam, nouam demonſtrationem à nobis nu-
per inuentam, quam non iniucundam ſtudioſo Lectori futuram
ſperamus, quod eo principio tota doctrina de lineis parallelis,
quæ immenſa propemodum eſt, atque infinita, nitatur. Quan-
quam enim idem illud principium Arabes quoque olim demon-
ſtraſſe iam pridem acceperam: quia tamen eorum demonſtra-
tionem diu ac diligenter quæſitam videre mihi non licuit, (non-
dum enim ex Arabica in Latinam linguam conuerſa eſt) coa-
ctus ſum hanc meo, vt aiunt, Marte excogitare, vt nullus in eo
principio tam neceſſario iam dubitationi locus eſſet. Neque enim
Procli demonſtratio, quam ad propoſ. 28 lib. 1. Euclidis de re
eadem aſſert, omni ex parte abſoluta, ac Geometrica cenſeri po-
teſt; cuius

Digitized by Google

[illegible] rei cauſa eodem loco à nobis explicata eſt. Deinde ex Alexandrino inſcriptiones omnium figurarum regularium circulo, beneficio lineæ certa quadam ratione inflexæ, perfecimus: quod ante à Mathematicis deſiderabatur. Ex qua eadem linea via quædam & ratio ad circulum quadrandum (tot ſeculis à doctiſſimis viris exagitata) conficitur: quod ſuo loco docebitur. In definitionibus porrò quinti libri apertè oſtendimus, cur Euclides magnitudines proportionales & improportionales per æquemultiplicium habitudinem deſcribere coactus ſit. Poſtremo (vt alia omittam) omnes operationes fractionum vulgarium, quæ in Arithmetica practica declarari ſolent, Geometricè demonſtrauimus. Hæc ferè præcipua ſunt, quæ hac poſteriore editione ad Commentarios noſtros in Euclidem acceſſerunt. Cætera vel theoremata, vel problemata, quibus editio hæc poſterior priorem ſuperat, quæ ſanè plurima ſunt, & Euclidis propoſitionibus ſparſim inſerta, inter legendum facilè comperies, ſi vtramque editionem cum altera conferens attentius paulo conſiderabis. Nunc quia hæc Euclidis elementa oſtium atque aditum ad omnes alias diſciplinas Mathematicas reſerant, ac patefaciunt, operæ pretium fore duximus, antequam ad ipſa interpretanda aggrediamur, paucis commemorare, vndenam Mathematicæ diſciplinæ hoc nomen acceperint: quæ ſit earum diuiſio: à quibus primum ortæ, & per quos deinde ſingulæ fuerint excultæ: quanta ſit illarum præſtantia atque vtilitas; & ſi quæ ſunt alia rei noſtræ opportuna.

Digitized by Google

IN DISCIPLINA
MATHEMATICAS
PROLEGOMENA.

MATHEMATICÆ DISCIPLINÆ cur ſic dictæ ſunt.

DISCIPLINÆ Mathematicæ, quæ quidem c
quantitatem verſantur omnes, nomen acceperu
dictione Græca μάθημα, ſiue μάθησις, quæ ſignifi
diſciplinam, ſeu doctrinam. Cur autem hæ arte
quantitate agentes nomen diſciplinæ, vel doctrinæ
ter reliquas omnes ſolæ ſint adeptæ, duas potiſſim
cauſas apud probatos ſcriptores inuenio. Pythag
enim, atque Platonici exiſtimantes, animas rationales certo quod
ac determinato numero contineri, easque de corpore in corpus mig
re, (quod tamen Chriſtiana fides falſum eſſe perſpicuè docet) teſt
tur, eas nomen doctrinæ, ſiue diſciplinæ obtinere, quod maximè ex i
nanciſcamur recordationem, reminiſcentiamque illius ſcientiæ, q
anima noſtra, (vt eorum eſt error) antequam corpus informaret, e
prædita. Quod quidem facili, ac familiari quodam exemplo comp
bare nititur Plato in dialogo, qui Menon inſcribitur, vbi Socratem
troducit puſionem quendam interrogantem Geometrica quædam
quadrati dimenſione, ad quæ licet in principio reſponderit, vt pu
gradatim tamen aſcendens, eo deductus eſt, vt reſponderit id, qu
tandem dicturus fuiſſet, ſi diutiſſimè perdidiciſſet Geometriam. A
autem placet, ideo has artes præ cæteris nomen ſcientiæ, & doctrinæ
bi vendicare, quòd ſolæ modum rationemque ſcientiæ retineant. P
cedunt enim ſemper ex præcognitis quibuſdam principiis ad concl
ſiones demonſtrandas, quod proprium eſt munus, atque officium doct
næ, ſiue diſciplinæ, vt & Ariſtoteles 1. Poſteriorum teſtatur; neque v
quam aliquid non probatum aſſumunt Mathematici, ſed quand
cunque aliquid docere volunt, ſi quid ad eam rem pertinet corum
quæ ante docuerunt, id ſumunt pro conceſſo, & probato: illud ve
modo explicant, de quo ante nihil ſcriptum eſt. Quod quidem ali
artes, diſciplinæve non ſemper obſeruare videmus, cum plerunque i
confirmationem eorum, quæ oſtendere volunt, ea, quæ nondum ſun
explicata, demonſtratave adducant.

DISCIPLINARVM MATHEMAticarum diuiſio.

P*YTHAGOREI, quos deinde ſecuti ſunt omnes propemodum*
Mathematici, atque Philoſophi non pauci, Mathematicas diſci
plina

Digitized by Google

[...] uerſas in quatuor partes diſtribuerunt, *Arithmeticam, Muſicam, Geometriam, atq; Aſtronomiam. Cum enim omnis quantitas, in quam verſantur, ſit vel diſcreta, ſub qua omnes numeri, vel continua, ſub qua omnes magnitudines comprehenduntur, & vtraque tam ſecundum ſe, quàm comparatione alterius poſſit conſiderari, viſum fuit illis conſentaneum quatuor prædictas facultates inſtitui, quæ vtramque quantitatem pro duplici conſideratione diligenter contemplarentur. Itaque Arithmetica agit de quantitate diſcreta ſecundum ſe, inquirendo & accuratè explicando omnes numerorum proprietates, ac paſſiones. Muſica tractat eandem quantitatem diſcretam, ſiue numerum comparatum cum alio, quatenus nimirum ſonorum concentus reſpicit, atque harmoniam. Geometria de magnitudine, ſiue quantitate continua, ſecundum ſe quoque, vt immobilis exiſtit, diſputat. Aſtronomia deniq; eandem magnitudinem, vt eſt mobilis, conſiderat; qualia ſunt cæleſtia corpora, prout continuo motu cientur. Ad has autem quatuor ſcientias Mathematicas, quarum Arithmetica & Geometria puræ, Muſica verò atque Aſtronomia mixtæ dicuntur, omnes aliæ quouis modo de quantitate agentes, qualis eſt Perſpectiua, Geographia, & cætera huiuſmodi, vel facilè, vt ad capita, à quibus dependent, reduci poſſunt.*

ALIA ratione à Gemino antiquo Geometra, & ab aliis, vt auctor eſt Proclus in Commentariis, quos in primum Euclidis librum edidit, Mathematicæ diſciplinæ diuiduntur. Quam quidem diuiſionem, quoniam eleganter, copioſeque docet, ad quænam ſeſe extendant Mathematicæ diſciplinæ, fermè ad verbum ex Proclo iuxta interpretationem Franciſci Barocij Patricij Veneti excerptam hic ſubiicere ſtatui. Volunt itaque prædicti auctores, ſcientiarum Mathematicarum quaſdam in intellectilib. duntaxat ab omni materia ſeparatis, quaſdam verò in ſenſilibus, ita vt attingant materiam ſenſibus obnoxiam, verſari. Prioris generis ſtatuunt duas longè primas, præcipuasq; ſcientias, Arithmeticam & Geometriam: In poſteriori verò genere conſtituunt ſex, Aſtrologiam, Perſpectiuam, Geodæſiam, Canonicam, ſiue Muſicam, Supputatricem, atque Mechanicam. Aſtrologiam dicunt eſſe eam facultatem, quæ de mundanis diſſerit motibus, de corporis cæleſtium magnitudinibus, figuris & illuminationibus, à terraq; diſtantiis, ac de aliis huiuſmodi rebus. Huius rurſum tres conſtituũt partes, Gnomonicam, quæ in horarũ dimenſione, poſitu gnomonum exercetur: Metheoroſcopicam, quæ eleuationum differentias, ſiderumq; repertis diſtantiis, necnon multa alia & varia Aſtrologica perdocet theoremata: & Diopticam, quæ planetarum, cæterarumq; ſtellarum diſtantias huiuſcemodi Diopticis dignoſcit inſtrumentis. Perſpectiuam autem à Geometria gigni, atq; vti radiis viſoriis, tanquam lineis, & angulis, qui ex hiſce conſtituuntur oculorum radiis. Diuiditur autem in eam, quæ proprio nomine dicitur Perſpectiua, quæ quidem reddit

cauſam earum apparentiarum, quæ aliter, quam ſint, ſe ſe nobis aſ
re ſolent, ob eorum, quæ ſub viſum cadunt, alios ſitus & diſtantia
parallelarum coincidentia, vel quadratorum, tanquam circulor
aſpectionis: Et in vniuerſam ſpeculariam, quæ circa varias, mu
plicesq; verſatur refractiones: Nec non in eam, quæ Sciographi
hoc eſt, vmbrarum deſignatrix appellatur, quæ oſtendit, quæ rati
fieri poßit, vt ea, quæ in imaginibus apparent, haud inconcinna,
deformia ob deſignatorum diſtantias, altitudinesq; videantur. G
daſiam appellant eam ſcientiam, quæ res quantas metitur, vt ma
rialium rerum aceruos tanquam conos; & puteos, tanquam cyl
dros. Quod quidem non aſſequitur intellectilibus rectis lineis, vt G
metria, ſed ſenſilibus tantum, interdum quidem certioribus quod
pacto, vt radiis Solaribus; interdum verò craßioribus, vt ſparti
perpendiculo. Diuiditur hæc, vt Geometria, in eam partem, quæ p
na, & in eam, quæ ſolida dimetitur. Canonicam, ſiue Muſicam,
cant eam ſcientiam, quæ apparentes concentuum conſiderat ration
ſenſuſque vbique vtitur adminiculo; & quæ (vt Plato inquit) ta
exiſtit, vt mentis aures ipſas præpoſuiſſe videatur. Supputatrix ead
apud ipſos eſt, quæ apud nos Arithmetica practica. Hæc enim nume
conſiderat, non vt in intellectilibus, ſed vt ſunt in ſenſilibus ipſis. M
chanica denique, quæ in cognitione rerum ſenſilium, materiæque c
iunctarum conſiſtit, apud ipſos multiplex eſt. Quædam enim eſt
ſtrumentorum effectrix, quæ ὀργανοποιητικὴ vocatur, eorum, inqua
quæ gerendis ſunt bellis idonea, qualia ſane Archimedes etiam fer
conſtruxiſſe, Syracuſas terra marique obſidentibus reſiſtentia. Q
dam mirabilium prorſus rerum effectrix, quæ θαυματοποιητικὴ, di
tur; quippe quæ alia quidem ſpiritibus maximo cum artificio c
ſtruit, quemadmodum etiam Cteſibius, atque Heron operantur, a
autem ponderibus, quorum motus quidem inæquilibrium, ſtatus v
æquilibrium eſſe cauſam cenſendum eſt, vt Timæus etiam detert
nauit; alia verò neruis, ſparti[ſq]; animatas conuolutiones, ac mo
imitantibus: Quædam eſt æquilibrantium omnino, & eorum, q
centroponderantia vocantur, cognitio: Quædam denique ſphærar
effectrix, quæ σφαιροποιΐα appellatur, ad cæleſtium circumuolut
num imitationem, qualem Archimedes etiam fabricatus eſt. Atq
vt vno verbo dicam, omnis, quæ materiam mouendi vim habet.
igitur ſunt diſciplinæ Mathematicæ apud antiquos. Militarem aut
artem, eam, inquam, quæ ad inſtruendas, coordinandaſq; perti
acies, quam Græci τακτικὴν vocant, vnam aliquam ex Mathema
ces partibus dicendam eſſe non cenſent, vt quidam alij voluere, ſed
eam volunt modo quidem arte ſupputandi, vt in enumerandis leg
nibus; modo verò Geodæſia, vt in diuidendis, dimetiendiſque caſt
metationi ſpatiis in campo. Quemadmodum neque Hiſtoricam, neq
medendi artem Mathematices partem vllam eſſe dicunt, licet ſæpe

Digitized by Google

tum Hiſtorici, tum etiam Medici Mathematicis vtuntur theo-rematum; Rerum quidem geſtarum ſcriptores, vel climatum ſitus referunt vel Vrbium magnitudines, & diametros, vel ambitus, cir-cumferentias colligendo: Medici verò quamplurimas res in arte ſua hu-iuſmodi viis dilucidando. Nam vtilitatem, quæ in Medicinam ab Aſtrologia peruenit, ipſe etiam Hippocrates oſtendit, ac fere omnes, quicunque aliquid de opportunis temporibus, locisq; dixere. Eadem ſiquidem ille etiam, qui aciebus inſtruendis operam accommodat, Mathematicis quidem vtetur theorematibus, nec tamen ob hoc erit Mathematicus, quamuis interdum quidem volens eam, quæ numero-ſiſſima pauciſſimam oſtendere multitudinem, caſtra ſuosque exercitus ad figuram circuli formet; interdum verò ad figuram quadranguli, vel quinquanguli, vel alterius cuiuſdam multanguli, vbi plurimam apparere cupit. Hæc igitur fere ſunt, quæ nobis antiqui Mathematici de harum ſcientiarum partitione reliquerunt.

INVENTORES MATHEMATI-carum diſciplinarum.

OMNES *diſciplinas Mathematicas à varijs & diuerſis aucto-ribus ortum originemque duxiſſe, perſpicuè hiſtoria teſtantur: illas verò ſingulas nequaquam ſummam adeptas eſſe perfectionem ſtatim ab initio ſed paulatim eas ab imperfectis ad perfectiora proceſ-ſiſſe, memoria quoque proditum eſt. Ariſthmetices enim inuentores primi creduntur Phœnices, propter frequentes mercaturas, atq; com-mercia, vt auctor eſt Proclus. Quam mirum in modum poſtea Pytha-goras, eiusque ſucceſſores, necnon Ægyptij, Græci denique atque Ara-bes amplificarunt, variisque problematis, atque theorematis illuſtra-runt. Muſicam deinde à Mercurio primum eſſe inuentam, multi ſcri-ptores tradunt, quam ipſe poſtea Orpheo inſigni Muſico commendauit, atque concredidit; Hic autem Thamyri & Lino. Linus verò Hercu-li: & ſic ſucceſſionibus continuis per alios Muſicos præclaros ad noſtra vſque tempora manauit. Geometria verò, auctore Proclo, ab Ægy-ptijs reperta eſt, ortumq; habuit ab agrorum dimenſione. Cum enim anniuerſaria Nili inundatio agrorum terminos, ac limites ita con-funderet, vaſtaretque vt nemo agrum dignoſcere poſſet ſuum, cœpe-runt Ægyptij animos ad rationem menſurandorum agrorum appli-care, vt eo modo cuilibet, quod ſuum erat, redderetur. Quæ quidem ratio agri metiendi, quanquam tunc temporis adhuc rudis admo-dum fuerit, ac impolita, ab ipſo tamen officio Geometria eſt appellata. Γεωμετρεῖν enim, ſiue γῆν μετρεῖν idem ſignificat, quod terram me-tiri. Cæterum paulatim deinde Geometria cœpta eſt expoliri, & non contenta his finibus, ſeſe ad corpora etiam cœleſtia dimetienda con-uertit, traditq; principia vniuerſæ Aſtronomiæ, Perſpectiuæ, Coſmo-graphiæ, & aliis diſciplinis quamplurimis, quæ ex ipſa, veluti radice,*

dependent. Hanc Thales Mileſius ex Ægypto in Græciam pr tranſtuliſſe fertur: Deinde eam inſignes Philoſophi ac Mathe plurimis acutiſſimisq; demonſtrationibus locupletarunt, atque uarunt: Inter quos hi ſunt præcipui ex Veteribus: Pythagoras, Ana goras Clazomenius, Hippocrates Chius, Plato, Oenopides, Zeno Brito, Antipho, Theodorus, Theætetus, Ariſtarchus, Eratoſthe Archytas Tarentinus, Euclides, Serenus Hypſicles Alexandrinus, chimedes Syracuſius, Apollonius Pergæus, Theodoſius Tripolita, leus Romanus, qui & Menelaus, Theon Alexandrinus, Ptolem Eutocius Aſcalonita, Pappus, Proclus, & alij penè innumeri, omnes longum eſſet recenſere. Aſtronomiam denique non pauc Atlante primum inuentam eſſe autumant: Vnde ob eximiam, primus inter mortales præditus erat, Aſtronomiæ cognitionem, e tam eſſe Volunt fabulam, illum ſuis humeris cælum ſuſtinare. putant Chaldæos diuturna obſeruatione (quod etiam Cicero affir in libro de Diuinatione) ſiderum ſcientiam adinueniſſe. Alij Æ ptios primos huius ſcientiæ faciunt inuentores: Alij Aſſyrios: Alij nique gloriam hanc, & laudem Babylonijs eſſe deferendam, cenſe Hac autem in ſcientia, Vt eſt præſtantiſſima, ita quoque maximè il ſtres auctores claruerunt, quod non eſt huius loci declarare. Cæteri præcipuis hiſce quatuor diſciplinis Mathematicis inuentis, reliq omnes de quantitate quouis modo agentes, facilè ex ipſis tanqu riuuli ex fonte, deriuatæ ſunt, atque deducta.

NOBILITAS ATQVE PRÆSTANTIA Scientiarum Mathematicarum.

QVONIAM diſciplinæ Mathematicæ de rebus agunt, quæ a que Vlla materia ſenſibili conſiderantur, quamuis re ipſa mat riæ ſint immerſæ; perſpicuum eſt, eas medium inter Metaphyſica & naturalem ſcientiam obtinere locum, ſi ſubiectum earum conſid remus, Vt rectè à Proclo probatur. Metaphyſices etenim ſubiectum omni eſt materia ſeiunctum, & re, & ratione: Phyſices Verò ſubi ctum & re, & ratione materiæ ſenſibili eſt coniunctum: Vnde cu ſubiectum Mathematicarum diſciplinarum extra omnem materia conſideretur, quamuis re ipſa in ea reperiatur, liquido conſtat, h medium eſſe inter alia duo. Si Verò nobilitas, atque præſtantia ſcien tiæ ex certitudine demonſtrationum, quibus Vtitur, ſit indicanda haud dubio Mathematicæ diſciplinæ inter cæteras omnes princip habebunt locum. Demonſtrant enim omnia, de quibus ſuſcipiunt di putationem, firmiſſimis rationibus, confirmantque, ita Vt Verè ſcien tiam in auditoris animo gignant, omnemque prorſus dubitationem tollant: Id quod aliis ſcientiis Vix tribuere poſſumus, cum in eis ſæ penumero intellectus multitudine opinionum, ac ſententiarum Varie tate in Veritate concluſionum indicanda ſuſpenſus hæreat, atque in

certu

Digitized by Google

…rei fidem apertè faciunt tot Peripateticorum ſectæ, (vt alios omittam Philoſophos ſilentio inuoluam) quæ ab Ariſtotele, veluti a fonte aliquo, exortæ, adeo & inter ſe, & nonnunquam à ſummo Ariſtotele diſſident, vt prorſus ignores, quidnam ſibi velit …, vtrum de nominibus, an de rebus potius diſputationem inſtituat. Hinc fit, vt pars interpretes Græcos, pars Latinos, alij Arabes, alij Nominales, alij denique Reales quos vocant, (qui omnes tamen Peripateticos ſe eſſe gloriantur) tanquam ductores ſequantur. Quod quam longè à Mathematicis demonſtrationibus abſit, neminem latere exiſtimo. Theoremata enim Euclidis, cæterorumque Mathematicorum, eandem hodie, quam ante tot annos, in ſcholis retinent veritatis puritatem, rerum certitudinem, demonſtrationum robur, firmitatem. Huc accedit id, quod Plato ait in Philebo, ſeu dialogo, qui de ſummo bono inſcribitur; Eam ſcientiam eſſe digniorem, præſtantioremque, quæ magis ſynceritatis, veritatiſque eſt amans. Cum igitur diſciplinæ Mathematicæ veritatem adeo expetant, adament, excolantque, vt non ſolum nihil, quod ſit falſum, verum etiam nihil, quod tantum probabile exiſtat, nihil denique admittant, quod certiſſimis demonſtrationibus non confirment, corroborentque, dubium eſſe non poteſt, quin eis primus locus inter alias ſcientias omnes ſit concedendus.

VTILITATES VARIÆ MATHEMATICARUM diſciplinarum.

NON *ſolum vtiles, verum etiam neceſſariæ admodum cenſeri debent diſciplinæ Mathematicæ cùm ad alias artes perfectè perdiſcendas, tum ad rem etiam publicam rectè inſtituendam, & adminiſtrandam. Neq; enim ad Metaphyſicam, vt eleganter oſtendit Proclus, vllis patet aditus, niſi per Mathematicas diſciplinas. Nam ſi à rebus ſenſibilibus, quas Phyſicus conſiderat, ad res ab omni materia ſenſibili ſecretas, ſeiunctaſque, quas contemplatur Metaphyſicus, vires, aciemque noſtri intellectus attollere abſque vllo medio tentemus, noſmetipſos excæcabimus, non ſecus, ac ei contingit, qui è carcere aliquo tenebricoſo, in quo diu latuit, in lucem Solis clariſſimam emittitur. Quam ob rem, antequam à rebus phyſicis, quæ materiæ ſenſibus obnoxiæ ſunt coniunctæ, ad res Metaphyſicas, quæ ſunt ab eadem maximè auulſæ, intellectus aſcendat, neceſſe eſt, ne harum claritate offundatur, prius eum aſſuefieri rebus minus abſtractis, quales à Mathematicis conſiderantur, vt facilius illas poſſit comprehendere. Quocirca rectè Diuinus Plato Mathematicas diſciplinas erigere animum, & ad diuinarum rerum contemplationem exacuere mentis aciem affirmat. Quantum verò emolumenti hæ diſciplinæ ad ſacras literas rectè percipiendas, interpretandaſque conferant, multis pulcherrimè nobis exponit B. Auguſtinus lib. 2. cap. 16. de Doctrina*

g* 4 Chri-

Chriſtiana, demonſtrans, numerorum inſcitia multa non intellig
multis, quæ translatè, ac myſticè poſita ſunt in Scripturis. Cuius
exempla non pauca in medium adducit, eandemque ſententiam l
gè poſt pluribus verbis repetit eodem libro, capite 37. Hoc idem di
D. Hieronymus tomo 1. Epiſt. 5. aſſerens magnam ineſſe numeris vi
ad multa myſteria in Scripturis intelligenda: Quo item loco, Geon
triam magnam afferre Theologis vtilitatem perhibet. Rurſum B. A
guſtinus loco iam citato, capite 16. quem paulo ante retuli, teſtat
Muſicam pernecceſſariam eſſe doctori Chriſtiano, ſubiungens pa
poſt, cap. 19. Theologos debere etiam Geographia diligenter eſſe inſti
ctos. Quod non ignorans Diuus Gregorius Nazianzenus, ſumm
laudibus Diuum Baſilium Præceptorem ſuum extollit, quod in Aſt
logia, Geometria, numerorum cognitione, cæteriſque ſcientiis Math
maticis, fuerit non mediocriter verſatus. Non parum etiam cond
cunt hæ artes ad philoſophiam naturalem, moralem, Dialecticam, &
ad reliquas id genus doctrinas, arteſque perfectè acquirendas, vt pe
ſpicuè docet Proclus. His adde, quod omnia volumina antiquoru
philoſophorum, maximè Ariſtotelis, & Platonis, quos merito duc
nobis ſequendos ad bene recteque philoſophandum proponimus, e
rumque ferè omnium interpretum cum Græcorum, tum Latinoru
exemplis Mathematicis ſunt referta, ea potiſſimum de cauſa, vt e
quæ alioquin multis obſtructa difficultatibus videbantur eſſe p
exempla huiuſmodi clariora, magiſque perſpicua fierent; quæ procu
dubio nulla ratione percipiet is, qui ſcientiarum Mathematicarun
omnino eſt expers. Quid? quod olim nemo auſus eſſet celeberrimun
Diuini Platonis gymnaſium frequentare, qui prius optimè Mathe-
maticis diſciplinis non fuiſſet exornatus? Vnde pro foribus Academiæ
hoc ſymbolum dicitur pinxiſſe, ἀγεωμέτρητος οὐδεὶς εἰσίτω. Imo vero
idem Plato in Philebo, omnes diſciplinas ſine Mathematicis viles eſſe
non dubitauit aſſerere. Qua de cauſa in 7. de Rep. præcipit, Mathe-
maticas diſciplinas primo omnium eſſe addiſcendas, propter varias, ac
multiplices earum vtilitates, (vt copioſe ſcribit) non ſolum ad reli-
quas artes rectius percipiendas, verum etiam ad Remp. benè admini-
ſtrandam: Cuius ego rei multa exempla cum præteriti temporis, tum
noſtræ ætatis, ſi id neceſſe foret, in medium poſſem adducere. Ibidem
clariſſimis verbis affirmat, præcipuè Arithmeticos natura ad omnes
doctrinas aptos eſſe, idoneoſque, adeo vt etiamſi nullam aliam no-
bis hæ ſcientiæ afferrent vtilitatem, (cum tamen infinita propemo-
dum alia commoda ex ipſis percipiamus) perdiſcendas tamen omni
ſtudio eas eſſe ſtatuat, quod ingenium, mentemque ad reliquas ar-
tes omnes capeſſendas aptiorem reddant, & acutiorem. Quod qui-
dem experientia ipſa magiſtra facilè comprobatur. Videmus enim
eos, quorum ingenium facilè, & nullo negotio hiſce diſciplinis ac-
commodatur, fructus non exiguos ex aliis ſcientiis percipere: Contra
vero eos,

Digitized by Google

[illegible], qui ad haſce facultates idonei minimè reperiuntur, prorſus [illegible] eſſe ineptos. Quare iure optimo Plato tam frequenter in ſuis [illegible] iterum atque iterum harum diſciplinarum vtilitatem nobis [illegible], atque commendat, præſertim in 7. de Rep. in Epinomide, ſeu Philoſopho, in Timæo, vbi Mathematicas diſciplinas omnes eruditionis [illegible] viam appellat, & pleriſque alijs in locis, quibus nunc enumerandis breuitatis memor de induſtria ſuperſedeo. Ad has omnes vtilitates accedit maxima iucunditas, atque voluptas, qua cuiuſque animum his artibus colendis, exercendiſque perfunditur. Sunt enim hæ præcipuæ ex ſeptem artibus liberalibus, in quibus nõ ſolùm ingenui adoleſcentes, verùm etiam nobiles viri, Principes, Reges, ac Imperatores ad honeſtiſſimam, maximeque liberalem oblectationem animi, quam ſumma etiam cum vtilitate coniunctam pariunt, diu multumque verſari ſolebant. Quorum exemplum multos adhuc noſtra hac ætate [illegible] conſpicimus. Teſtatur, magnam animi voluptatem ex his artibus percipi, Diuinus Plato in 7. de Rep. vbi audacter dicit, & non temerè confirmat, oculum animæ, qui ab alijs ſtudijs excæcatur, & ſo[illegible]que à Mathematicis tantùm diſciplinis recreari, excitarique rurſus ad eius, quod eſt, contemplationem. Omitto plurima alia teſtimonia Platonis, aliorumque grauiſſimorum Philoſophorũ, quibus harum diſciplinarum vtilitas cum neceſſitate, & delectatione coniuncta, atque præſtantia abundè poteſt comprobari.

EVCLIDIS ATQVE GEOMETRIÆ commendatio.

QVISNAM *fuerit Euclides horum elementorum inſtitutor, (vt aliquid etiam de auctore, quem nobis interpretandum propoſuimus, deque Geometria vniuerſa, in medium proferamus) & quo tempore floruerit, non ſatis conuenit inter ſcriptores. Multi enim, vt videtur vulgata elementorum Euclidis ſecundum Campanum, & Theonem editio, atque eorundem inſcriptio, exiſtimant, eum fuiſſe Philoſophum illum Megaris natum, quod oppidum Iſthmo adiacet, Socratiſque auditorem, qui ſectam inſtituit à ſe dictam Megaricam, quæ deinde Dialectica appellabatur, eò quòd ſectatores illius interrogando, reſpondendoque (quod proprium eſt munus Dialecticorum) libros conſcriberent. De quo multa ſunt in Diogene Laertio de vitis Philoſophorum: Scribit & de hoc Cicero Quæſt. Acad. lib. 2. vbi ait. Poſt Euclides Socratis diſcipulus Megareus, à quo ijdem illi Megarici dicti, qui id bonum ſolum eſſe dicebant, quod eſſet vnum, & ſimile, & idem, & ſemper. Fauet his auctoribus non parum id, quod Valerius Maximus octauo libro ſcribit, nimirum à Platone, qui Socratis etiam diſcipulus fuit, conductores aræ ſacræ de modo, & forma eius ſecum ſermonem conferre conatos, ad Euclidem Geometram ire iuſſos. Verùm ſi Proclo nobili ſcriptori, & alijs auctoribus antiquis credendum*

g* 5 *eſt,*

Digitized by Google

eſt, Euclides hic noſter iunior fuit illo Megareo floruitq; tempore Pto-
lemæi primi, qui Ægypto, poſt Alexandri magni mortem, Olympia-
de 115. & ante Chriſtum natum anno 319. cœpit imperare, vt Ioanne
Lucidus refert. Quod quidem verius eſſe crediderim, hoc maximè ad-
ductus argumento, quod Diogenes Laertius omnia opera Euclidis il-
lius Megarici diligentiſſimè enumerans, nullam prorſus faciat men-
tionem huius celeberrimi voluminis de Geometricis elementis con-
ſcripti, in quo perpetuam, & nunquam morituram famam ſibi com-
parauit Euclides, & gloriam. Neq; enim putandum eſt, Diogenem in
monumentis Philoſophorum exercitatiſſimum, hoc tam inſigne opus
vel ſcientem voluiſſe præterire, vel ab Euclide ſuo eſſe compoſitum i-
gnoraſſe. Itaq; Euclides noſter, Geometra acutiſſimus, ab illo Mega-
reo Philoſopho longè alius eſt, qui cùm in doctrina Academicorum eſ-
ſet ſumma cum laude verſatus, animum totum ad Mathematica
diſciplinas tranſtulit; in quibus ita excelluit, vt concordi omnium iu-
dicio principem inter Mathematicos ſibi locum iure optimo vendica-
rit. Scripſit autem volumina ad rem Mathematicam ſpectantia non
pauca, in quibus eximia eius diligentia, admirandaq; doctrina faci-
lè elucet: qualia ſunt eius Optica, Catoptrica, Elementares inſtitutio-
nes ad Muſicam capeſſendam pertinentes, Phænomena, atq; Datorũ
liber, opus de Diuiſionibus, quod nonnulli ſuſpicantur eſſe libellum il-
lum acutiſſimum de Superficierum diuiſionibus, Machometo Bagda-
dino aſcriptum, qui nuper Ioannis Dee Londinenſis, & Federici Com-
mandini Vrbinatis opera in lucem eſt editus. Conſcripſit item Conica
elementa, auctore Proclo, quæ tamen ad nos nondum peruenere. & a-
lia id genus opuſcula. Maximè verò hoc volumen Elementorum Geo-
metricorum, nunquam omnium conſenſione ſatis laudatum, tam
mirabili ordine, tantaq; eruditione contexuit, vt nullus vnquam eo-
rum, qui ſimilia conſcripſerunt elementa, (conſcripſerunt autem, vt
ait Proclus, non pauci) par illi extiterit, nedum ipſum ſuperarit. In
quo quidem, vt ſummum ingenij acumen demonſtrauit, ita non o-
mnia, quæ ad rem Geometricam pertinent, in vulgus edenda, ſed ea
duntaxat, quæ viſa ſunt eſſe neceſſaria, atq; vtilia ad communem o-
mnium vtilitatem, argumentis & rationibus firmiſſimis cenſuit eſſe
comprobanda. Cæterùm, quanta ſit horum Euclidis Elementorum
Geometricorum, ac proinde vniuerſæ Geometriæ præſtantia, atq; vti-
litas, partim ex ijs, quæ antè ſcripſimus, partim ex ijs, quæ nunc dice-
mus, non obſcurè percipi poteſt. Dicuntur enim Geometrica elementa,
eam ob cauſam, quòd ſine ipſis nullum opus Mathematicum poſſimus
aggredi, ne dicam fructum aliquem inde percipere. Omnes ſiquidem
Mathematicarum rerum ſcriptores, vt Archimedes, Apollonius,
Theodoſius, &c. in ſuis demonſtrationibus vſurpant hæc Euclidis ele-
menta, tanquam principia omnibus iam diu perſpecta, atq; demon-
ſtrata. Quamobrem ſicut is, qui legere vult, elementa literarum

diſci-

Digitized by Google

prius, & illis aſſiduè repetitis vtitur in vocibus omnibus exponendis, ſic qui alias diſciplinas Mathematicas deſiderat ſibi reddi familiares, elementa hæc Geometrica plenè ac perfectè calleat, neceſſe eſt. Ex his etenim elementis, veluti fonte vberrimo, omnis latitudinum, longitudinum, altitudinum, profunditatum, omnis agrorum, montium, inſularum dimenſio, atque diuiſio, omnis in cælo per inſtrumenta ſiderum obſeruatio, omnis horologiorum ſcioterricorum compoſitio, omnis machinarum vis, & ponderum ratio, omnis apparentiarum variarum, qualis cernitur in ſpeculis, in picturis, imaginibus, & in aere variè illuminato, diuerſitas manat. Ex his, inquam, elementis machinæ totius huius mundanæ eſt inuentum medium, atque centrum; inuenti cardines, circa quos perpetuò conuertitur, orbis deniquetotius explorata figura, ac quantitas. Oſtēditur atq; demonſtratur vnius huius ſcientiæ vt cæli vniuerſi, ſiderumq́; perennis conuerſio, ortus, occaſus, abitus, reditus, aſcenſus, deſcenſus, diei ac noctis, temporumq; toto anno per omnem terrarum ſitum, & mundi inclinationem, varietas. Coniunctiones item Planetarum, oppoſitiones, aſpectuſq; varij tam expeditè cognoſcuntur, vt & loca illorum in cælo, & eclipſes, ſeu Solis ac Lunæ defectiones certiſſimè, antequam fiant, in omne poſterum tempus à Mathematicis præſciri queant. Hoc deniq; ingens Dei, & Naturæ opus, mundum, inquam, totum, mentis noſtræ oculis, munere ac beneficio Geometriæ perſpectum conſpicimus. Adde Geometriam hominibus plurima, quæ penitus incredibilia eſſe videntur, omniumq; fidem ſuperant, perſpicua facere, credibiliaq; eſſe oſtendere: Quale eſt illud, quod de Archimede Syracuſio teſtantur hiſtoriæ. Cùm enim Hieron Syracuſanorum Rex nauem, quam Ptolemæo Ægyptiorum Regi mittere ſtatuerat, tantæ eſſet molis fabricatus, vt eam omnes vnà Syracuſij à loco dimouere minimè valerent: Archimedes Geometra peritiſſimus, vnius Geometriæ viribus fretus Regi promiſit, ſe effecturum, vt ipſam ſolus Rex abſque vllo labore ſubduceret. Quod cùm præſtitiſſet, in conſpectu omnium Rex ſtupefactus exclamaſſe perhibetur; Ab hac die, quidquid dixerit Archimedes, illi credendũ eſt. Non diſſimile huic videtur mihi eſſe pulcherrimũ illud factum, quod idem Archimedes ope Geometriæ geſſit Syracuſis, quando corona ex auro argentoq; conſtata, quam Rex ſummo ſtudio fabricari iuſſerat, nõ diſſoluta, ſingula auri & argenti pondera, quæ inter ſe aurificis fraude ac dolo commiſta erant, ſubtiliſſimè oſtendit. Neq; ſilentio præteriri debet, eundem Archimedem robore ac efficacia demonſtrationũ Geometricarum inuictum ſæpenumero iactitaſſe, ſi haberet terram aliam, in qua pedem figeret, hanc noſtrã, quam incolimus, è loco ſe commouere poſſe. Pari ratione, datis viribus quibuſcunq;, pondus quodcunq; ſe poſſe mouere. Et alia id genus, non ſolùm ab Archimede, verùm etiam ab alijs præclaris, & illuſtribus Geometris patrata eſſe, memoriæ proditũ eſt.

Tantum

Tantum deniq; nomen vna hac Geometria Archimedi peperit, vt Marcellus Romani exercitus Imperator, contra quem diu Syracuſanam vrbem defenderat Archimedes, machinis quibuſdam per Geometricas demonſtrationes adinuentis, & conſtructis, in expugnatæ vrbis direptione, ac cæde ciuium vnius Archimedis ſaluti publico edicto cauerit: quem vbi contra imperium ſuum & voluntatem à gregario quodam milite interfectum cognouit, vehementer doluit, eumq; honorem mortuo habuit, quem viuo habere non potuit. Cuius ſepulchrum Cicero à ſe, cùm in Sicilia Quæſtoris officio fungeretur, repertum eſſe, mirandum in modum gloriatur. Vnde mirari nemo debet, cur in ſummo ſemper honore apud Græcos fuerit Geometria. Accedit quoq; ad præſtantiam vtilitatemq; Geometriæ, quòd cùm demonſtrationes Geometricæ ſint maximè illuſtres, nemo ſine ipſis ſatis perſpiciet, quæ ſit vis demonſtrationum, nemoq; eiſdem deſtitutus perfectus erit artifex methodi. Quod quidem ingenuè fatetur Galenus inſignis Philoſophus, ac Medicorum Princeps, in libro, quem de libris proprijs inſcripſit. Is enim inſtructiſſimus rebus Dialecticis, cùm ſcholas Peripateticorum ac Stoicorum ſui temporis percurriſſet omnium, & præcepta mira cum animi ardore ſtudioq; arripuiſſet, nihil ferè ab ipſis audiſſe ſe teſtatur, quod ad demonſtrationis cognitionem pertineret, quinimò pleraque eorum, quæ tradiderant, ab illis in controuerſia poſita, nonnulla etiam naturali rationi pugnantia reperiſſe. Ita vt ad Pyrrhoniorum ferè (erant Pyrrhonij Philoſophi, qui nihil decernebant, ſed de omnibus dubitabant) hæſitantiam deuenturus fuerit, niſi Arithmeticæ, Geometriæ, Dialecticæq; (quibus artibus ab auo & patre fuerat inſtitutus) eſſet cognitione ſcientiaq; reuocatus. Vnde ſuadet, ſequendos eſſe characteres illos Arithmeticos, & linearum demonſtrationes. Plato etiam cùm ob alias, tum ob eam etiam cauſam diſcendam eſſe Geometriam dixit, quòd eius cognitio maximè ſit vtilis, vt aliæ artes facilius & rectius percipiantur. Poſtremò eſt hæc ſumma laus Geometriæ, omnibusq; modis prædicanda, quòd non hæſit in exiguis & inferioribus hiſce machinis, à quibus originem traxit, ſed euolauit in cælum vſque, & humanas mentes humi abiectas in illam rurſus cæleſtem ſedem inuexit, & admirandam mundi huius fabricam, eiusq; adminiſtrationem & gubernationem noſtro intellectui ſubiecit.

DIVISIO GEOMETRIÆ ET ELEmentotum Euclidis.

GEOMETRIA *diuiditur in Planorum contemplationem, quæ generali vocabulo Geometria dicitur, & in doctrinam Solidorum, quam proprio ac peculiari nomine Stereometriam appellant Mathematici. Nam Geometria vniuersè ſibi hunc ſcopum proponit, vt plana, aut ſolida vel conſtituat, vel conſtituta inter ſe comparet, aut diuidat. Neque verò mirum alicui videri debet, quòd cùm tria*

ſint

genera magnitudinum, linea, ſuperficies, & corpus, ſolùm de iis poſterioribus extent propria contemplationes, ut diximus: autem de lineis, vel etiam punctis. Non, inquam, debet videri ... m, quoniam, ut ait Proclus, Geometria potiſſimùm circa figuras ... tur, quæ in planis duntaxat, vel etiam ſolidis conſiſtunt omnes. ... enim puncta, vel lineæ figuram ullam conſtituunt ſine planis ... ſolidis, ac proinde neceſſe non erat, propriam de punctis, & lineis ... tatem conſtituere; Superficiebus verò, ſiue planis, & corporibus, ... ſſe maximè conueniebat, ut proprias nanciſcerentur tractatio... Volens igitur ſummus harum rerum artifex Euclides in hiſce ... mentis perfectam, & omnibus numeris abſolutam tradere cogni... nem rerum Geometricarum, in prioribus ſex libris agit de planis, ... poſterioribus verò quinque de ſolidis acutiſſimè diſputat, eorumque proprietates maximè illuſtres perueſtigat. Quoniam verò cùm res o... mes Geometricæ, tum præſertim ſolida illa quinque regularia, quæ corpora Platonica dici ſolent, perfectè tractari non poterant, abſque linearum commenſurabilium, atque incommenſurabilium notitia; ... verò quàm plurimæ magnitudines ſub menſuram cadere nulla ratione abſque earundem linearum cognitione poſſunt, cùm earum latera ſæpenumerò ſint talia, ut ea communis & nota menſura dati ... nequeat, ut liquidò conſtat iis, qui aliquando demonſtratio... es Geometricas in opus contulerunt, atque uſum: idcirco ut hiſce e... lementis Geometricis complecteretur omnia documenta ad magnitu... dinum intelligentiã, dimenſionemque requiſita, Stereometriæ ſuæ præ... poſuit decimũ librum, in quo ſubtiliter & copioſè de huiuſmodi lineis diſſerit. Intelligens rurſum Euclides, neque hanc tractationẽ linearum commenſurabiliũ & incommenſurabilium ſine numerorũ cognitione poſſe conſiſtere, ante decimum librum agit de numerorum paſſionibus, ... que copioſè & diligenter tribus libris, qui hunc antecedũt, eſt perſe... cutus. Quamobrem totũ hoc volumen elementorũ Geometricorũ quin... decim libris comprehenſum (quorum quidem priores tredecim ſine ulla controuerſia Euclidi aſcribuntur ab omnibus; poſteriores verò duo à nonnullis Hypſiclis Alexandrini eſſe creduntur) ſecari rectè poterit in quatuor partes, ita ut prima pars contenta ſex prioribus libris agat de planis; Secunda tres ſequentes complectens, paſſiones numerorum perſcrutetur; Tertia, quam ſolus decimus conſtituit liber, de lineis commenſurabilibus, incommenſurabilibuſque diſputet; Quarta deniſque reliquis quinque libris abſolutã ſcientiam ſolidorũ, ſiue corporum complectatur. Prima pars rurſum triplex eſt; Nam in prioribus quatuor libris agitur de planis abſolutè, inueſtigando eorum æqualitatem & inæqualitatem: In quinto verò libro de proportionibus magnitudinum in genere diſputatur: In ſexto denique proportiones figurarum planarum diſcutiuntur. Quid verò Euclides in ſingulis aliis libris pertractet, propriis in locis exprimemus.

QVID

Digitized by Google

QVID PROBLEMA, QVID THEOREMA, quid Propoſitio, & quid Lemma apud Mathematicos.

DEMONSTRATIO *omnis Mathematicorum diuiditur ab antiquis ſcriptoribus in Problema, & Theorema. Problema vocant eam demonſtrationem, quæ iubet, ac docet aliquid conſtituere. Vt ſi quis conetur demonſtrare, ſupra lineam rectam finitam poſſe triangulum æquilaterum conſtitui, appellabitur huiuſcemodi demonſtratio problema, quoniam docet, qua ratione triangulum æquilaterum conſtitui debeat ſupra rectam lineam finitam. Dictum eſt autem hoc genus demonſtrationum Problema, ad ſimilitudinem problematis Dialectici. Sicut enim apud Dialecticos problema dicitur quæſtio illa, cuius vtraque pars contradictionis (vt ipſi loquuntur) eſt probabilis, qualis hæc eſt quæſtio; An totum diſtinguatur realiter a ſuis partibus ſimul acceptis: Sic etiam quæſitum illud apud Mathematicos, quo aliquid iubent conſtruere, & cuius contrarium effici etiam poteſt, problema appellatur. Vt ſi quis proponat ſe demonſtraturum, ſupra lineam rectam finitam triangulum æquilaterum poſſe conſtitui, efficiet problema, quia & triangulum non æquilaterum, nempe Iſoſceles, vel ſcalenum, ſupra eandem lineam conſtitui poteſt. Pari ratione, qui inſtituit angulum rectilineum ſecare biſariam, problema nobis exhibet, propterea quòd angulus idem diuidi poteſt in partes non æquales. Eſt tamen diſcrimen non paruum inter Dialecticorum & Mathematicorum problema. Nam in problemate Dialectico vtrauis pars contradictionis ſuſcepta confirmatur tantum probabiliter, ita vt intellectus cuiuſque ambigat, vtrànam illius pars vera ſit: In Mathematico verò, quamcunque quis partem elegerit, eam firma demonſtratione, ita vt nihil omnino dubij ſit reliquum, comprobabit. Si enim Geometra ſtatuat ex puncto quolibet lineæ rectæ propoſitæ lineam perpendicularem educere, efficiet vtique hoc ipſum ratione conſtanti, & euidenti: Eodem modo dicendum eſt, ſi ex eodem puncto velit educere lineam non perpendicularem. Theorema autem appellant eam demonſtrationem, quæ ſolam paſſionem aliquam, proprietatemve vnius, vel plurium ſimul quantitatum perſcrutatur. Vt ſi quis optet demonſtrare, in omni triangulo tres angulos eſſe æquales duobus rectis, vocabunt talem demonſtrationem Theorema, quia non iubet, aut docet triangulum, aut quippiam aliud conſtruere, ſed contemplatur tantummodo trianguli cuiuslibet conſtituti paſſionem hanc, quòd anguli illius duobus ſint rectis æquales. Vnde à contemplatione ipſa, hæc demonſtratio theorema dicitur. In theoremate fieri nulla ratione poteſt, contradictionis vtraque pars vera vt ſit. Si enim quis demonſtret, omnes angulos trianguli cuiuslibet duobus eſſe rectis angulis æquales, nullo poterit modo fieri, vt inæquales quoque ſint duobus rectis. Eadem ratio in alijs theorematibus eſt intelligenda. Itaque, vt vno verbo dicam, quæſitum illud Mathematicum conſtruere aliquid*

Digitized by Google

aliquid docens, cuius etiam oppoſitum poteſt effici, Problema: Illud verò, quod nihil docet conſtruere, & cuius pars oppoſita perpetuò falſa eſt, Theorema appellatur. Vnde ſi quis proponeret in modum problematis, ſe in ſemicirculo velle angulum rectum conſtituere, irridendus omnino eſſet, & Geometriæ prorſus ignarus iudicandus; quoniam omnes anguli in ſemicirculo conſtituti ſunt recti, vt demonſtrabitur libro 3. propoſitione 31. Quamobrem theorema hoc, & non problema dicendum erit. Cæterùm tam problema, quàm theorema dici conſueuit apud Mathematicos Propoſitio, propterea quòd vtrumque aliquid nobis proponit, vt in exemplis adductis conſtat. Hæc ideo diximus, vt ſtudioſus lector non miretur, quando reperiet in Euclide, Apollonio, & cæteris Mathematicis, propoſitionum alias dici problemata, alias theoremata. Elementa enim Euclidis Geometrica, & Apollonij Conica, (vt aliorum interim volumina taceam) conſtant partim problematibus, partim theorematibus. Demonſtrationes problematum ſemper concluduntur his ferè verbis: Quod faciendum erat; Theorematum verò hiſce: Quod oſtendendum, vel demonſtrandum erat; habita nimirum ratione finis vtriuſque. In quolibet autem problemate, ac theoremate plures demonſtrationes continentur, & non vna tantùm, quamuis vltimus ſyllogiſmus demonſtratiuus ſolùm concludat id, quod in initio demonſtrandum proponitur, vt declarabimus in prima Euclidis propoſitione, & in cæteris omnibus manifeſtum erit.

QVONIAM verò ad demonſtrationes problematum atq; theorematum ſæpenumero requiruntur alia quædam theoremata, vel problemata minus principalia, & quæ facilè ex ijs, quæ priùs demonſtrata ſunt, intelligi poſſunt; inſeruntur interdum à Geometris huiuſmodi theoremata, & problemata problematibus, atq; theorematibus, de quibus præcipuè agitur, vt breuiùs demonſtrari poſſint. Vocant autem illa Lemmata, propterea quòd ſolùm aſſumuntur ad alias demonſtrationes; non autem de illis præcipua diſputatio inſtituitur, quemadmodũ de alijs. Itaq; Lemma dici poteſt demonſtratio, ſeu conſtructio illius, quod ad demonſtrationẽ alicuius theorematis, vel problematis principalis aſſumitur, vt demonſtratio expeditior fiat, ac breuior.

QVÆNAM SINT PRINCIPIA apud Mathematicos.

CVM omnis doctrina, omniſq; diſciplina ex præexiſtente gignatur cognitione, vt auctor eſt Ariſtoteles, atq; ex aſſumptis, & conceſſis quibuſdam principijs ſuas demonſtret concluſiones; Nulla autem ſcientia ex eiuſdem Ariſtotelis, aliorumq; Philoſophorũ ſententia ſua principia demonſtret; habebunt vtique & Mathematicæ diſciplinæ ſua principia, ex quibus poſitis, & conceſſis ſua problemata ac theoremata confirment. Horum autem tria tantummodo genera apud Mathematicos reperiuntur. In primo reponuntur omnes defini-

Digitized by Google

definitiones, quas nonnulli cum Ariſtotele ſuppoſitiones, vt vult Proclus, appellant. His autem vocabula artis explicantur, ne in tractatione ipſa, nominum ambiguitate, aut obſcuritate circumuenti in paralogiſmos incidamus. Secundum genus complectitur Petitiones, ſiue Poſtulata, quæ quidem adeò clara ſunt, & perſpicua in illa ſcientia, quæ in manibus habetur, vt nulla indigeant confirmatione, ſed auditoris duntaxat aſſenſum expoſcant, ne vlla ſit in demonſtrando hæſitatio, aut difficultas. Ad tertium genus referuntur Axiomata, ſeu communes animi notiones, quæ non ſolùm in ſcientia propoſita, ſed etiam in omnibus alijs ita manifeſta ſunt, & euidentia, vt ab eis nulla ratione diſſentire queat is, qui ipſa vocabula rectè perceperit. Atque his principijs rectè mihi videtur accommodari poſſe id, quod in Metaphyſicis ſcribit de primis principijs Ariſtoteles: A ianua quis aberrabit? Vt præclarè à Cicerone, Pronunciata ſiue Effata appellentur. Euclides igitur hoc in volumine Geometricorum Elementorum præmittit ante demonſtrationes ſuarum concluſionum omnia hæc principia, vt ex ipſis, quæ quidem facilè à quouis intelliguntur, deducat admiranda theoremata, quibus nemo vnquam aſſenſum præberet, niſi certa ac euidenti ratione confirmarentur. Vnde hoc etiam nomine ſummis laudibus efferenda eſt Geometria, omnibusque ſeculis prædicanda, quòd ex tam exiguis initijs cuilibet quantumuis rudi & ignaro notiſſimis, & quidem perfacilibus progrediatur ad theoremata primo aſpectu ab omni ſenſu humano, & intellectu remota, quæ tamen omnia miro ordine, ac methodo facili, demonſtrationibuſque certiſſimis ita confirmat, vt nihil omnino dubij in eis relinquatur. Porrò in huiuſcemodi principijs tradendis hic ordo ab Euclide ſeruatur, vt in ipſo quidem introitu ſcientiæ proponat principia toti Geometriæ communia, in alijs autem deinde libris, vbi res poſtulat, ea exponat principia, quæ propriè, & peculiari quadam ratione, ad materiam illorum ſubiectam videntur ſpectare. Neque verò omnia principia Geometrica ab Euclide in his elementis ſunt explicata, ſed multa reliquit lectori diſquirenda; quæ tamen ex ijs, quæ tradidit, ſine magno labore ac ſtudio percipi poſſunt, & intelligi. Verùm ne in hac quoque parte defuiſſe videamur rerum Mathematicarum ſtudioſis, adiunximus varijs in locis ad principia ab Euclide poſita, ex probatis auctoribus alia nonnulla, quorum ignoratione maximè curſum demonſtrationum arbitrati ſumus retardari poſſe. Sed iam ad expoſitionem ipſam Principiorum Euclidis accedamus.

EVCLI-

Digitized by Google

EVCLIDIS ELEMENTVM PRIMVM.

DEFINITIONES.

I.

PVNCTVM eſt, cuius pars nulla eſt.

TOTVS hic primus liber in eo poſitus eſt, vt nobis tradat ortus proprietateſq; triangulorum, tum quod ad eorum angulos ſpectat, tum quod ad latera: quæ quidem inter ſe comparat interdum, interdum verò vnumquodq; per ſe inſpicit, & contemplatur. Nam aliquando ex lateribus trianguli angulos conſiderat, aliquando verò ex angulis latera, ſecundū æqualitatem atq; inæqualitatem rimatur. Idemq; varijs rationibus inquirit in duobus quandoq; triangulis inter ſe collatis. Deinde aperit nobis parallelarum proprietates, parallelogrammorumq; contemplationē aggreditur, tum inter ſe, tum etiam, vt cum triangulis inter eaſdem parallelas conſtitutis conferuntur. Vt antē hæc omnia rectiùs & commodiùs exequatur Euclides, docet diuiſionē anguli rectilinei, & lineæ rectæ in partes æquales, conſtitutionem lineæ perpendicularis, quo pacto angulus angulo fiat æqualis, & alia huiuſmodi. Itaque vt vno verbo rem totam complectar, in primo libro traduntur, ex Procli ſententia, rectilinearum figurarum maximè primæ, ac præcipuæ, triangula inquam, atque parallelogramma. Ante omnia verò Euclides more Mathematicorum rem propoſitam exorditur à principijs, initio facto à definitionibus, quarum prima punctum explicat, docens illud dici punctum in quantitate continua, quod nullas habet partes. Quæ quidem definitio planius ac faciliùs percipietur, ſi priùs intelligamus; quantitatem continuam triplices habere partes, vnas ſecundum longitudinem, alteras ſecundum latitudinem, & ſecundum profunditatem altitudinemue alteras; quanquam non omnis quantitas omnes has partes

A habet,

habet, ſed quadam vnicas tantùm ſecundùm longitudinem; quada duplices, ita vt illis adijciat partes etiam latitudinis; quadam deniq; præter duplices has partes, tertias quoque altitudinis, ſiue profunditatis continet. Quantitas enim omnis continua aut longa ſolùm eſt, aut longa ſimul, & lata, aut longa, lata, atque profunda. Neque aliam dimenſionem habere poteſt res vlla quanta, vt rectè demonſtrauit Ptolemaus in libello de Analemmate, opera Federici Commandini Vrbinatis nuper in priſtinam dignitatem reſtituto, nec non, vt ait Simplicius in libello de Dimenſione, qui quidem, quod ſciam, adhuc nondum eſt excuſus. Itaque quod in quantitate continua, ſiue magnitudine exiſtit, intelligiturq; ſine omni parte, ita vt neque longum, neque latum, neque profundum eſſe cogitetur (vt nimirum excludamus animam rationalem, Nunc vel Inſtans temporis, & vnitatem quæ etiam partes non habent) id appellatur ab Euclide, & à Geometris punctum. Huius exemplum in rebus materialibus reperiri nullum poteſt, niſi velis extremitatem alicuius acus acutiſſima, ſimilitudinē puncti exprimere; punctum *quod quidem omni ex parte verum non eſt, quoniam ea extremita diuidi poteſt, & ſecari infinitè, punctum verò indiuiduum prorſu debet exiſtimari. Denique in magnitudine id concipi debet eſſe punctum, quod in numero vnitas, quodque in tempore inſtans. Sunt enim & hæc concipienda indiuidua.*

II.

LINEA verò, longitudo latitudinis expers.

DEFINIT hic lineam, primam ſpeciem magnitudinis, quam dicit eſſe quantitatem longam duntaxat, non autem latam, intellige neque profundam. A qua enim quantitate excluditur latitudo, ab eadem etiam neceſſariò profunditas remouetur, non autem contra. Lineam autem hanc, ſiue longitudinem abſque latitudine, non abſurdè concipere, intelligereq; poterimus ex termino loci alicuius partim illuminati, & partim obumbrati. Finis enim, ſeu terminus communis lucidi, & obumbrati, longitudo quædam eſt, ad longitudinem ipſiuſmet luminis, & vmbræ extenſa, carens omni latitudine, cùm ſit limes vtriuſque. Mathematici quoque, vt nobis inculcent veram lineæ intelligentiam, imaginantur punctum iam deſcriptum ſuperiore definitione, è loco in locum moueri. Cùm enim punctum ſit prorſus indiuiduum, relinquetur ex iſto motu imaginario veſtigium quoddam longum omnis expers latitudinis. Vt ſi punctum A, fluere intelligatur ex A, in B, veſtigium effectū A B, linea appellabitur, cùm verò interuallum inter duo puncta. A, & B, comprehenſum ſit longitudo quædam, carens omni latitudine, propterea quòd punctum A, omni priuatum



Digitized by Google

vnam dimensione, eam efficere nulla ratione potuerit. Hinc factum eſt, vt alij dixerint, lineam nil eſſe aliud, quàm puncti fluxum: Alij verò magnitudinem vno contentã interuallo. Poteſt enim linea vno tantum modo, vtpote ſecundum longitudinem ſecari, atq; diuidi.

III.

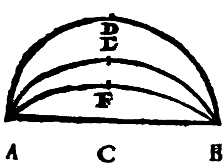
LINEÆ autem termini, ſunt puncta.

DOCET, quænam ſint extrema lineæ cuiuſuis, ſeu termini, dicens lineam terminari, ſiue claudi vtrinque punctis; Non quòd omnis linea terminos habeat; quomodo enim lineæ infinitæ terminos aſſignare poterimus? quaue etiam ratione in linea circulari extremum aliquod deprehendemus? Sed quòd linea qualibet habens extrema, in ſuis extremitatibus puncta recipiat. Vt ſuperior linea A B, extrema habet puncta A, & B. Idemq; in omnibus lineis terminatis, ac finitis intelligendum eſt, ita vt earum extremitates ſola eſſe puncta cogitemus.

IV.

RECTA linea eſt, quæ ex æquo ſua interiacet puncta.

TRIPLEX omnino eſt linea apud Mathematicos, recta, circularis, quam & curuam dicunt, & mixta, ſiue compoſita ex vtraque. Ex his deſcribit hoc loco Euclides lineam rectam, quam dicit eſſe eam, quæ æqualiter inter ſua puncta extenditur, hoc eſt, in qua nullum punctum intermedium ab extremis ſurſum, aut deorſum, vel huc, atque illuc deflectendo ſubſultat; in qua denique nihil flexuoſum reperitur. Hanc nobis ad viuum exprimit filum aliquod tenue ſummè vi extentum: In eo enim omnes partes mediæ cum extremis æqualem obtinent ſitum, neque vlla eſt alia ſublimior, aut humilior, ſed omnes æquabiliter inter extremos fines poſitæ progrediuntur. Proclus hanc definitionem exponens ait, tunc demum lineam aliquam ex æquo ſua interiacere puncta, quando æquale occupat ſpatium ei, quod inter ſua ſitum eſt puncta extrema. Vt linea A C B, dicetur recta, quoniam tantum occupat præcisè ſpatium, quanta eſt diſtantia puncti A, à puncto B. Lineæ verò A D B, A E B, A F B, non dicentur rectæ, cùm maiora obtineant ſpatia, quàm ſit diſtantia extremorum punctorum A, & B. Sic etiam vides omnia puncta lineæ A C B, inter quæ eſt punctum C, æqualiter inter extrema A, & B, iacere, iuxta Euclidis definitionem; quod non cernitur in alijs lineis, quoniam puncta D, E, F, ſubſultant ab extremis A, & B.



Plato rectã lineam perpulchrè ſic definit: Linea recta eſt, cuius media obumbrant extrema. Vt in linea A C B, ſi punctũ C, aut quoduis aliud me-

 dium,

Digitized by Google

*dium, vim haberet occultandi, & A, extremum virtutem illumina-
di, impedimento vtiq; eſſet C, punctum interiectum, ne B, extremu
alterum ab A, illuminaretur: Rurſus oculus in A, exiſtens extremo,
videret aliud extremũ B, ob interiectum punctũ C; ꝙ quidem non con
tingit in lineis non rectis, vt perſpicuum eſt in lineis A D B, A E
A F B. Archimedes verò ait, lineam rectam eſſe minimam earum
quæ terminos habent eoſdem; qualis eſt A C B, comparata cum
A D B, A E B, A F B. Si enim A C B, nõ eſſet minima earũ quæ eoſdem
terminos A, & B, poſſident, nõ ex æquo interiaceret ſua puncta, ſed e
potiùs linea, quæ minor diceretur, quàm A C B. Campanus denique
deſcribens rectam lineam, vocat eam breuiſſimam ex vno puncto i
aliud extenſionem. Quemadmodum autem Mathematici per flu-
xum puncti imaginarium concipiunt deſcribi lineam, ita per qualita-
tem fluxus puncti qualitatẽ lineæ deſcriptæ intelligunt. Si namq; pun-
ctum recta fluere concipiatur per breuiſſimum ſpatium, ita vt neq; in
hanc partem, neq; in illam deflectat, ſed æquabilem quendam motũ,
atq; inceſſum teneat, dicetur linea illa deſcripta, Recta: Si verò pun-
ctum fluens cogitetur in motu vacillare, atq; hinc inde titubare, appel-
labitur linea deſcripta, mixta: Si deniq; punctum fluens in ſuo motu
non vacillet, ſed in orbem feratur vniformi quodam motu, atq; di-
ſtantia à certo aliquo pũcto, circa quod fertur, vocabitur deſcripta illa
linea, circularis. Itaq; ſi duo puncta moueantur ſimilibus prorſus mo-
tibus, ita vt ſemper æqualiter inter ſe diſtent; deſcribentur ab ipſis
duæ lineæ ſimiles, hoc eſt, ſi vna earum fuerit recta, erit & altera
recta: ſi verò vna fuerit curua, erit & altera eodem omnino modo
curua, &c. Lineas non rectas, quæ omnes obliquæ dici poſſunt, non de-
finit hoc loco Euclides, ſed circularem exponet definitione decima-
quinta, miſtam prorſus omittens, quod ea in hiſce elementis Geome-
tricis nullum habeat vſum. Sunt autem plurima genera linearũ mi-
ſtarum; quædam enim ſunt vniformes, quædam difformes. Vnifor-
mium rurſus aliæ ſunt in plano, aliæ in ſolido. In plano ſunt Hyper-
bole, Parabole, Ellipſis, de quibus agit copioſiſſimè Apollonius in co-
nicis elementis; linea Conchoideos, de qua Nicomedes; linea Helica,
de qua Archimedes in libro de lineis ſpiralibus tractationem inſtituit,
& aliæ huiuſmodi. In ſolido, ſeu ſuperficie curua ſunt alterius gene-
ris lineæ helicæ, quàm ea ab Archimede deſcripta, qualis eſt illa; quæ
circa cylindrum aliquem conuoluitur; nec non ea, quæ circa conum
exiſtit, vel etiam quæ circa ſphæram, cuiuſmodi ſunt ſpiræ illæ, quas
Sol deſcribit ab ortu in occaſum, vt in ſphæra docuimus. Difformium
autem infinitus eſt numerus, quas non eſt opus hîc recenſere. Ex his
conſtat, duas tantùm eſſe lineas ſimplices, rectam, & circularem, o-
mnes autem alias, quæcunque ſunt, miſtas appellari, quod ex illis com-
ponantur. Vnde ingenioſè concludit Ariſtoteles in libro de Cœlo, iuxta
triplicem lineam, tres tantùm eſſe motus, duos quidem ſimplices, re-*

ctum

Digitized by Google

circularem, tertium verò mixtum, ſiue ex illis duobus compoſitam.

Quoniam lineas rectas regula ducere ſolemus, doceamus, qua ratione regulam propoſitam examinare poſſimus, num linea per illam

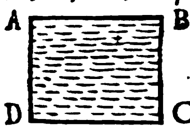


deſcripta recta ſit, nec ne. Sit ergo regula A B, ſecundum cuius latus CD, recta C D, deſcribatur ex puncto C, in punctum D. Deinde conuertatur regula, & manente eadem parte ſuperiore, punctum C, ſtatuatur in D, & punctum D, in C: & ſecundum idem latus regulæ CD, recta ducatur ex eodem puncto C, in punctum D. Nam ſi poſterior hæc linea priori omni ex parte congruet, dubitari non debet, quin regulæ A B, in lineis rectis ducendis fidere poſſimus: Si verò non congruet omni ex parte, latus illud C D, perfectè rectum non erit, ſed corrigendum erit diligentius.

V.

SVPERFICIES eſt, quæ longitudinem, latitudinemq; tantùm habet.

POST lineam, quæ eſt prima quantitatis continuæ ſpecies, vnicamq; habet dimenſionem, definit ſuperficiem, quæ ſecundam magnitudinis ſpeciem conſtituit, additq; primæ dimenſioni ſecundum longitudinem, alteram ſecundum latitudinem. Nam in ſuperficie reperitur non ſolùm longitudo, vt in linea, verùm etiam latitudo, ſine tamen omni profunditate. Vt quantitas A B C D, inter lineas A B, B C, C D, D A, comprehenſa, conſiderataq; ſecundum longitudinem A B, vel D C, & ſecũdum latitudinem A D, vel B C, omnis expers profunditatis, appellatur ſuperficies. Hanc nobis refert latitudo extrema cuiuſque corporis, ſi ab ea omnis ſoliditas intellectu auferatur. Non incongruè etiam, vt ait Proclus, imaginem quaſi expreſſam ſuperficiei nobis exhibent vmbræ corporum. Hæ enim cùm interiorem terræ partem penetrare non poſſint, longæ tantùm erunt, & latæ. Mathematici verò, vt nobis eam ob oculos ponant, monent, vt intelligamus lineam aliquam in tranſuerſum moueri: Veſtigium enim relictum ex ipſo motu erit quidem longum, propter longitudinem lineæ, latum quoque propter motum, qui in tranſuerſum eſt factus; nulla verò ratione profundum eſſe poterit, cùm linea ipſum deſcribens omni careat profunditate; quare ſuperficies dicetur. Vt ſi linea A B, fluat verſus D C, efficietur ſuperficies A B C D. Alij deſcribentes ſuperficiem dicunt, eam eſſe corporis terminum: Alij verò, magnitudinem duobus conſtantem interuallis.



Digitized by Google

Poteſt enim ſuperficies diuidi, & ſecari duobus modis, vno quidē ſecundum longitudinem, altero verò ſecundum latitudinem.

VI.

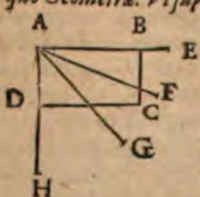
SVPERFICIEI autem extrema ſunt lineæ.

NON diſſimilis eſt hæc definitio ſuperiori, qua termini lineæ fuere explicati. Vult enim extremitates ſuperficiei eſſe lineas, quemadmodum lineæ fines extitere puncta. Vt ſuperioris ſuperficiei A B C D extrema ſunt lineæ A B, B C, C D, D A. Eodemq; modo in quacumque altera ſuperficie, quæ extrema habet, lineas cogitare oportet in extremitatibus: Non autem in ſuperficie infinita, vel etiam ſphærica, quæ corpus ſphæricum circumdat. Poteſt etiā ſuperficies aliqua claudi, & terminari vnica tantùm linea, qualis eſt circularis ſuperficies, vt dicemus in definitione circuli.

VII.

PLANA ſuperficies eſt, quæ ex æquo ſuas interiacet lineas.

HÆC quoque definitio ſimilitudinem quandam deſcriptionis lineæ rectæ gerit. Superficies enim, quæ ex æquo lineas ſuas interiacet, ita vt mediæ partes ab extremis ſurſum, deorſúmue ſubſultando, non recedant, appellabitur plana: qualis eſt ſuperficies perpoliti alicuius marmoris, in qua partes omnes in rectum ſunt collocatæ, ita vt nihil habeat inciſum angulis, nihil anfractibus, nihil eminens, nihil lacunoſum: In hac enim partes intermediæ cum extremis æqualem adeptæ ſunt ſitum, nec vlla eſt alia ſublimior, humiliórue, ſed omnes æquabiliter protenduntur. Alij ſuperficiem planam definiunt, dicentes eam eſſe, cuius partes mediæ obumbrant extrema: Vel eſſe minimam, ſiue breuiſſimam omnium, quæ eadem habent extrema: Vel cuius omnibus partibus recta linea accommodari poteſt, vt placet Heroni antiquo Geometræ. Vt ſuperficies A B C D, tum demum plana dici debet,

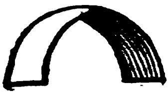


quando linea recta A E, circa punctū A, immobile circumducta, ita vt nunc eadem ſit, quæ A B, nunc eadem, quæ A F, nunc eadem, quæ A G, & nunc eadem, quæ A H, nihil in ſuperficie offendit depreſſum, aut ſublatum, ſed omnia puncta ſuperficiei à linea recta tanguntur, & quodammodo raduntur. Quod ſi minima ſuperficiei particula aliis humilior à linea recta nō tangeretur, vel ipſa linea recta liberè non poſſet circumduci, propter aliquem tumorem, ſeu eminentiam in ſuperficie occurrentem, iam non poſſet nuncupari plana. Itaque vt ſit plana, requiritur vt omnibus modis poſſit recta linea commenſurari, hoc eſt, vt ei applicari poſſit recta linea ſecundum A B, & A F, & deniq; ſecundum omnes

partes

Digitized by Google

parte. Hæc autem ſuperficies ſola erit ea, quam imaginari, & intelligere poſſumus deſcribi ex motu lineæ rectæ in tranſuerſum, quæ ſuper duas alias lineas rectas conficitur. Vt ſi linea recta A B, per duas rectas A D, B C, feratur, efficietur ſuperficies perfectè plana, iuxta omnes definitiones. Non enim difficile erit huic ſuperficiei traditas deſcriptiones accommodare. Solent Mathematici ſuperficiem planam frequenter appellare planum, ita vt quando loquuntur de plano, intelligenda ſemper ſit ſuperficies plana. Cæteræ omnes ſuperficies, quibus non omni ex parte accommodari poteſt linea recta, qualis eſt ſuperficies interior alicuius fornicis, vel exterior alicuius globi, columnæve rotundæ, vel etiam coni, &c. appellantur curuæ, & non planæ.

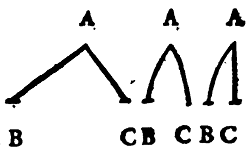


Quamuis enim ſuperficiei columnæ rotundæ, ſeu cylindri ſecundũ longitudinem adaptari poſſit linea recta, tamen ſecũdum latitudinem minimè poteſt. Idemq; dicendũ eſt de aliis. Superficies autem curua duplex eſt, conuexa videlicet, vt exterior ſuperficies ſphæræ, vel cylindri; & concaua, vt interior fornicis, ſiue arcus alicuius. Quoniam verò omnium harum contemplatio pertinet ad Stereometriam, idcirco Euclides hoc primo libro ſolùm planam nobis explicauit, de qua eſt diſputaturus prioribus ſex libris.

VIII.

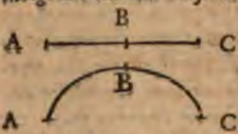
PLANVS verò angulus, eſt duarum linearum in plano ſe mutuo tangentium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio.

DECLARAT, quidnam ſit angulus planus, dicens; Quandocunque duæ lineæ in plana aliqua ſuperficie inuicem concurrunt, & non in directum conſtituuntur, efficietur ex huiuſmodi concurſu, ſeu inclinatione vnius ad alteram, angulus, qui dicitur planus, propterea quod in plana conſtituatur ſuperficie. Verbi gratia, quia duæ lineæ A B, A C, concurrunt in A, & non iacent in directum, ideo efficiunt angulum A, planum in eadem exiſtentẽ ſuperficie, in qua duæ illæ lineæ conſtituuntur.



Dicentur autem duæ lineæ non in directum iacere, quando altera earum verſus concurſum protenſa non coincidit cum altera, ſed vel eam ſecat, vel certè ſtatim poſt punctum concurſus ab ea recedit. Quod dixerim propter angulum contactus, qui fit, quando duo circuli ſe contingunt, vel etiam, quando linea recta circulum tangit: Protracta enim recta linea poſt punctum contactus, quanquam non ſecet circulum, tamen ſtatim poſt illud ab eo ſeiungitur. Eodem pacto circularis illa linea ſecundum propriam diſpoſitionem, ac formam extenſa recedit à recta tangente, quamuis eam non ſecet. Vnde verò eſt angu-

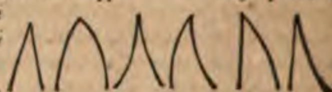
lus conſtitutus in illo contactu: qua de re plura ſcribemus in propo- ſitione 16. tertij lib. contra Iacobum Peletarium, qui contendit, c- non eſſe angulum. Quod ſi duæ lineæ ſe mutuo tangant iacentes in rectum; ita vt alterutra producta congruat toti alteri, non fiet vllus angulus ex illo concurſu, cùm nulla ſit inclinatio, ſed ambæ vnam integram lineam conſtituent. Vt quia recta A B, producta conuenit cum recta B C, non efficietur angulus in Sic etiam non fiet angulus in B, ex lineis curuis A B, B C, quia alterutra ſecundum ſuam inflexionem, & obliquitatem ductum extenſa, cum altera coincidit. Quare in directũ dicentur iacere Itaque vt lineæ rectæ efficiant angulum neceſſe eſt, vt poſt concurſum productæ ſe mutuò ſecent: Curuæ autem lineæ, vel quarum altera curua, altera verò recta exiſtit, angulum conſtituere verè poſſunt, etiamſi non ſe mutuo interſecent; ſufficit enim, quod ſeſe contingant, ita vt ſtatim poſt contactum altera ab altera ſeparetur, quemadmodum & ante eundem ſemotæ cernuntur. Conſiſtit autem anguli cuiuſuis quantitas in ſola inclinatione, non in longitudine linearum; lineæ etenim longiùs excurrentes non augent ſuam inclinationem, igitur neque anguli magnitudinem. Sunt & alia duo genera angulorum, quorum priùs ſolidos comprehendit, de quibus Euclides differit in Stereometria, quique in corporibus exiſtunt; Poſterius verò ſphærales, qui in ſuperficie ſphæræ conſtituuntur ex circulorũ maximorũ circumferentiis, & de quibus copiosè agitur in ſphæricis elementis Menelai. Horum autem omniũ explicatio in alium locum à nobis reijcitur, cùm hic de ſolis planis angulis ſit futurus ſermo.



IX.

CVM autem, quæ angulum continent lineæ, rectæ fuerint, rectilineus ille angulus appellatur.

ANGVLVS omnis planus conficitur aut ex lineis duabus rectis, qui quidem rectilineus dicitur, & de quo ſolùm hic agit Euclides: aut ex duabus curuis, quem curuilineum vocare licet; aut ex vna curua & altera recta, qui non ineptè mixtus appellatur. Ex hiſce porrò lineis poſſunt curuilinei anguli tribus variari modis, & mixti duobus, pro varia inclinatione, ſeu habitudine linearum curuarum, vtpote ſecundum conuexum, & concauum, ceu in propoſitis angulis planè, & apertè perſpicitur. Rectilineus verò variari non poteſt ratione inclinationis, habitudinis ve linearum, niſi maiorem, vel minorem inclinationem variam velimus dicere habitudinem, quod eſt abſurdum; cùm hoc modo augeatur tantùm angulus rectilineus, aut diminuatur, quod & aliis commune eſt, non autem ita varietur, vt aliud conſtituat genus.

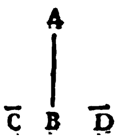


Digitized by Google

X.

CVM verò recta linea ſuper rectam conſiſtens lineam eos, qui ſunt deinceps, angulos æquales inter ſe fecerit, rectus eſt vterq; æqualium angulorum: Et quæ inſiſtit recta linea, perpendicularis vocatur eius, cui inſiſtit.

VSVS frequentiſſimus reperitur in Geometria anguli recti, & lineæ perpendicularis, nec non anguli obtuſi, & acuti, propterea docet hoc loco Euclides, quinam angulus rectilineus apud Geometras appelletur rectus, & quænam linea perpendicularis: In ſequentibus autem duabus definitionibus explicabit angulum obtuſum, & acutum. Non enim alius dari poteſt angulus rectilineus, præter rectum, obtuſum, & acutum. Igitur ſi recta linea A B, rectæ C D, inſiſtens efficiat duos angulos prope punctum B, (qui quidem ideo dicuntur à Mathematicis eſſe deinceps, quod eos eadem linea C D, protracta, prope idem punctum B, efficiat) inter ſe æquales, quod tum demum fiet, quando recta A B, non magis in C, quam in D, inclinabit, ſed æquabiliter rectæ C D, inſiſtet, vocabitur vterque angulus B, rectus, & recta A B, perpendicularis rectæ C D, cui inſiſtit.



Eadem ratione nominabitur recta C B, perpendicularis rectæ A B: quamuis enim C B, tantum faciat cum A B, vnum angulum, tamen ſi A B, extenderetur in rectum & continuum verſus punctum B, efficeretur alter angulus æqualis priori. Quæ vero arte linea duci debeat efficiens cum altera duos angulos æquales, docebit Euclides propoſitione 11. & 12. huius primi libri. Itaque vt in Geometria concludamus angulum aliquem eſſe rectum, aut lineam, quæ ipſum efficit, ad aliam eſſe perpendicularem, requiritur, & ſufficit, vt probemus angulum, qui eſt ei deinceps, æqualem illi eſſe. Pari ratione, ſi dicatur aliquis angulus rectus, aut linea, quæ ipſum conſtituit, perpendicularis ad aliam, colligere licebit, angulum illi deinceps æqualem quoque eſſe. Quando enim anguli, qui ſunt deinceps, fuerint inter ſe æquales, nuncupatur vterque illorum rectus, & linea ipſos efficiens, perpendicularis, iuxta hanc 10. definitionem: quando autem non fuerint æquales, non dicitur quiſquam illorum rectus, vt conſtabit ex ſequentibus duabus definitionibus, & propterea neque linea eos conſtituens perpendicularis appellatur. Hæc dixerim, vt videas, quidnam liceat ex hac definitione colligere in rebus Geometricis, & quemnam vſum habeant apud Geometras deſcriptiones vocabulorum. Non enim magno labore hæc quæ diximus, ad alias definitiones poterunt transferri.

XI.

OBTVSVS angulus eſt, qui recto maior eſt.



QVANDO recta A B, recta C D, inſiſtens [cut off] *fecerit angulos ad punctum B, æquales, & ob e*[cut off] *cauſam neutrum rectum, ſed vnum quidem re*[cut off] *maiorem, alterum verò minorem, dicitur maior a*[cut off] *gulus obtuſus, qualis eſt angulus B, ad punctum* [cut off] *vergens, qui continetur rectis lineis A B, B C.*

XII.

ACVTVS verò, qui minor eſt recto.

VT in præcedenti figura, minor angulus B, ad punctum D, ver[cut off]*gens, qui continetur rectis lineis A B, B D, vocatur acutus. Itaque an*[cut off]*gulus rectus, vt ex dictis colligitur, nullam patitur varietatem, v*[cut off] *vnus altero maior, minórue detur, cum linea perpendicularis eum effi*[cut off]*ciens non debeat magis in vnam partem inclinare, quàm in alteram* [cut off] *Obtuſus verò, & Acutus augeri poſſunt, & minui infinitis modis* [cut off] *cum ab illa inflexibilitate lineæ perpendicularis infinitis etiam modi*[cut off] *recta linea poſſit recedere, vt perſpicuum eſt. Quoniam verò ad quem*[cut off]*uis angulum planum conſtituendum concurrunt duæ lineæ, & ali*[cut off]*quando in vno puncto plures exiſtunt anguli, ſolent Mathematici, v*[cut off] *tollatur confuſio, angulum quemlibet exprimere tribus literis, qua*[cut off]*rum media oſtendit punctum, in quo lineæ conficiunt angulum, extre*[cut off]*mæ verò ſignificant initia linearum, quæ angulum continent. Exem*[cut off]*pli gratia, in ſuperiore figura angulum obtuſum intelligunt per an*[cut off]*gulum A B C, acutum verò, per angulum A B D, quod diligenter eſt* [cut off] *notandum, vt facile dignoſcamus angulos, quorum mentio fit in de*[cut off]*monſtrationibus.*

IAM verò propoſito nobis angulo aliquo rectilineo, ſi experiri ve[cut off]*limus, num rectus ſit, an obtuſus, acutúſue, efficiemus id hoc modo.*



Contineant duæ rectæ A B, A C, angulum A. Du-
cta recta B C, vtcunque, quæ angulum ſubtendat,
& diuiſa bifariam in D, deſcribatur ex D, vt cen-
tro ad interuallum D A, circumferentia circuli;
a 31. tertij. *quæ ſi per puncta B, C, tranſeat, a erit angulus A,*
rectus, vtpote qui in ſemicirculo B A C, exiſtat: ſi
verò idem ſemicirculus rectam B C, ſecat in E, F,
erit angulus B A C, obtuſus; propterea quod, du-
b 31. tertij. *ctis rectis E A, F A, b angulus E A F, in ſemicir-*
culo E A F, rectus eſt, qui quidem pars eſt anguli B A C. Si denique
idem ſemicirculus rectam B C, productam ſecet in E, F, erit angulus
c 31. tertij. *B A C, acutus; propterea quod ductis rectis E A, F A, c angulus*
E A F in ſemicirculo E A F, rectus eſt, qui quidem maior eſt angu-
lo B A C.

ALITER idem aſſequemur hoc modo. Deſcribatur ex puncto D, quod rectam B C, dato angulo A, ſubtenſam ſecat bifariam, ſemi-

circulum

Digitized by Google

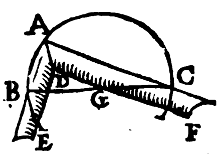
tur ad interuallum D B, vel D C: qui ſi tranſeat per punctum A, datus angulus erit rectus, vtpote qui in ſemicirculo exiſtat. Si ve- a 31. tertij.



rò idem ſemicirculus tranſeat ſupra punctum A, datus angulus erit obtuſus. Ducta enim recta D A, ſecante circumferentiam in E, iungantur rectæ E B, E C; b eritq́; angulus B E C, in ſemicirculo rectus. Cum ergo angulus B A C, datus c maior ſit angulo B E C, erit angulus datus A, recto maior, hoc eſt, obtuſus. Si denique ſemicirculus idem ſecet rectas A B, A C, erit datus angulus acutus, Sumpto namque puncto E, inter rectas A B, A C, in circumferentia, iungantur rectæ E B, E C; d eritque angulus B E C, rectus in ſemicirculo: e qui cum maior ſit angulo dato A, erit datus angulus A, recto minor, id eſt, acutus. Non videatur autem mirum cuipiam, quod ad demonſtrationem aſſumamus propoſitiones, quæ poſterius demonſtrantur ab Euclide; quod alienum eſſe videtur à puritate demonſtrationum Geometricarum: Non videatur, inquam, mirum, quia cum id, quod hoc loco oſtendimus, neceſſarium non ſit ad ſequentes demonſtrationes, poterit commodè differri, donec propoſitiones requiſitæ ſint demonſtratæ. Satis eſt, vt praxis huiuſce rei hoc loco intelligatur. Idem obſeruabimus in nonnullis praxibus problematum. Eas enim propriis in locis, quoad eius fieri poterit, proponemus, vt diuiſionem anguli rectilinei in quotuis partes æquales eo in loco docebimus, vbi Euclides docet diuiſionem eiuſdem anguli in duas æquales partes, &c. quanquam ad earum praxium demonſtrationes neceſſariæ ſint propoſitiones poſterius demonſtratæ.

b 31. tertij. c 21. primi. d 31. tertij. e 21. primi.

FACILIVS idem cognoſcemus beneficio normæ alicuius accuratè fabricatæ, qualem refert inſtrumentum A B C, conſtans duabus regulis A E, A F, ad angulum rectum in A, coniunctis. Nam ſi latus A B, huius normæ, rectæ A B, applicetur, cadente puncto A, in punctum A; ſi quidem & normæ latus A C, rectæ A C, congruat, erit angulus A, rectus: ſi verò citra rectam A C, cadat normæ latus A C, erit angulus A, obtuſus; ſi denique latus normæ A C, vltra rectam A C, cadat, acutus erit angulus, vt perſpicuum eſt.



ITA autem normam examinabimus, num accuratè ſit fabricata, necne. Deſcripto ſemicirculo B A C, ex centro G, cuiuſuis magnitudinis, ductaq́; diametro B C, ponatur angulus A, in aliquo puncto circumferentiæ, vt in A, latusq́; vnum normæ, vt A B, per B, punctum extremum diametri tranſeat. Nam ſi alterum tunc latus A C, per alterum punctum extremum C, tranſeat, ritè fabricata erit norma A B C;

a 31. *terma A B C; a quod tunc angulus B A C, in ſemicirculo B A C, re-*
tij. *ſit: ſi vero latus A C, non per C, tranſeat, emendanda erit norm-*
quia eius angulus A, tunc rectus non erit. Eadem ratione interiora
partem normæ examinabimus, ſi angulum D, circumferentiæ applic-
mus, & latera D E, D F, punctis extremis B, C, &c.

XIII.

TERMINVS eſt, quod alicuius extremum eſt.

TRES ſunt termini iuxta hanc definitionem. Punctum enim terminus eſt, ſeu extremum lineæ: Lineæ ſuperficiei: & ſuperficie corporis. Corpus autem terminare amplius nihil poteſt, quod non re-periatur alia quantitas plures habens dimenſiones, quam tres. Omne ſiquidem terminatum ſuperat terminum ſuum vna dimenſione, vt perſpicuum eſt ex adductis exemplis.

XIV.

FIGVRA eſt, quæ ſub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

NON omnis quantitas terminos poſſidens Figura dici poteſt, ne lineam finitam figuram appellare cogamur: Sed eæ ſolùm magnitudines, quæ latitudinem habent, nempe ſuperficies terminatæ, & quæ profunditatem adeptæ quoque ſunt, vt ſolida finita Figuræ nomine appellabuntur. Hæ enim propriè terminis comprehendi dicuntur. Nam linea finita non propriè dicitur punctis extremis comprehendi, cum puncta lineam non ambiant, ſed potius punctis terminari dicitur. Itaque termini debent quantitatem, quæ figura dicitur, ambire, & non tantum terminare. Superficies quoque infinita, vel etiam corpus, cum nullis terminis comprehendatur, Figura vocari nulla ratione poteſt. Figuræ vnico comprehenſæ termino ſunt, Circulus, Ellipſis, ſphæra, ſphæroides, & alia huiuſmodi: Pluribus vero terminis incluſæ figuræ ſunt, Triangulum, Quadratum, Cubus, Pyramis, &c. Superficies terminatæ nuncupantur figuræ planæ: ſolida autem circumſcripta, figuræ ſolidæ, ſiue corporeæ. Porro quia formas, ſeu typos variarum figurarum inſpicies quamplurimas in ſequentibus, planarum quidem in prioribus 10. libris, ſolidarum vero in poſterioribus quinque, propterea nulla hoc loco figura depingenda eſſe videtur.

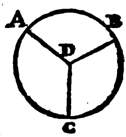
XV.

CIRCVLVS, eſt figura plana ſub vna linea comprehenſa, quæ peripheria appellatur, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram ſunt poſita, cadentes omnes rectæ lineæ inter ſe ſunt æquales.

DEFI-

Digitized by Google

DEFINIT hic circulum, figuram inter planas perfectiſſimam, nempe figuram illam planam, quæ vnica linea circumſcribitur, ad quam omnes rectæ lineæ ductæ ab vno puncto, quod intra figuram ſit, ſint æquales, vocari circulum. Vt ſi ſuperficies, ſeu ſpatium concludatur vnica linea A B C, habueritq́; hanc conditionem, vt ab aliquo puncto intus ſuſcepto, vt ipſe à D, omnes rectæ lineæ cadentes ad terminum A B C, quales ſunt D A, D B, D C, inter ſe ſint æquales, appellabitur talis figura plana, circulus, alias non. Qua vero ratione in circulo punctum illud medium reperiri debeat, docebit Euclides propoſitione 1. tertij lib. Adiungit quoque Euclides, lineam extremam circuli, qualis eſt A B C, appellari Peripheriam, ſeu, vt Latini exponunt, circumferentiam. Poteſt circulus etiam hac ratione deſcribi. Circulus eſt figura plana, quæ deſcribitur à linea recta finita circa alterum punctum extremum quieſcens circumducta, cum in eundem rurſus locum reſtituta fuerit, vnde moueri cœperat. Quæ quidem deſcriptio perſimilis eſt ei, quæ ab Euclide ſphæra deſcribitur lib. 11. Vt ſi intelligatur recta A D, circa punctum D, quieſcens moueri, donec ad eundem redeat locum, à quo dimoueri cœpit, deſcribet ipſa recta totum ſpatium circulare; punctum vero alterum extremum A, delineabit peripheriam A B C: Erit quoque punctum quieſcens D, illud, à quo omnes lineæ cadentes in peripheriam ſunt inter ſe æquales, propterea quod recta A D, circumducta, omnes lineas, quæ ex D, poſſunt educi ad peripheriam, æquè metiatur. Igitur Ellipſis, quamuis figura ſit plana vna linea circumſcripta, tamen quia in ea non datur punctum, à quo ad ipſam lineam terminantem omnes rectæ lineæ ſint æquales, circulus dici nequit.



XVI.

HOC vero punctum, centrum circuli appellatur.

DOCET, punctum illud intra circulum, à quo omnes lineæ rectæ ad circumferentiam ductæ ſunt æquales, appellari centrum circuli, quale eſt præcedentis figuræ punctum D. Vnde perſpicuum eſt, polum alicuius circuli in ſphæra, à quo omnes rectæ ad peripheriam circuli cadentes ſunt æquales, vt ait Theodoſius in ſphæricis elementis, non dici debere centrum circuli, cum punctum illud, quod polus dicitur, exiſtat in ſuperficie ſphæræ, non autem in ſuperficie circuli; quæ tamen eſt neceſſario requiſita conditio, vt punctum aliquod centrum vocetur. Cæterum, vt punctum aliquod circuli dicatur centrum, ſatis eſt, vt ab eo tres duntaxat lineæ cadentes in peripheriam ſint æquales inter ſe, vt demonſtrat Euclides propoſitione 9. lib. 3. Hac enim ratione fiet, vt omnes aliæ ab eodem puncto emiſſæ inter ſe ſint æquales.

DIAME-

Digitized by Google

XVII.

DIAMETER autem circuli, eſt recta quæda nea per centrum ducta, & ex vtraque parte in circul ripheriam terminata, quæ circulum biſariam ſecat.

SI in circulo ducatur recta linea A B, per centrum C, ita trema eius A, & B, terminentur in peripheria, appellabitur ea c li diameter. Non igitur omnis in circulo recta l ducta diameter dicetur, ſed ea ſolummodo, qu centrum vſque ad peripheriam vtrinque exte tur. Vnde plures aſſignari poterunt in circulo metri, vnum verò centrum duntaxat. Quod au Euclides addit, circulum biſariam ſecari à dia tro, perſpicuum ex eo eſſe poteſt, quod diamete



medium circulum, vtpote per centrum, ducitur. Hinc enim fit, vt pter directum diametri per centrum tranſitum, vtrinque æquales cumferentiæ abſcindantur. Quod tamen Thaletem Mileſium hac tione demonſtraſſe teſtatur Proclus. Concipian animo, portionem A D B, accommodari, & exap portioni reliquæ A E B, ita vt diameter A B, co munis ſit vtrique portioni: Si igitur circumferen A D B, congruat penitus circumferentiæ A E B, ma nifeſtum eſt, duas illas portiones à diametro factas, eſſe inter ſe æqu les, quandoquidem neutra alteram excedit: Si verò circumferen A D B, non omni ex parte cadere dicatur ſuper circumferentia A E B, ſed vel extra eam, vel intra, vel partim extra, partim intr tunc ducta recta à centro C, ſecante circumferentiam A D B, in D, & circumferentiam A E B, in E, erunt duæ rectæ C D, C E, ductæ ex cen tro ad circumferentiam eiuſdem circuli æquales, per circuli definiti nem, cum tamen vna ſit pars alterius, quod eſt abſurdum. Non erg cadet vna circumferentia extra aliam, vel intra, vel partim extr partim intra, ſed ambæ inter ſe aptabuntur, ideoq; æquales erun quod demonſtrandum proponebatur.



EX hac demonſtratione conſtat, diametrum non ſolùm circumfe rentiam, verùm etiam totam aream circuli ſecare biſariam. Cum enim ſemicircumferentiæ ſibi mutuo congruant, vt oſtenſum eſt, con gruent etiam ſuperficies ipſa inter diametrum, & vtramque circum ferentiam comprehenſæ, cum neutra alteram excedat. Quare æquale inter ſe erunt.

XVIII.

SEMICIRCVLVS verò eſt figura, quæ continetur ſub diametro, & ſub ea linea, quæ de circuli peripheria aufertur.

EXEM-

Digitized by Google

EXEMPLI gratia, in ſuperiori circulo figura A D B, contenta diametro A B, & peripheria A D B, dicitur ſemicirculus, quia, vt in præcedenti definitione oſtendimus, ea eſt dimidiata pars circuli. Eadem ratione erit figura A E B, ſemicirculus. Idem autem punctum E, centrum ſecans bifariam, centrum eſt in circulo, & in ſemicirculo.

QVOD ſi recta linea B D, non tranſeat per centrum E, ſecabitur circulus ab ea non bifariam, ſed in duas portiones inæquales B A D, B C D, quarum ea, in qua centrum circuli exiſtit, cuiuſmodi eſt portio B A D, maior eſt, quàm alia B C D, extra quàm centrum E, reperitur. Eſſe autem portiones B A D, B C D, inæquales, ita probari poteſt. Concipiatur per centrum E, ducta diameter ad rectam B D, perpendicularis A G. Si igitur dictæ portiones dicantur eſſe æquales, & portio B C D, intelligatur moueri circa rectam B D, vt ſuper portionem B A D, cadat, congruet illa portio huic, & recta F C, rectæ F A, congruet, ob angulos rectos ad F, qui omnes inter ſe æquales ſunt ex defin. 10. cum ſint ſibi mutuo deinceps. Recta ergo F C, quæ nunc eadem eſt, quæ F A, maior erit, quàm E A, pars ipſius F A. Cùm ergo ipſi E A, ſit æqualis E C, quod ambæ ducantur è centro ad circumferentiam, erit quoque F C, maior quàm E C, pars quàm totum, quod eſt abſurdum. Non igitur portio B C D, portioni B A D, congruet, ſed intra eam cadet, cuiuſmodi eſt portio B G D, vt recta F G, eadem tunc exiſtens, quæ F C, minor poſſit eſſe quàm E A, vel E C. Si namque diceretur cadere extra, vt ſi circulus eſſet B C D G, cuius centrum E, & portio B C D, caderet extra B G D, qualis eſt portio B A D, eſſet rurſus F A, eadem tunc exiſtens, quæ F C, maior quàm E G, hoc eſt, quàm E C, atque ita pars F C, maior rurſum foret toto E C. quod abſurdum eſt. Ex quo patet, portionem B A D, in qua centrum E, exiſtit, maiorem eſſe reliqua portione B C D, cum hæc æqualis ſit portioni B G D, quæ pars eſt portionis B A D. Cùm enim oſtenſum ſit, portionem B C D, circa rectam B D, circumductam non poſſe congruere portioni B A D, neque cadere extra, cadet omnino intra, qualis eſt B G D.



XIX.

RECTILINEÆ figuræ ſunt, quæ ſub rectis lineis continentur.

POST definitionem circuli, traditurus iam Euclides deſcriptiones variarum figurarum, explicat prius, quænam figuræ dicantur rectilineæ. De his enim potiſſimum ſermo futurus eſt in hiſce libris. Omnes igitur figuræ planæ, quæ vndique rectis clauduntur lineis, rectilineæ nuncupantur. Ex quo perſpicuum eſt, figuras planas curuis lineis

lineis comprehenſas, dici curuilineas. Eas verò, quæ partim curui partim rectis circumſcribuntur, appellari mixtas. Varia autem genera figurarum rectilinearum ab Euclide deſcribentur.

XX.

TRILATERÆ quidem, quæ ſub tribus.

AFFIRMANS Euclides, eas rectilineas figuras dici trilateras, quæ tribus rectis lineis circumſcribuntur, apertè nobis innuit, quonam modo Triangulum definiri debeat. Cum enim in rectilineis figuris tot ſint anguli, quot latera, ſeu recta lineæ, ex quibus conſtant, dicetur triangulum, figura tribus rectis lineis contenta, cuius omnes ſpecies iam iam adducentur.

XXI.

QVADRILATERÆ verò, quæ ſub quatuor.

EADEM ratione erit Quadrangulum, figura quatuor rectis lineis contenta, cuius variæ ſpecies mox ſubſequentur.

XXII.

MVLTILATERÆ autem, quæ ſub pluribus quàm quatuor, rectis lineis comprehenduntur.

QVONIAM ſpecies rectilinearum figurarum ſunt innumerabiles, propter infinitum numerorum progreſſum: Nam tres rectæ lineæ claudentes figuram efficiunt primam ſpeciem, ſub qua omnia triangula continentur; quatuor conſtituunt ſecundam, quæ omnia quadrangula complectitur; quinque tertiam componunt ſpeciem; ſex quartam, atque ita deinceps infinitè: Ideo Euclides, ne infinitatem hanc figurarum cogatur perſequi, vocat omnes alias figuras rectilineas, quæ pluribus, quàm quatuor, rectis lineis circumſcribuntur, generali vocabulo Multilateras; contentus denominatione trilaterarum figurarum & quadrilaterarum, fortaſſis eam ob cauſam, quod præcipuè in prioribus his libris de Triangulis, atque Quadrangulis ſermo habeatur, & quod facilè ad ſimilitudinem harum duarum ſpecierum cæteræ omnes à quolibet definiri poſſint. Quis enim ex dictis non colligat, figuram quinque lineis rectis contentam appellari quinquilateram, & ſex lineis comprehenſam ſexilateram, atque reliquas eodem modo? Sic etiam dici poterunt huiuſmodi figuræ quinquangula, ſexangula, ſeptangula, &c.

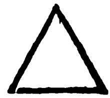
XXIII.

TRILATERARVM autem figurarum, Æquilaterum eſt triangulum, quod tria latera habet æqualia.

DESCENDIT iam ad ſingulas ſpecies triangulorum. Quia

verò

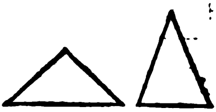
Nam triangula diuidi poſſunt vel habita ratione laterum, vel angulorum. Illarum prima ſpecies prioris diuiſionis, quæ tres ſunt duntaxat, quòd tria latera tribus tantum modis ſeſe poſſint habere. Aut enim omnia æqualia ſunt; aut duo tantùm, tertio exiſtente maiore, vel minore; aut omnia inæqualia. Quando igitur omnia tria latera inter ſe æqualia ſunt, dicetur triangulum Æquilaterum. Porro ex æqualitate omnium trium laterum trianguli æquilateri infertur, omnes tres eius angulos æquales quoq; eſſe, ceu ad quintam propoſitionem huius libri demonſtrabimus.



XXIV.

ISOSCELES autem eſt, quod duo tantùm æqualia habet latera.

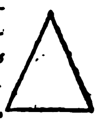
EX hac rurſum æqualitate duorum laterum trianguli Iſoſcelis efficitur, duos angulos ſuper reliquum latus etiam eſſe æquales, vt demonſtrabit Euclides propoſ. 5. huius libri. Appoſuimus autem duo triangula Iſoſcelia, quorum prius habet tertium latus vtrouis æqualium maius, poſterius autem idem minus obtinet: ita vt duæ ſint ſpecies trianguli Iſoſcelis; alterum, cuius tertium latus ſit vtrouis æqualium maius, & alterum, cuius tertium latus vtrouis æqualium minus ſit.



XXV.

SCALENVM verò eſt, quod tria inæqualia habet latera.

HIC denique ex inæqualitate omnium laterum trianguli Scaleni colligitur omnium angulorum inæqualitas, vt oſtendetur propoſ. 18. huius 1. lib. Porro ex his conſtat, eodem modo potuiſſe diuidi triangulum in tres ſpecies, ſi æqualitatis angulorum ratio haberetur. Cum enim aut omnes tres anguli ſint inter ſe æquales; aut duo tantùm, tertio maiore, vel minore exiſtente; aut omnes tres inæquales; erit omne triangulum vel æquiangulum, habens tres omnes angulos æquales: vel duorum tantùm angulorum æqualium: vel omnium angulorum inæqualium; quorum primum quidem Æquilatero, ſecundum verò Iſoſceli, tertium denique Scaleno reſpondet triangulo. Cæterùm quanam arte conſtruenda ſint triangula huius partitionis ſuper quauis data recta linea finita, tradémus propoſ. 1. huius lib.



XXVI.

AD hæc etiam, trilaterarum figurarũ, Rectangulum quidem triangulum eſt, quod rectum angulum habet.

Digitized by Google

NVNC exponit triangulorum ſpecies iuxta poſteriorem diui nem, habita ratione varietatis angulorum. Quia verò tria tantu modò ſunt angulorum rectilineorum genera diuerſa; (Omnis en angulus rectilineus vel eſt rectus, vel obtuſus, vel acutus, vt ſup diximus,) fit vt tres quoque ſpecies triangulorum ſub hac conſide tione reperiantur. Nam aut vnus angulus trianguli eſt rectus, & eam rem reliqui acuti, vt ex 17 propoſ. 1. lib. conſtabit; aut obtuſ & ob eandem cauſam reliqui acuti, aut denique nullus rectus, nu luſq; obtuſus, ſed omnes acuti. Quando igitur triangulum aliqu habet angulum vnum rectum, vocatur ab Euclide, & aliis Geom tris Rectangulum. Poteſt autem triangul huiuſmodi eſſe Iſoſceles, vel ſcalenum, vt hæ gura indicant, æquilaterum autem nulla rati ne. Propter æqualitatem enim laterum eſſe per ea, quæ propoſ. 5. dicemus, omnes etiam a guli æquales; ideoque, cum vnus concedatur r ctus, omnes tres recti, quod pugnat cum propoſ. 17. & 32. huius libr



XXVII.

AMBLYGONIVM autem, quod obtuſum an gulum habet.



TRIANGVLVM Amblygonium, ſi ue obtuſangulum eſſe quoque poteſt vel Iſo ſceles, vel ſcalenum, vt in his figuris cernitur non autem æquilaterum, alias eadem ration eſſent omnes tres anguli per ea, quæ propoſ. 5. oſtendemus, æquale ideoque cum vnus ponatur obtuſus, omnes tres obtuſi, quod mult magis pugnat cum propoſ. 17. & 32. huius libri.

XXVIII.

OXYGONIVM verò, quod tres habet acutos angulos.

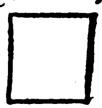
OMNE triangulum Oxygonium, ſiue acutangulum, poteſt eſſe vel æquilaterum, vel Iſoſceles, vel ſcalenum, vt cernere licet in triangulis, quæ in ſpeciebus prioris diuiſionis ſpectanda exhibuimus, ne eadem hic fruſtra repetantur. Ex dictis igitur palam fit, triangulum quodcunq; æquilaterum, eſſe neceſſario Oxygonium: At omne triangulum tam Iſoſceles, quàm Scalenum, eſſe vel Rectangulum, vel Amblygonium, vel Oxygonium; atque iſoſceles Oxygonium rurſum duplex, Iſoſceles nimirum Oxygonium habens tertium latus vtroui æqualium maius, atque Iſoſceles Oxygonium habens tertium latu vtrouis æqualium minus: Vt vnica ſit ſpecies trianguli æquilateri, quatuor verò Iſoſcelis, & tres Scaleni: atq; in vniuerſum octo triangulorum genera; æquilaterum, quod perpetuo Oxygonium eſſe diximus, Iſo-

lum, Iſoſceles rectangulum, Iſoſceles Amblygonium, Iſoſceles Oxygonium habens tertium latus vtrouis æqualium maius, Iſoſceles Oxygonium habens tertium latus vtrouis æqualium minus, Scalenum rectangulum, Scalenum Amblygonium, & Scalenum Oxygonium. Quæ etiam ſic licebit nominibus immutatis appellare, Rectangulum Iſoſceles, Rectangulum Scalenum, Amblygonium Iſoſceles, Amblygonium Scalenum, Oxygonium æquilaterum, Oxygonium Iſoſceles habens tertium latus vtrouis æqualium maius, Oxygonium Iſoſceles habens tertium latus vtrouis æqualium minus, & Oxygonium Scalenum. Quare perſpicuum eſt, quamnam connexionem, ſiue affinitatem habeant inter ſe triangula vtriuſque partitionis. Poſſe autem dari triangulum Iſoſceles Oxygonium, cuius duorum laterum æqualium vtrumuis tertio ſit minus, vt rectè animaduertit Franciſcus Barocius in ſua Coſmographia, oſtendemus ad propoſ. 15. lib. 4. In omni porro triangulo, cuius duo quæcunque latera expreſsè nominantur, ſolet reliquum Latus tertium à Mathematicis appellari Baſis, ſiue illud in ſitu infimum occupet locum, ſiue ſupremũ, &c. Hoc te breuiter monere volui, ne putares aliquid latere myſterij in baſe triãguli, intelligeresq; quodlibet Latus, omni diſcrimine remoto, baſis nomine poſſe nũcupari.

XXIX.

QVADRILATERARVM autem figurarum, Quadratum quidem eſt, quod & æquilaterum, & rectangulum eſt.

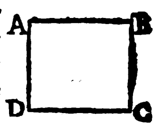
POST figurarum trilaterarum ſpecies, exponit iam ſingulatim quadrilateras figuras, recenſendo quinque tantummodò earum genera, quorum quatuor priora regularia ſunt, poſterius autem, & quintum irregulare. Prima figura quadrilatera dicitur Quadratum, cuius quidem omnia quatuor latera inter ſe æqualia exiſtunt, omnesq; anguli recti. Itaque quadrangulum æquilaterum, & non rectangulum; vel contra, rectangulum, & non æquilaterum, nequaquam Quadratum appellabitur. Docebit autem Euclides propoſ. 46. huius lib. quonam modo conſtruendum ſit quadratum ſuper recta linea propoſita finita.



XXX.

ALTERA verò parte longior figura eſt, quæ rectangula quidem, at æquilatera non eſt.

SECVNDA figura quadrilatera appellatur Altera parte longior, in qua quidem anguli ſunt recti, at latera non ſunt inter ſe æqualia, quamuis bina oppoſita inter ſe æqualia exiſtant. Vt in altera parte longiori A B C D, latera A B, D C, inter ſe, & A D, B C, inter ſe quoque æqualia ſunt, cum A B C D, propter angulorum

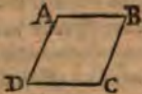


Digitized by Google

gulorum rectitudinem, parallelogrammum ſit, vt in hoc lib. propoſ. 34. oſtendemus.

XXXI.

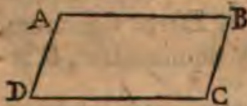
RHOMBVS autem, quæ æquilatera, ſed rec-
gula non eſt



HÆC figura tertia inter quadrilateras, Rhombus dicitur, oppoſitas prorſus habet conditio- & diuerſas à conditionibus figuræ alteræ par- gioris. Habet enim omnia latera æqualia, angu- rò non rectos, & inæquales, quamuis bini oppoſiti ſe æquales exiſtant. Vt in Rhombo A B C D, anguli A, & C, & B, & D, quoque inter ſe æquales ſunt, cum A B C D, propter æq- litatem laterum, parallelogrammum ſit, ceu ad eandem propoſ- huius libri demonſtrabitur.

XXXII.

RHOMBOIDES verò, quæ aduerſa & latera,
angulos habens inter ſe æquales, neque æquilatera e-
neque rectangula.



EST hæc figura, quæ Rhomboides - catur, quadrato omni ex parte oppoſi- Nam neque eius latera omnia æqual- ſunt, neq; vllus angulus rectus, ſed tan- latera bina oppoſita, qualia ſunt A B, D C, & A D, B C, in Rhom- boide A B C D, æqualia inter ſe, item anguli bini oppoſiti, quales ſun- A, C, & B, D, inter ſe exiſtunt æquales. Hæ igitur quatuor figur- quadrilateræ dici poſſunt regulares; cæteræ verò omnes, quæcunqu- ſint, irregulares.

XXXIII.

PRÆTER has autem, reliquæ quadrilateræ figu-
ræ, trapezia appellentur.

RELIQVAS omnes figuras quadrilateras, quæ à prædictis quatuor differunt, ita vt neque latera omnia æqualia, neque omnes angulos æquales, ſeu rectos, neque latera bina oppoſita; neque angulos binos oppoſitos habeant inter ſeſe æquales, generali vocabulo Trapezia nominat: quæ quidem cum infinitis modis variari



queant, rectè irregulares nuncupabuntur. Poſſunt enim duo anguli eſſe recti, vel vnus obtuſus, & alij acuti, vel duo obtuſi, & alij acuti, &c. Eademq; fieri poteſt quaſi diuiſio penes latera: Nam vel aliqua æqualia inter ſe ſunt, vel nullum alteri eſt æquale, &c. Determinatas porro trape-

zioru-

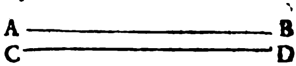
Digitized by Google

[illegible] nonnullas afferemus poſt definitionem linearum parallelarum, ſeu æquidiſtantium, & parallelogrammi.

XXXIV.

PARALLELÆ rectæ lineæ ſunt, quæ cum in eodem ſint plano, & ex vtraque parte in infinitum producantur, in neutram ſibi mutuo incidunt.

VT duæ, vel plures rectæ lineæ dicantur parallelæ, ſiue æquidiſtantes, non ſatis eſt, vt in quamcunque partem, etiam ſpatio infinito, productæ nunquam ad vnum punctum coeant; ſed neceſſe quoque eſt, vt in vna plana ſuperficie exiſtant. Multæ ſiquidem lineæ rectæ non exiſtentes in eadem ſuperficie plana productæ ad ſpatium infinitum, nunquam in vnum conueniunt, & tamen non ſunt parallelæ dicendæ; quales ſunt, exempli gratia, duæ rectæ lineæ in tranſuerſum poſitæ in medio aere, & non ſe tangentes; Hæ etenim nunquam coire poſſunt. Dicuntur autem duæ rectæ lineæ in eadem exiſtere plana ſuperficie, quando ſuperficies aliqua plana vni earum accommodata, ita vt omnia puncta illius tangat, & circa illam immobilem circumuoluta, alteri quoque accommodari poteſt ſecundum omnia eius puncta, quamuis reipſa in duabus ſuperficiebus diuerſis reperiantur; Vt propoſitis duabus rectis lineis AB, CD, ſi ſuperficies aliqua plana rectæ AB, applicetur, omnia eius tangens puncta, ita vt circa illam circumducta tangat quoque omnia puncta alterius rectæ CD; dicentur huiuſmodi rectæ duæ lineæ in



eadem ſuperficie plana exiſtere, alias non. Si igitur hæ duæ rectæ lineæ eadem non coëant, etiamſi infinitè producantur tam ad partes A, C, quam ad B, D, appellabuntur parallelæ, ſiue æquidiſtantes. Cæterum planius, perfectiusq; intelliges in xi. lib. quo modo duæ rectæ lineæ, vel etiam plures in eadem dicantur ſuperficie exiſtere: Satis ſit hoc loco breuiter admonuiſſe, rectè ab Euclide vtramque conditionem eſſe poſitam in definitione linearum parallelarum. Debent enim in eodem exiſtere plano, & productæ in vtramuis partem nunquam in vnum conuenire, quanquam hæc productio continuetur ad ſpatium infinitum. Quod ſi duæ rectæ lineæ per immenſum aliquod ſpatium extenſæ non cernantur coire, conſtet tamen, eas tandem ex vna parte longius protractas in vnum punctum conuenturas, quamuis ex altera ſemper magis ac magis inter ſe diſtent, ac diſiungantur, nequaquam appellandæ erunt parallelæ. Quotieſcunque ergo duæ lineæ rectæ dicuntur à quopiam eſſe parallelæ, is neceſſe eſt concedat, illas in vna, eademq; ſuperficie iacere, & nunquam poſſe coire. Similiter, ſi quis concludere velit, duas rectas lineas eſſe parallelas, hic demonſtret prius oportet, eas in eodem exiſtere plano, & in neutram partem productas

coniũgi poſſe. Qua in re non pauci videntur hallucinari, quæ ſo-duntaxat conantur oſtendere, aliquas rectas lineas eſſe paralle-quod in neutram partem coeant, etiamſi infinitè producantur, nu-facta prorſus mentione alterius conditionis, quæ eaſdem lineas in e-dem requirit exiſtere plano.

HIC finem imponit Euclides definitionibus primi libri. Quoni-verò hoc eodem libro mentio fiet figuræ, quæ Parallelogrammum, n-non earum, quæ complementa parallelogrammi dicuntur, neceſ-rium eſſe duximus, duabus definitionibus adiunctis explicare, quid-Parallelogrammum, & quæ ſint parallelogrammi complementa, facilius demonſtrationes percipiantur.

XXXV.

PARALLELOGRAMMVM eſt figura qu-drilatera, cuius bina oppoſita latera ſunt parallela, ſe-æquidiſtantia.

VT figura quadrilatera A B C D, ſiquidem latus A B, æquidiſt-lateri D C, & latus A D, lateri B C, nuncupatur Parallelogram-



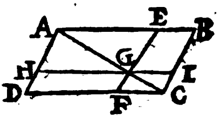
mum. Sunt autem quatuor ſolum para-lelogramma; Quadratum, figura alter-parte longior, Rhombus, & Rhomboide-quorũ priora duo rectangula, quod omn-angulos habeant rectos, poſteriora ver-duo non rectangula vocantur, quod nullus in eis angulus exiſtat re-ctus. Cæterum, quatuor has figuras eſſe parallelogramma, oſtende-mus ad propoſ. 34. huius lib. Itaque poſſumus quadrilateras figura-(vt & antiqui Geometræ) diuidere in Parallelogrammum, & Trape-zium. Parallelogrammum rurſus in rectangulum, & æquilaterum-quale eſt Quadratum: in nec rectangulum, nec æquilaterum, quali-eſt Rhomboides; in rectangulum, ſed non æquilaterum, qualis eſt fi-gura altera parte longior: & in æquilaterum, ſed non rectangulum-cuiuſmodi eſt Rhombus. Trapeziorum quoque aliud quidem habe-duo latera oppoſita parallela, aliud verò minimè; aliud autem nulla-oppoſita latera habet parallela. Præterea illud prius vel habet duo ali-latera, quæ non ſunt parallela, inter ſe æqualia, diciturq́; Trapezium Iſoſceles: vel inæqualia, Trapeziumq́; Scalenum appellatur. Itaque ex his omnibus ſeptem genera figurarum quadrilaterarum conſtitui poſſunt; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, Rhom-boides, Trapezium Iſoſceles, Trapezium Scalenum, & Trapezium illud irregulare, in quo nulla latera ſunt parallela.

XXXVI.

CVM verò in parallelogrammo diameter ducta fue-rit, duæq́; lineæ lateribus parallelæ ſecantes diametrum in vno

Digitized by Google

eodemque puncto, ita vt parallelogrammum ab parallelis in quatuor diſtribuatur parallelogramma, appellantur duo illa, per quæ diameter non tranſit, complementa; duo verò reliqua, per quæ diameter incedit, circa diametrum conſiſtere dicuntur.



SIT parallelogrammum ABCD, in quo diameter AC, & linea EF, ſecans diametrum in G, & parallela exiſtens lateribus AD, BC. Item linea HI, ſecans diametrum in eodem puncto G, parallelaque lateribus AB, DC, exiſtens. Quæ cum ita ſint, perſpicuum eſt, parallelogrammum totum diuiſum eſſe in quatuor parallelogramma, quorum quidem duo EBIG, GFDH, per quæ diameter AC, non tranſit, vocantur à Geometris complementa, ſiue ſupplementa reliquorum duorum AEGH, GICF, quæ dicuntur circa diametrum conſiſtere, quippe cum per ea diameter tranſeat, vt videre eſt in præſenti figura.

PETITIONES, SIVE POSTVLATA.

I.

POSTVLETVR, vt à quouis puncto in quoduis punctum, rectam lineam ducere concedatur.

PRIMVM hoc poſtulatum planum admodum eſt, ſi rectè conſiderentur ea, quæ paulo ante de linea ſcripſimus. Nam cum linea ſit fluxus quidam puncti imaginarius, atque adeò linea recta fluxus directus omninò itinere progrediens, fit vt ſi punctum quodpiam ad aliud directo moueri intellexerimus, ducta ſane ſit à puncto ad punctum recta linea: Id quod prima hac petitione poſtulat Euclides, quemadmodum hic vides à puncto A, ductam eſſe rectam lineam ad punctum B; ab eodemque aliam ad punctum C; Item aliam ad punctum D; & ſic innumera alia ab eodem puncto educi poſſunt ad alia atque alia puncta.

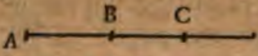


II.

ET rectam lineam terminatam in continuum recta producere.

QVOD ſi punctum illud ferri adhuc cogitauerimus motu directo, & qui omnis inclinationis ſit expers, producta erit ipſa recta linea terminata, & nunquam erit finis huius productionis, cum punctum illud intelligere poſſimus moueri ad infinitam diſtantiam. Sic linea

Digitized by Google



recta A B, producta eſt primo continuum ad punctum C. Dein ad punctum D, &c.

III.

ITEM quouis centro, & interuallo circulum deſcribere.



IAM verò, ſi terminatam rectam lineam cuiuſcunque quantitatis mente conceperimus applicatam eſſe ſecundum alterum extremū ad quoduis punctum, ipſamque circa hoc punctum fixum circumduci donec ad eum reuertatur locum, à quo dimoueri cœpit; deſcriptus erit circulus, effectumq́, quod tertia petitio iubet. Exemplum habes in his quinque lineis A B, A C, A D, A E, A F, quæ ſingulæ citra centrum A, circumuolutæ ſingulos circulos deſcripſerunt iuxta quantitatem, ſeu interuallum ipſarum.

PRÆTER hæc tria poſtulata, quibus Euclides contentus fuit, ſunt multa alia æquè facilia, è quibus duntaxat in medium proferre decreui illud, quod frequentius repetendum erit in progreſſu totius Geometriæ. Reliqua enim prudens lector ex ſe vel facilè intelliget.

IV.

ITEM quacunque magnitudine data, ſumi poſſe aliam magnitudinem vel maiorem, vel minorem.

OMNIS enim quantitas continua per additionem augeri, per diuiſionem verò diminui poteſt infinitè: Vnde nunquam dabitur quantitas continua adeo magna, quin ea maior dari poßit; neque tam parua, quin minor ea poßit exhiberi. Hoc idem in numeris verum eſt, quod ad additionem pertinet. Nam quilibet numerus per continuam additionem vnitatis augeri poteſt infinitè: quamuis in eius diminutione ad vnitatem indiuiduam deueniatur.

COMMVNES NOTIONES SIVE Axiomata, quæ & Pronunciata dici ſolent, vel Dignitates.

I.

QVÆ eidem æqualia, & inter ſe ſunt æqualia. Et quod vno æqualium maius eſt, aut minus; maius quoq; eſt, aut minus altero æqualium. Et ſi vnum æqualium maius eſt, aut minus magnitudine quapiam, alterum quoque

Digitized by Google

quoque æqualium eadem magnitudine maius eſt, aut minus.

FIERI nulla ratione poteſt, vt duæ quantitates inæquales, æquales ſint alteri quantitati. Si enim minor illarum propoſitæ quantitati æqualis extiterit, excedet eandem neceſſariò maior illarum. Et ſi maior æqualis fuerit propoſitæ quantitati, ſuperabitur minor ab eadem. Quare rectè colligitur, quantitates, quæ eidem quantitati æquales fuerint, inter ſe æquales quoque eſſe. Reliquæ quoq; partes axiomatis à nobis adiectæ, quòd frequentem vſum habeant, clariſſimæ ſunt.

II.

Et ſi æqualibus æqualia adiecta ſint, tota ſunt æqualia.

SI enim quantitates conflatæ, ſiue compoſitæ, inæquales forent, procul dubio maiori plus eſſet adiectum, quàm minori, cùm antea æquales extiterint. Quare ex additione æqualium quantitatum ad quantitates æquales, conficientur quantitates quoque æquales.

III.

ET ſi ab æqualibus æqualia ablata ſint, quæ relinquuntur, ſunt æqualia.

NAM ſi reliquæ quantitates forent inæquales, à minore plus fuiſſet detractum, quàm à maiore.

IV.

ET ſi inæqualibus æqualia adiecta ſint, tota ſunt inæqualia. Et, ſi inæqualibus inæqualia adiecta ſint, maiori maius, & minori minus, tota ſunt inæqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.

QVIN &, ſi æqualibus inæqualia adiecta ſint, tota erunt inæqualia: quoniam maior quantitas addita vni æqualium, maiorem conſtituit quantitatem, quàm minor alteri æqualium adiecta: quemadmodum & ſi inæqualibus æqualia adijciantur, compoſita quantitas ex maiore, maior eſt, quàm compoſita ex minore. Alteram partem huius axiomatis nos adiecimus, propter frequentem eius vſum.

V.

ET ſi ab inæqualibus æqualia ablata ſint, reliqua ſunt inæqualia. Et ſi ab inæqualibus inæqualia ablata ſint, à maiori minus, & à minori maius, reliqua ſunt inæqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.

SIC etiam, Si ab æqualibus inæqualia ablata ſint, reliqua erunt inæqualia: quia maior quantitas ablata relinquet minorem quantitatem, quàm minor; quemadmodum reſiduum maioris maius eſt

Digitized by Google

reſiduo minoris, ſi æqualia auferantur ab inæqualibus. Cæterùm Euclides non docet, quidnam ſimpliciter, & abſolutè gignatur ex additione quantitatum inæqualium ad quantitates inæquales, vel quid relinquatur poſt ſubtractionem inæqualium quantitatum ab inæqualibus quantitatibus; propterea quod nihil certò colligi inde poteſt, niſi quando maiori maius additur, & à maiori minus detrahitur, vt in ſecunda parte axiomatis dictum eſt, quam nos ob inſignem eius vtilitatem adiecimus. Poſſunt enim compoſita quantitates, vel reſidua, eſſe & inæquales, & æquales. Si enim ad 7 & 5 addantur 4. & 3. efficientur 11 & 8. quæ ſunt inæqualia Sic etiam ſi ex 7. & 5 detrahantur 2. & 1. relinquentur 5. & 4. quæ ſunt inæqualia. At vero, ſi ad 7. & 5. addantur 4. & 6. conficientur 11. & 11. quæ æqualia ſunt. Item ſi detrahantur 3. & 1. ex 7. & 5. remanebunt 4. & 4. quæ æqualia quoque exiſtunt.

PORRO in his omnibus pronunciatis, primo excepto, nomine æqualium quantitatum intelligenda eſt etiam vna & eadem multis communis. Si enim æqualibus idem commune adijciatur, tota fient æqualia: Et ſi ab æqualibus idem commune detrahatur, reſidua æqualia erunt. Et ſi inæqualibus idem commune adijciatur; vel eidem communi addantur inæqualia, tota fient inæqualia: & ſi ab inæqualibus idem commune detrahatur, vel ab eodem communi inæqualia auferantur, reſidua exiſtent inæqualia.

VI.

ET quæ eiuſdem duplicia ſunt, inter ſe ſunt æqualia. Et quod vnius æqualium duplum eſt, duplum eſt & alterius æqualium.

SIMILITER, quæ eiuſdem ſunt triplicia, vel quadruplicia, vel quintuplicia, &c. inter ſe ſunt æqualia. Si enim inæqualia forent, & maius eorum eſſet duplex, vel triplex, &c. alicuius quantitatis, deficeret vtique minus à duplici vel triplici, &c. Quod ſi contra, minus eſſet duplex, vel triplex, &c. quantitatis cuiuſpiam, excederet ſanè maius duplex ipſum; vel triplex, &c. Hoc autem & ex ſecundo axiomate comprobari poteſt ad hunc modum. Si enim duæ quantitates æquales fuerint alicui tertiæ, & vtrique tertia illa addatur,
a 2. pron *erunt compoſitæ duplices illius tertiæ, a ſed & inter ſe æquales, ob idem additamentum. Quod ſi rurſum compoſitis eadem tertia adijciatur,*
b 2. pron *erunt conflatæ triplices eiuſdem tertiæ. Cùm igitur b & æquales inter ſe, propter idem additamentum exiſtant; eademq; ſit ratio in cæteris multiplicibus, perſpicuum erit axioma propoſitum. Secundam porrò partem huius axiomatis nos appoſuimus, quod non rarò eius vſus in rebus Geometricis requiratur.*

Digitized by Google

VII.

ET quæ eiuſdem ſunt dimidia, inter ſe æqualia ſunt. Econtra, Quæ æqualia ſunt, eiuſdem ſunt dimidia.

PARI ratione, quæ eiuſdem ſunt partes tertiæ, vel quartæ, vel quintæ, &c. inter ſe æqualia ſunt.

IN his duobus pronunciatis per eandem quantitatem, intelligi debent quantitates etiam æquales. Nam quæ æqualium duplicia ſunt, vel triplicia, &c. inter ſe æqualia quoque ſunt: Item, quæ æqualium ſunt dimidia, vel tertia, vel quarta, &c. & inter ſe æqualia neceſſario exiſtunt. Partem quoque ſecundam huiuſce axiomatis nos adiunximus, propterea quòd non minùs frequenter, quàm prima, à Geometris vſurpatur.

VIII.

ET quæ ſibi mutuò congruunt, ea inter ſe ſunt æqualia.

HOC eſt, duæ quantitates, quarum vna ſuperpoſita alteri, neutra alteram excedit, ſed ambæ inter ſe congruunt, æquales erunt. Vt duæ lineæ rectæ dicentur eſſe æquales, quando vna alteri ſuperpoſita, ea quæ ſuperponitur, alteri tota congruit, ita vt eam nec excedat, nec ab ea excedatur. Sic etiam duo anguli rectilinei æquales erunt, quãdo vno alteri ſuperpoſito, is qui ſuperponitur, alterum nec excedit, nec ab eo exceditur, ſed lineæ illius cum lineis huius prorſus coincidunt: Ita enim erunt inclinationes linearum æquales, quamuis lineæ interdum inter ſe inæquales exiſtant.

E CONTRARIO, Quæ inter ſe ſunt æqualia, ſibi mutuò congruent, ſi alterum alteri ſuperponatur. Intelligendum eſt autem, quantitates ſibi mutuò congruentes, eſſe æquales, ſecundum id duntaxat, in quo ſibi congruunt. Congruit autem longitudo longitudini tantùm, ſuperficies ſuperficiei, ſolidum ſolido, linearum inclinatio inclinationi linearum, &c.

IX.

ET totum ſua parte maius eſt.

CVM pars à toto ablata relinquat adhuc aliquid, ne totum ipſum auferátur; perſpicuum eſt, omne totum ſua eſſe parte maius.

IN ſequentibus porrò pronunciatis interrumpitur ordo Euclidis, propterea quòd duo alia axiomata hoc loco inſerenda eſſe cenſuimus valde neceſſaria, cùm ex iis axioma 12. quod Euclidi eſt decimum, demonſtrari poſſit, vt ibi dicemus. In margine tamen numeros appoſuimus ordini Euclidis reſpondentes.

X.

DVÆ lineæ rectæ non habent vnum & idem ſegmentum commune.

NON

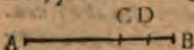
Digitized by Google

NON eſt difficile iſtud axioma, ſi perfectè intelligatur natura ... cta lineæ. Cùm enim linea recta directo ſemper itinere, nullam partem deflectendo, producatur, fieri nulla ratione poteſt, vt duæ ... neæ rectæ habeant vnam partem, quamuis minimam, commune præter vnicum punctum, in quo ſe mutuò interſecant. Quod tam breuiter Proclus ita demonſtrat. Habeant, ſi fieri poteſt, duæ re...



A B, A C, partem communem A D. Ex centro autem
a3.petit *& interuallo D A, a deſcribatur circulus ſecans du... rectas propoſitas in punctis B, & C; b Erunt igitur d...*
b17.def *circumferentiæ A B, A B C, inter ſe æquales. (Sunt ... nim circumferentiæ ſemicirculorum æqualium, cu... A D B, A D C, ponantur eſſe diametri) pars & totum quod eſt abſurdum. Non ergo duæ rectæ habent vnam & idem ſegmentum commune. Quod eſt propoſitum.*

POSSVNT tamen duæ lineæ rectæ commune habere ſegmentum, quando vnam & eandem rectam lineam conſtituunt. Vt in ha... figura, rectæ A D, B C, commune habent ſegmentum C D, quia ambæ vnam rectam conſtituunt lineam A B. At verò quando duæ rectæ ſunt diuerſæ quales fuêre A B, A C, in ſuperiori exemplo, non poſſunt poſſidere ſegmentum aliquod commune, vt rectè à Proclo fuit demonſtratum.



XI.

DVÆ rectæ in vno puncto concurrentes, ſi producantur ambæ, neceſſariò ſe mutuò in eo puncto interſecabunt.

HOC etiam axioma ex natura lineæ rectæ pendet. Quod tamen ita demonſtrabimus. Coeant duæ rectæ A B, C B, in B. Dico illas productas ſe mutuò ſecare in B, nempe C B, productam cadere in E, ſupra rectam A B, productam. Nam ſi C B, producta non cadit ſupra A B, productam, congruet cum A B, producta, ita vt tranſeat per D, atq; ita duæ rectæ A B D, C B D, habebunt idem ſegmentum commune B D, quod in antecedenti axiomate oſtenſum eſt fieri non poſſe: Vel certè infra A B, productam cadet, ita vt C B, producta cadat in F, ſitq; vna recta linea C B F. Centro igitur B, deſcribatur ad quoduis interuallum circulus A C F D, ſecans rectas A B, C B, productas in D, F. Quia ergo vtraque recta A B D, C B F, per centrum B, ducitur, erit tam A C D, quàm C F, ſemicirculus, per defin. 18. ac proinde æquales erunt circumferentiæ A C D, C F. vt ad defin. 17. demonſtrauimus, totum & pars. Quod eſt abſurdum.



DVO proxima axiomata ab Euclide non ponuntur, quia tamen

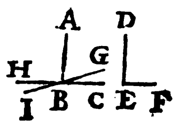
neceſſa-

ſunt ad aliorum axiomatum probationes, ea hic inſeruimus. Tria autem ſequentia Euclidis ſunt.

XII. x.

ITEM, omnes anguli recti ſunt inter ſe inæquales.

Hoc axioma apertiſſimum eſſe cuilibet poteſt ex 10. definitione, qua angulus rectus deſcribitur; propterea quòd inclinatio linearum angulum rectum conſtituentium augeri, minuiue nequit, ſed prorſus eſt immutabilis. Efficitur enim rectus angulus à linea perpendiculari, quæ quidem alteri lineæ rectæ ita ſuperſtat, vt faciat vtrobique angulos æquales, neque magis in vnam partem, quàm in alteram inclinet. Ex quo fit, omnes angulos rectos æquales inter ſe eſſe, cùm ſemper ſit eadem inclinatio, quamuis lineæ ſint inæquales interdum. Conatur tamen Proclus ex 10. *definitione id demonſtrare hac ratione. Sint duo anguli recti A B C, D E F, quos dico eſſe inter ſe æquales. Si enim fieri poteſt, ſint inæquales, ſitq; A B C, maior. Si igitur mente concipiamus punctum E, applicari puncto B, & rectam D E, rectæ A B, cadet recta E F, inter rectas A B, BC, qualis eſt B G, propterea quòd angulus D E F,*



minor ponitur angulo A B C. a *Producatur C B, in rectum & continuum vſque ad H. Cùm igitur angulus A B C, ſit rectus,* b *erit angulus A B H, illi deinceps æqualis, & rectus quoque: quare maior fiet etiam angulo A B C.* c *Producta autem G B, in rectum & continuum vſque ad I, cadet portio producta B I, infra C B, productam, vt in præcedenti axiomate eſt demonſtratum. Quare cùm angulus A B G, ponatur rectus,* d *fiet angulus A B I, illi deinceps æqualis. Quapropter angulus A B H, maior quoque erit angulo A B I, pars toto, quod eſt abſurdum. Non ergo inæquales ſunt duo anguli recti propoſiti, ſed æquales. Quod eſt propoſitum: eademq; eſt ratio in cæteris.*

a 2. petit. b 10. de- b 2. pet c 10. de- fin.

RECTE autem hoc loco monet Pappus, axioma iſtud non poſſe conuerti; non enim omnis angulus recto angulo æqualis rectus eſt, cùm & curuilineus recto æqualis eſſe queat, vt in 5. lib. demonſtrabimus, qui tamen non dicitur rectus, cùm non ſit rectilineus. Solus igitur angulus rectilineus æqualis angulo recto, rectus nuncupabitur: Et omnes anguli recti inter ſe æquales erunt, ſine vlla exceptione.

XIII. xj.

ET ſi in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad eaſdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ ſibi mutuò incident ad eas partes, vbi ſunt anguli duobus rectis minores.

VT ſi

Digitized by Google



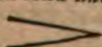
VT ſi in duas lineas rectas AB, CD,
dens alia recta EF, faciat duos angulos inte
& ex eadem parte BEF, DFE, minores du
rectis, vult Euclides, illas tandem conuenturas
ad aliquod punctum vnum, verſus eam partem, in qua duo a
minores exiſtunt duobus rectis, vt appoſitum exemplum commonſ
Ratio huius perſpicua eſt, quoniam quando duo anguli intern
ex eadem parte æquales ſunt duobus rectis, duæ rectæ lineæ in a
tram partem coire poſſunt, ſed æquali ſemper ſpatio protenduntur
propoſ. 28. huius lib. demonſtrabitur. Quare ſi duo anguli in
ni, & ex eadem parte efficiuntur minores duobus rectis, neceſſe eſt
ea parte dictarum linearum ſpatium coarctari, ex altera vero ma
ac magis dilatari; ideoq; eas conuenturas tandem eſſe aliquando
vnum punctum. Verùm quia axioma hoc ſubobſcurum videtur ſ
tyronibus, imò à numero principiorum reijcitur à Gemino Geomet
Proclo, & alijs, quod non facilè quiuis ei aſſenſum præbeat; præſ
tim cùm reperiantur aliæ quædam lineæ, quarum ſpatium, licet ſe
per magis ac magis coanguſtetur (quemadmodum & in duabus re
AB, CD, accidit, vt ad propoſ. 28. huius lib. demonſtrabimus) nu
quam tamen in vnum punctum coeunt, etiamſi infinitè producan
tur, vt conſtat ex elementis conicis Apollonij Pergæi, & ex linea co
chili Nicomedis. Idcircò pleniorem illius explicationem in ſcholiu
propoſ. 28. huius lib. differimus, vbi illud ex Procli ſententia Geom
tricè demonſtrabimus, vt firmè, ac ſine vlla dubitatione, tanquam
veriſſimũ, ad propoſitionis 29. huius lib. (vbi primum eius vſus incip
apparere) & ad aliarum propoſitionum demonſtrationes poſſit aſſu
mi. Quod tamen nos aliter quàm Proclus, & quidem magis geome
tricè demonſtrabimus, ita vt nullus dubitationi locus relinquatur.

xij.

XIV.

DVÆ rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt.

NVLLAM prorſus habet difficultatem hoc principium. Si enim duæ rectæ lineæ ex vna parte coeant ad efficiendum angulum, neceſſariò ex altera parte ſemper magis ac magis disiungẽtur, ſi producantur, vt in exemplo propoſito perſpicuum eſt.



Quare vt ſuperficies, ſpatiúmve quodpiam rectilineum ex omni parte concludatur, duabus rectis lineis tertia quædam adiungenda eſt. Ita enim conficietur ſpatium triangulare, ſeu figurarum rectilinearum prima. Proclus tamen demonſtrat hoc principium, hoc modo. Si fieri poteſt, vt duæ lineæ rectæ claudant ſuperficiem, comprehendãt duæ rectæ ABC, ADC, ſuperficiem ABCD, ita vt duæ illæ rectæ coeant in duobus punctis, A, &

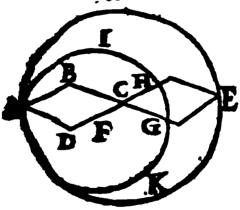


a 3. petit
b 2. petit *C. Facto deinde centro C, a deſcribatur circulus interuallo CA. b &*

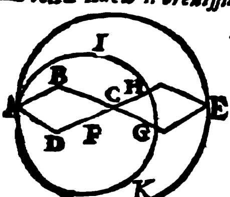
produ-

... rectæ A B C, A D C, in rectum, & continuum vſque ad ... entiam, nempe ad puncta, E, & F. Itaque quia rectæ A C E, ... tranſeunt per centrum C, erunt ſemicirculi A E, A E F, in- 217. def. ... ales, & idcirco circumferentia quoque A E, circumferentiæ æqualis erit, pars toti, quod fieri non poteſt. Non ergo rectæ duæ ... ſpatium comprehendunt. Quod eſt propoſitum.

... D quia fortaſſis aduerſarius dicet, rectas A B C, A D C, pro... coire iterum in aliquo puncto circumferentiæ, vt in E, vel F, ... adeò non ſequi, partem æqualem eſſe toti, demonſtrabimus tunc ... axioma hoc modo. Coeant ergo duæ illæ lineæ iterũ, ſi fieri poteſt, ... Sumpto pũcto F, in recta A D C, quocunque, erit A F, minor, quàm ... minor ſit, quàm A F C, hoc eſt, quàm C H E, quæ ipſi A F C, æqualis eſt, atque adeò multò minor, quam F E. Circulus igitur ex F, ad interuallum F A, deſcriptus ſecabit rectam F E, in H, atque adeò C G E, in G. Quoniam igitur A F H, diameter circuli eſt, erit A I H, ſemicirculus, vt ad defin. 17. oſtendimus: Portio autem A I G, quam aufert recta A B G, & in qua centrum non eſt, ſemicirculo minor, vt ad defin. 18. demonſtrauimus. Eſt ergo circumferentia A I G, minor quàm A I H, totum quàm pars. quod eſt abſurdũ. Quòd autem minor ſit portio A I G, ſemicirculo, oſtendemus, vt ſuprà. Nam ducta ex centro F, ad rectam A B G, perpendiculari, & circumuoluta portione A I G, circa rectam A B G, cadet circumferentia A I G, intra circumferentiam A K G, ne pars maior ſit quàm totum, vt ſuprà demonſtrauimus.



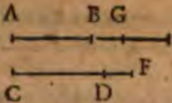
CONSTAT hoc etiam axioma ex definitione lineæ rectæ. Cùm enim recta linea ſit breuiſſima extenſio ab vno puncto ad aliud, duci poterit vnica tantùm linea ab vno pũcto ad aliud. Quare ſi A B C, recta eſt, nõ erit A D C, recta. Quod etiam patet ex definitione Platonis. Nam ſi A B C, eſt recta, obumbrabũt media illius extremitates eiuſdẽ. Igitur media pũcta lineæ A D C, nõ obumbrant extrema, cùm viſus, per rectam A B C, feratur. Non ergo recta eſt A D C.



HIS axiomatis ab Eucl. de poſitis adiungemus nos nonnulla alia ex aliis Geometris decerpta, non minùs neceſſaria ad futuras demonſtrationes Problematum atque Theorematum cùm Euclidis, tum cæterorum Mathematicorum, quàm ea, quæ nobis tradidit Euclides.

XV.

SI æqualibus inæqualia adjiciantur, erit totorum exceſſus, adiunctorum exceſſui æqualis. HOC



HOC, & ſequens pronunciatum deſu-pſit Proclus ex Pappo. Aequalibus itaq; qua-titatibus A B, C D, addantur inæquales B D F, ſitq; B E, maior quàm D F. Et ex B E, a-feratur B G, æqualis ipſi D F, vt ſit G E, exceſſus, quo quantitas a-dita B E, ſuperat quantitatem additam D F. Quoniam igitur æqua-
a 2. pron libus A B, C D, addita ſunt æqualia B G, D F, a erunt tota A G, C æqualia. Quare conſtat, totam quantitatem A E, ſuperare totam C eodem exceſſu G E, quo magnitudo D F, adiuncta à magnitudi adiuncta B E, ſuperatur. Quod eſt propoſitum.

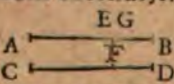
XVI.

SI inæqualibus æqualia adiungantur, erit totorum exceſſus, exceſſui eorum, quæ à principio erant, æqualis.

IN eadem figura, inæqualibus quantitatibus B E, D F, addantur æquales A B, C D. Et ex maiore B E, auferatur B G, æqualis ipſi D F, vt G E, ſit exceſſus; quo quantitas B E, quantitatem D F, ſuperat. Quoniam igitur æqualibus B G, D F, addita ſunt æqualia A B,
b 2 pron *C D, b erunt tota A G, C F, æqualia. Quamobrem tota quantitas A E, ſuperabit totam C F, eodem exceſſu G E, quo maior quantitas propoſita B E, minorem D F, ſuperat. Quod eſt propoſitum.*

XVII.

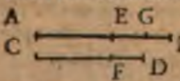
SI ab æqualibus inæqualia demantur, erit reſiduorum exceſſus, exceſſui ablatorum æqualis.



AB æqualibus A B, C D, auferantur inæqualia B E, D F. Sitq; E G, exceſſus, quo quantitas B E ſuperat quantitatem D F, ita vt B G, æqualis ſit ipſi D F. Quia igitur ab æqualibus A B, C D, ablata ſunt æqualia B G, D F, c remanebunt A G, C F, æqualia. Perſpicuum
c 3. pro. *ergo eſt, reſiduum A E, ſuperari à reſiduo C F, eodem exceſſu E G, quo magnitudo ablata B E, ablatam magnitudinem D F, ſuperat. Quod eſt propoſitum.*

XVIII.

SI ab inæqualibus æqualia demantur, erit reſiduorum exceſſus exceſſui totorum æqualis.



AB inæqualibus A B, C D, auferantur æqualia A E, C F. Sitq; B G, exceſſus, quo tota quantitas A B, ſuperat totã quantitatem C D, ita vt A G, æqualis ſit ipſi C D. Quoniam igitur ab æqualibus A G, C D, ablata ſunt æqualia A E, C F, remanebunt E G, F D, æqualia.

Digitized by Google

Ex quo reſiduum E B, ſuperabit reſiduum F D, eodem exceſſu B G, quo inæqualitas A B, ſuperat totam quantitatem C D. Quod eſt propoſitum.

In his quoque quatuor proximè poſitis pronunciatis, nomine quantitatum æqualium intelligenda eſt vna etiam ſola quantitas multis communis. Si enim eidem communi inæqualia adijciantur, erit totorum exceſſus adiunctorum exceſſui æqualis. Et ſi inæqualibus idem commune adiungatur, erit totorum exceſſus, exceſſui eorum, quæ à principio erant, æqualis. Et ſi ab eodem communi inæqualia demantur, erit reſiduorum exceſſus exceſſui ablatorum æqualis. Et ſi ab inæqualibus idem commune demætur, erit reſiduorum exceſſus exceſſui totorum æqualis. Nam in numeris, ſi ad 6. addas 5. & 3. fiunt 11. & 9 quorum exceſſus eſt 2 idem qui ipſorum 5. & 3. Rurſus, ſi ad 5. & 3. addas 6. fiunt 11. & 9. quorum exceſſus 2. idem eſt, qui ipſorum 5. & 3. Item ſi ex 8. demas 5. & 2. relinquuntur 3. & 6. quorum exceſſus 3. idem eſt, qui ipſorum 5. & 2. Denique ſi ex 10. & 7. demas 3. relinquuntur 7. & 4. quorum exceſſus 3. idem eſt, qui ipſorum 10. & 7.

XIX.

OMNE totum æquale eſt omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis.

QVONIAM omnes partes ſimul ſumptæ conſtituunt totum; cuius ſunt partes, manifeſta eſt veritas huius axiomatis.

XX.

SI totum totius eſt duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.

VT quia totus numerus 20. duplus eſt totius numeri 10; Et ablatus ex illo 6. ablati ex hoc 3. propterea reliquus illius 14. duplus etiam eſt reliqui huius 7. In vniuerſum autem hoc demonſtrabitur propoſ. 5. lib. 5. nimirum. Si magnitudo magnitudinis æquè multiplex ſit, atque ablata ablatæ, vt decupla, vel centupla, &c. & reliqua reliquæ æquè multiplex erit, atque tota totius.

COLLIGI poteſt ex dictis cum Proclo, & Gemino hoc diſcrimen inter poſtulata, & axiomata, quòd cùm vtraque ſint per ſe nota, & indemonſtrabilia, illa naturam ſapiunt Problematum, propterea quòd aliquid fieri expoſcant; hæc verò, Theoremata imitantur, cùm nihil fieri petant, ſed ſolùm ſententiam aliquam notiſſimam proponant. Differt autem poſtulatum à problemate, quòd conſtructio poſtulati non indigeat vlla demonſtratione, problematis autem conſtructionem concedat nemo ſine demonſtratione, eo quòd difficile aliquid nobis exhibeat conſtruendum. Idem diſcrimen inter Axioma, & Theorema reperitur; Illud enim demonſtrari non de-

Digitized by Google

bet, hoc verò concedendum nulla eſt ratione, niſi demonſtretur. Na nemo huius propoſitionis demonſtrationem, vel etiam probation requiret. Quæ eidem æqualia, inter ſe quoque æqualia ſunt. Hu autem ſtatim demonſtrationem deſiderabit quis. Omnis triang tres anguli interni æquales ſunt duobus rectis. Idem iudicium hab to de reliquis axiomatis, atque Theorematis, nec non de poſtulat problematiſq́;.

CONSTAT quoque, Poſtulatorum alia propria eſſe Geom tria, qualia ſunt illa tria, quæ Euclides nobis propoſuit; quædam v rò communia & Geometriæ, & Arithmeticæ, cuiuſmodi eſt hoc, Qu titatem poſſe infinitè augeri. Tam enim numerus, quam magnit do, per additionem augeri poteſt, ita vt nunquam huius incremen finis reperiatur. Idem dices de axiomatis, ſiue pronunciatis. Na octauum, decimum, vndecimum, duodecimum, tertiumdecimum & quartumdecimum ſoli Geometriæ conueniunt; Reliqua verò omnia adhibentur & ad demonſtrationes Geometricas & ad Arit meticas. Quemadmodum enim magnitudines æquales ablatæ à m gnitudinibus æqualibus, relinquunt magnitudines æquales, ſiue h magnitudines lineæ ſint, ſiue ſuperficies, ſiue corpora; ita quoque nu meri æquales detracti e numeris æqualibus relinquunt numeros æ quales, &c.

HAEC dicta à nobis ſint de triplici hoc genere principiorum, nu ad demonſtrationes accedamus, ex quibus plenius perfectiusq́; princ piorum omnium natura percipietur. Sunt enim plurima princip Mathematicorum eiuſmodi, vt planè non intelligantur, niſi prius e rum vſus appareat in demonſtrationibus; id quod ſatis te experien tia docebit.

ANTEQVAM porrò ad propoſitiones Euclidis interpretanda veniamus, paucis explicandum eſt, quénam ordinem, ac modu in ipſis demonſtrationibus ſimus ſecuti. Primum cuilibet propoſitio duos numeros affiximus, quorum alter in margine depictus ſignif cat ordinem, quem Campanus ex traditione Arabum eſt ſecutus i Euclidis propoſitionibus, alter verò in ipſa propoſitionum ſerie deſcri ptus refert diſpoſitionem propoſitionum ex traditione Theonis, & quam adhuc obſeruari cernimus in codicibus Græcis. Id verò eo conſi lio à nobis eſt factum: quoniam cùm à quibuſdam Geometris propoſi tiones Euclidis iuxta ordinem Campani, ab alijs verò iuxta Theoni ſeriem citentur, maximeq́; interdum duo hi interpretes inter ſe diſcre pent, in ſerie, atque ordine propoſitionum, id quod maximè in 6. 7 & 10 lib. perſpicitur; neceſſarium eſſe duximus, vt vtriuſq́; interpre tis numerus apponeretur. Ita enim fiet, vt ſi quando numerus propo ſitionum à Geometra quopiam citatus non reſpondet alteri interpre ti, alteri ſaltem conueniat. Deinde ne curſus demonſtrationum in terrumperetur, citauimus principia, & propoſitiones Euclidis in mar gine

Digitized by Google

gin, ſcilicet cuilibet citationi ſemper literula aliqua alphabeti, vel alio quo ſigno, cui ſimilis literula, ſeu ſignum reſpondet in demonſtratione, vt faciliùs cognoſcatur, ad quem locum qualibet citatio ſit referenda. Porrò citationes intelligendæ ſunt hoc modo.

1. def.	*Prima definitio. & ſic de aliis numeris, vt 4. def. 23. def. &c.*
1. pet.	*Prima petitio, vel primum Poſtulatum.*
1. pron.	*Primum pronunciatum, ſeu axioma, & ita de reliquis numeris, vt prius.*
1. primi.	*Prima propoſitio primi libri.*
23. Vndec.	*Vigeſimatertia propoſitio vndecimi libri.*
6. tertiid.	*Sexta tertiidecimi libri.*
9. ſextid.	*Nona ſextidecimi libri.*
13. duod.	*Decimatertia libri duodecimi.*
7. quind.	*Septima libri quindecimi.*
5. quartid.	*Quinta libri quartidecimi, &c.*

Ex his aliæ citationes à quolibet facilè poterunt intelligi. Eadem enim in omnibus eſt ratio.

Digitized by Google

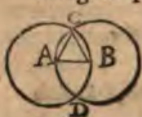
PROBLEMA I.

PROPOSITIO I.

SVPER data recta linea terminata triangulum
quilaterum conſtituere.

IN omni problemate duo potiſſimùm ſunt conſ
randa, conſtructio illius, quod proponitur, & dem
ſtratio, quâ oſtenditur, conſtructionem rectè eſſe
ſtitutam. Vt quoniam primum hoc problema i
conſtituere triangulum æquilaterum ſuper data recta linea
minata quacunque, ita vt linea recta propoſita ſit vnum l
trianguli. (Tunc enim figura dicitur conſtitui ſuper recta lin
quando ipſa linea efficitur vnum figuræ latus) idcirco prim
oportet conſtruere ex principiis conceſſis triangulum aliqu
deinde demonſtrare, ipſum eâ ratione conſtructum, eſſe æqu
terum, hoc eſt, habere omnia tria latera inter ſe æqualia. Q
idem in alijs problematibus perſpici poteſt. Hæc etiam duo re
riuntur ferè in omni Theoremate. Sæpenumerò enim vt dem
ſtretur id, quod proponitur, conſtruendum eſt, atque effici
dum prius aliquid, ceu manifeſtum erit in ſequentibus. Pa
veró admodum ſunt theoremata, quæ nullam requirant c
ſtructionem.

Sit igitur propoſita recta linea terminata A B, ſuper qu



conſtituere iubemur triangulum æquilater
Centro A, & interuallo rectæ A B, *a* deſcri
tur circulus C B D: Item centro B, & interu
a 3. pet. lo eiuſdem rectæ B A, alius circulus deſcriba
C A D, ſecans priorem in punctis C, & D.
quorum vtrouis, nempe ex C, *b* ducantur duæ rectæ lineæ C
b 1. pet. C B, ad puncta A, & B; Eritque ſuper rectam A B, conſtitut
triangulum A B C, hoc eſt, figura rectilinea contenta tribus
ctis lineis. Dico, hoc triangulum ita conſtructum neceſſariò e
æquilaterum. Quoniam rectæ A B, A C, ducuntur ex centro
ad circumferentiam circuli C B D, *c* erit recta A C, rectæ A
c 15. def. æqualis: Rurſus quia rectæ B C, B A, ducuntur ex centro B,
circumferentiam circuli C A D, erit recta B C, rectæ B A æqu
lis. Tam igitur A C, quàm B C, æqualis eſt rectæ A B. *d* Qu
d 1. pron & A C, B C, inter ſe æquales erunt, atque ideirco triangulu
A B C, erit æquilaterum. Super data ergo recta linea terminat
&c. Quod faciendum erat.

S C H O L I V M.

VT autem videas, plures demonſtrationes in vna propoſitio
cont

Digitized by Google

continui, placuit primam hanc propoſitionem reſoluere in prima ſua principia, initio facto ab vltimo ſyllogiſmo demonſtratiuo. Si quis igitur peruelit, triangulum A B C, conſtructum methodo prædicta, eſſe æquilaterum, vtetur hoc ſyllogiſmo demonſtrante.

Omne triangulum habens tria latera æqualia, a eſt æquilaterum. a23.def.

Triangulum A B C, tria habet æqualia latera.

Triangulum igitur A B C, eſt æquilaterum.

Minorem confirmabit hoc alio ſyllogiſmo.

Quæ eidem æqualia ſunt, b inter ſe quoque ſunt æqualia. b1.pron

Duo latera A C, B C, æqualia ſunt eidem lateri A B.

Igitur & duo latera A C, B C, inter ſe æqualia ſunt.

Ac propterea omnia tria latera A B, B C, A C, æqualia exiſtunt.

Minorem vero huius ſyllogiſmi hac ratione colliget.

Lineæ rectæ à centro ductæ ad circumferentiam circuli, c inter ſe ſunt æquales. c15.def.

Lineæ A B, A C, ſunt ductæ à centro A, ad circumferentiam C B D.

Sunt igitur lineæ A B, A C, æquales inter ſe.

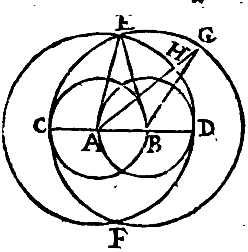
Eademq; ratione erunt lineæ A B, B C, æquales, cùm ducantur à centro B, ad circumferentiam C A D. Quamobrem minor præcedentis ſyllogiſmi tota confirmata erit.

Non aliter reſolui poterunt omnes aliæ propoſitiones non ſolùm Euclidis, verùm etiam cæterorum Mathematicorum.

Negligunt tamen Mathematici reſolutionem iſtam in ſuis demonſtrationibus, eò quòd breuiùs ac faciliùs ſine ea demonſtrent id, quod proponitur, vt perſpicuum eſſe poteſt ex ſuperiori demonſtratione.

SI quis autem ſuper data recta deſideret conſtituere triangulum quoque Iſoſceles, & ſcalenum, id cum Proclo in hunc modum efficiet. Sit recta linea A B, circa quam ex centris A, & B, deſcribantur duo circuli, vti prius. d Deinde producatur A B, in vtramque partem ad circumferentias vſque ad puncta C, & D. Atque centro A, interuallo vero A D, e deſcribatur circulus E D F. Item centro B, interuallo vero B C, circulus E C F, ſecans priorem in punctis E, & F. Ex quorum vtrolibet, nempe ex E, f ducantur ad puncta A, & B, duæ rectæ E A, E B. Factumq; erit ſuper recta A B, g triangulum A B E; quod dico eſſe Iſoſceles, nimirum duo latera A E, B E, eſſe & æqualia inter ſe, & maiora latere A B. Cùm enim rectæ A E, A D, ducantur è centro A, ad circumferentiam E D F, h erit A E,

d2.pet. e3.pet. f1pet. g20.def h15.def



æqualis recta A D. Item cùm recta B E, B C, ducantur è centro B,
a 15. def *circumferentiam E C F, a erit B E, æqualis recta B C. Sunt autem*
ctæ A D, B C, æquales inter ſe (Vtraque enim A C, & B D æqu
eſt recta A B; cum A B, A C, ex eodem centro A, ad circumferenti
ducantur; Item B A, B D, ex eodem centro B, ad circumferentiā qu
b 1. pron *egrediantur.* b *Quare A C, B D, æquales inter ſe erunt. Addito igi*
c 2 pron *communi recta A B,* c *erit tota A D, toti B C, æqualis.)* d *Igitur A*
d 1. pron *B E æquales quoq; inter ſe erunt. Quòd verò vtraq; A E, B E, ma*
ſit quàm A B, perſpicuum eſt, cum A D, æqualis oſtenſa ipſi A
e 9. pron e *maior ſit quàm A B; Item B C, æqualis demonſtrata ipſi B E,* f *m*
f 9 pron *ior quoq; ſit, quàm A B. Conſtitutum igitur eſt ſuper recta A B, Iſoſ*
les A B E, habens duo latera A E, B E, æqualia inter ſe, & maiora
tere A B, quod faciendum erat. Atq; hæc eſt demonſtratio Procli,
liorumq; interpretum Euclidis.

BREVIVS *tamen videtur mihi poſſe demonſtrari, triangulu*
g 15. def *A B E, eſſe Iſoſceles, hac ratione.* g *Quoniam A E, æqualis eſt re*
A D, & recta A D, eſt dupla rectæ A B, propterea quòd B A, B D,
h 15. def *quales inter ſe ſunt; erit & A E, dupla rectæ A B. Rurſus* h *quia B*
æqualis eſt rectæ B C, & B C, dupla eſt ipſius A B, propterea quòd A
i 15. def. i *A C, æquales ſunt inter ſe, erit & B E, dupla ipſius A B. Cum igi*
k 6. pro. *vtraq; A E, B E, dupla ſit eiuſdem A B, erunt* k *A E, B E, inter ſe*
quales, maioresq; propterea recta A B. Iſoſcales ergo eſt triangul
A B E.

l 1. petit. IAM *verò, ſi ex puncto A,* l *ducatur linea recta A G, ad ci*
cumferentiam E G F, quæ non ſit eadem quæ A E, vel A D, ſeca
m 1. pet. *circumferentiam E H D, in puncto H, & ex G, ad B* m *ducatur*
n 20. def *recta G B,* n *conſtitutum erit triangulum A B G, ſuper recta A*
o 9. pro. *quod dico eſſe ſcalenum. Quoniam* o *A G, maior eſt quàm A*
p 15. def p *Sunt autem A H, A E, ex centro A, ductæ, inter ſe æquales; erit*
A G, maior quàm A E, hoc eſt, quàm B E, quæ oſtenſa eſt æqua
q 15 def *ipſi A E; igitur & maior erit A G, quàm B G.* q *cùm B G, ſit æqu*
lis ipſi B E. Eſt autem & B G, maior quàm A B., propterea quòd t
r 9. pron *B C, æqualis ipſi B G,* r *maior eſt quàm A B, pars. Omnia ergo t*
latera trianguli A B G, inæqualia ſunt, ideoq; ſcalenum eſt ex de
nitione; quod erat faciendum.

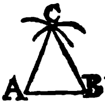
BREVIVS *quoque oſtendemus, triangulum A G B, eſſe ſca*
s 15. def *num, hac ratione. Quoniam tam* s *A H, A D, ex centro A, duc*
ſunt æquales, quàm B G, B C, ex centro B, ductæ: Sunt autem A
B C, ipſius A B, dupla, quod A B, vtriq; B D, A C, æqualis ſit; eru
quoq; A H, B G, ipſius A B, duplæ, ac propterea maiores, quàm A
t 9 pron *Cùm ergo* t *A G, maior ſit, quàm A H, ſiue quàm B G, ſcalenu*
erit triangulum A G B, habens latus A G, maximum, B G, me
dium, & A B, minimum.

PR

Digitized by Google

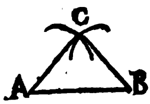
PRAXIS.

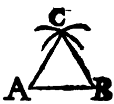
CONABIMVR in ſingulis ferè problematibus Euclidis tradere praxim quandam facilem, & breuem, qua effici poſſit id, quod Euclides pluribus verbis, atque lineis contendit conſtruere. Idq; in iis propoſitionibus obſeruabimus, quæ frequentiorem vſum habent apud Mathematicos, & in quibus praxis compendium aliquod ſecum videtur afferre.



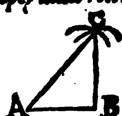
ITAQVE triangulum æquilaterum ita facilè conſtruetur ſuper data recta A B. Ex centris A, & B, interuallo vero data recta A B, deſcribantur duo arcus circulorum ſe interſecantes in puncto C, ſiue hoc infra lineam contingat, ſiue ſuprà. Poſt hæc ducantur duæ rectæ A C, B C, ex puncto C, ad puncta A. & B, factumq; erit, quod proponitur. Cuius rei eadem eſt demonſtratio cum ſuperiori, ſi modò circuli eſſent integri, ac perfecti. Tranſirent enim neceſſariò per puncta A, & B.

ISOSCELES ita conficietur. Ex centris A, & B, interuallo vero maiore quàm A B, ſi datam rectam eſſe velimus minus latus; vel minore, ſi eandem in latus maius eligamus, deſcribantur duo arcus ſecantes ſe in C. Poſtea ducantur rectæ A C, & B C, conſtructumq; erit Iſoſceles: quoniam A C, B C, æquales erunt, propter æquale interuallum aſſumptum, maius ſcilicet, aut minus quàm recta A B.





SCALENVM denique hoc modo fabricabitur ſuper data recta A B. Ex centro B, interuallo vero maiore, quam B A, deſcribatur arcus aliquis. Item ex centro A, interuallo vero adhuc maiore, quàm prius aſſumptum, deſcribatur alter arcus priorem ſecans in C. Deinde ducantur rectæ A C, B C; conſtitutumq; erit Scalenum, vt conſtat ex inæqualitate interuallorum, quæ aſſumpta fuerunt in conſtructione.



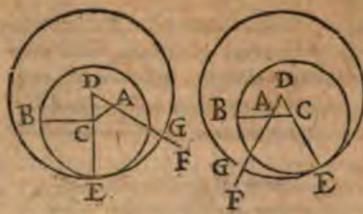
CAETERVM quo pacto triangulum conſtitui debeat habens tria latera æqualia tribus datis lineis quibuſcunque, ſingula ſingulis, latius explicabimus propoſ. 22. huius libri.

PROBL. 2. PROPOS. 2. iij.

AD datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.

SIT punctum datum A, & data recta linea B C, cui aliam rectam æqualem ponere oportet ad punctum A. Facto altero extremo lineæ B C, nempe C, centro *a* deſcribatur circulus B E, interuallo rectæ B C. Et ex A, ad centrum *a 3. petit.*

a 1. petit



C, *a* recta ducatur AC (niſi punctum A, intra rectam BC, fuerit: Tunc enim pro linea ducta ſumetur AC, vt ſecunda figura indicat.) Super rectaverò AC, *b* conſtruatur triangulum æquilaterum ACD, ſurſum, aut

b 1. primi.

deorſum verſus, vt libuerit; cuius duo latera modò conſtituta
c 2. pet. DA, DC, verſus rectam AC, *c* extendantur; DC, quidem oppoſitum puncto dato A, vſque ad circumferentiam in E; DA, vero oppoſitum centro C, quantumlibet in F. Deinde centro D,
d 3. pet. interuallo vero rectæ DE, per C, centrum tranſeuntis, *d* alter circulus deſcribatur EG, ſecans rectam DF, in G. Dico rectam AG, quæ poſita eſt ad punctum datum A, æqualem eſſe datæ rectæ BC. Quoniam DE, DG, ductæ ſunt ex centro D, ad circum-
e 15. def. ferentiam EG, *e* ipſæ inter ſe æquales erunt: Ablatis igitur DA,
f 3. pron. DC, æqualibus lateribus trianguli æquilateri ACD, *f* remane-
g 15. def. bit AG, æqualis rectæ CE. Sed eidem CE, *g* æqualis eſt recta BC. (cùm ambæ rectæ CB, CE, cadant ex centro C, ad circumferentiam BE.) Igitur rectæ AG, BC, quandoquidem vtra-
h 1. pron que æqualis eſt oſtenſa rectæ CE, inter ſe *h* æquales erunt. Ad datum igitur punctum, &c. quod erat faciendum.

QVOD ſi punctum datum fuerit in extremo datæ lineæ, quale eſt C, facilè abſoluetur problema. Si enim centro C, & in-
i 3. petit teruallo CB, *i* deſcribatur circulus, ad cuius circumferentiam
k 1. pet. recta *k* ducatur vtcunque CE, erit hæc poſita ad punctum datum
l 15. def. C, *l* æqualis datæ rectæ BC, cum vtraque & BC, & CE, ex eodem centro egrediatur ad circumferentiam BE.

SCHOLIVM.

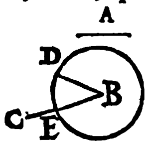
HVIVS problematis varij eſſe poſſunt caſus, vt ait Proclus. Aut enim datum punctum in ipſa data recta eſt poſitum, aut extra ipſam: Si in ipſa, erit vel alterum extremorum eius, vel inter vtrumque iacebit extremum. Si verò extra ipſam, erit vel è directo data linea, ita vt producta in rectum, & continuum per ipſum punctum tranſeat, vel non è directo, ita vt ab ipſo ad data linea extremorum quoduis recta linea ducta cum data recta angulum efficiat; quo modo vel ſupra datam lineam erit conſtitutum, vel infra, vt manifeſtum eſt. In omnibus autem iſtis caſibus ſemper eadem eſt conſtructio, & demonſtratio. Quod ſi in conſtructione fiat triangulum ACD, ſuper recta AC, Iſoſceles, eodem modo oſtendemus, rectam AG, recta BC, æqualem eſſe.

PROBL.

PROBL. 3. PROPOS. 3. iij.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, de maiore æqualem minori rectam lineam detrahere.

SINT duæ rectæ inæquales A, minor, & B C, maior, oporteatq; ex maiore B C, detrahere lineam æqualem minori A. Ad alterutrum extremorum lineæ maioris B C, nempe ad punctum B, *a* ponatur aliqua linea, quæ ſit B D, æqualis minori A. Deinde centro B, interuallo autem B D, circulus *b* deſcribatur ſecans B C, in E. Dico B E, abſcissam eſſe æqualem ipſi A. Quoniam B E, *c* æqualis eſt rectæ B D, & eidem B D, æqualis eſt recta A, per conſtructionem; *d* erunt A, & B E, inter ſe æquales. Duabus igitur datis rectis, &c. quod erat faciendum.



a 2. primi. b 3. *petit.* c 15. *defin.* d 1. *pronun.*

QVOD ſi duæ rectæ datæ coniungantur in vno extremo, quales ſunt B D, & B C, coniunctæ in extremo vtriuſque B; deſcribendus erit circulus ex B, ad interuallum minoris B D. Hic enim auferet B E, æqualem ipſi B D, vt conſtat ex definitione circuli.

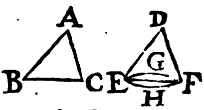
SCHOLIVM.

VARIOS etiam poſſe caſus eſſe in hoc problemate, nemo ignorat, cum duæ lineæ inæquales datæ vel inter ſe diſtent, ita vt neutra alteram contingat, vel non; ſed vel coniungantur ad vnum extremum, vel ſe mutuo ſecent, vel certè altera alteram ſuo extremo tangat duntaxat, &c. de qua re lege Proclum hoc in loco.

THEOREMA 1. PROPOS. 4. iiij.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, vtrumque vtrique; habeant verò & angulum angulo æqualem ſub æqualibus rectis lineis contentum: Et baſim baſi æqualem habebunt: eritq; triangulum triangulo æquale; ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, vterque vtrique, ſub quibus æqualia latera ſubtenduntur.

SINT duo triangula A B C, D E F, & vtrumque latus A B, A C, æquale ſit alterutri vtrique lateri D E, D F, hoc eſt, A B, ipſi D E, & A C, ipſi D F; angulusque A, contentus lateribus A B, A C, æqualis angulo D, contento lateribus D E, D F. Dico baſim B C, æqualem quoq; eſſe baſi E F;



Digitized by Google

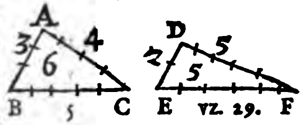
&triangulum A B C, triangulo D E F; & vtrumque angulum
& C, vtrique angulo E, & F, id eſt, angulos B, & E, qui opponu
tur lateribus æqualibus A C, D F, inter ſe; & angulos C, & F, q
opponuntur æqualibus lateribus A B, D E, inter ſe quoque e
æquales. Quoniam enim recta A B, rectæ D E, ponitur æqual
ſit, vt ſi altera alteri ſuperponi intelligatur, collocato puncto
a 8. pronun. in puncto D, *a* ipſæ ſibi mutuo congruant, punctumq; B, in pu
ctum E, cadat. Neq; enim dicere quis poterit, partem rectæ A
rectæ D E, congruere, & partem non, quia tunc duæ rectæ hab
b 10. pronun. rent idem ſegmentum commune, *b* quod eſt impoſſibile. Qu
ſi quis dicat, poſito puncto A, in D, cadere quidem punctum
in E, ſed rectam A B, cadere vel ad dextram, vel ad ſiniſtram D
c 14. pronun. claudent duæ rectæ lineæ ſuperficiem. *c* quod fieri non pote
Quare recta A B, rectæ D E, congruet, vt dictum eſt. Cum erg
d 8. pronun. angulus A, angulo D, ponatur æqualis, *d* congruet quoque alt
alteri, hoc eſt, recta A C, rectæ D F, congruet, punctumque C,
punctum F, cadet, ob æqualitatem rectarum A C, D F. Baſis igitu
B C, baſi E F, congruet quoque: alias ſi ſupra caderet, aut infr
vt efficeretur recta E G F, vel E H F, clauderent duæ rectæ E
E G F; vel E F, E H F, ſuperficiem, (negare enim nemo poterit
tam E G F, quàm E H F, rectam eſſe, cum vtraque ponatur eſ
e 14. pronun. eadem, quæ recta B C.) quod eſt abſurdum. Duæ enim rectæ ſu
perficiem *e* claudere non poſſunt. Quocirca *f* baſis B C, ba
f 8. pronun. E F, æqualis erit, cum neutra alteram excedat; & triangulum
A B C, triangulo D E F; & angulus B, angulo E; & angulus C
angulo F, æqualis, ob eandem cauſam, exiſtet. Quare ſi duo trian
gula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, &c. Quod de
monſtrandum erat.

SCHOLIVM.

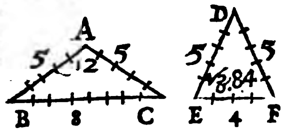
RECTE Euclides duas conditiones poſuit in antecedente huius theorematis, quarum prima eſt, vt duo latera vnius trianguli æqualia ſint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumque vtrique; Secunda, vt angulus etiam vnius contentus illis lateribus æqualis ſit angulo alterius contento lateribus, quæ iſtis ſunt æqualia. Deficiente enim alterutra harum conditionum, neque baſes, neque reliqui anguli poterunt vnquam eſſe æquales, vt probe hoc loco a Proclo demonſtratur: Triangula verò ipſa licet poſſint eſſe æqualia, poſteriore duntaxat conditione deficiente, vt ex ſcholio propoſ. 37. huius lib. conſtabit, tamen rarò admodum illud continget. Sint enim triangulorum A B C, D E F, anguli A, & D, æquales, nempe recti, & latera A B, A C, æqualia lateribus D E, D F, non quidem vtrumque vtrique, ſed illa ſimul ſumpta hiſce ſimul ſumptis, ſitque A B, 3. A C, 4. vt ambo ſimul efficiant 7. At verò D E, ſit 2. & D F, 5. vt ambo quoque

ſimul

ſimul 7. conſtituant. Quibus poſitis, erit baſis B C, 5, & baſis E F, radix quadrata huius numeri 29. quæ maior quidem eſt quam 5. minor autem, quam 6. Item area trianguli A B C, erit 6. area verò trianguli D E F, 5. Anguli denique ſuper baſim B C, inæquales erunt angulis ſuper baſim E F. Quæ quidem omnia ita eſſe, hic oſtenderemus, niſi ad eorum demonſtrationem requirerentur multa, quæ nondum ſunt confirmata. Vides igitur omnia inæqualia eſſe, propterea quod non vtrumq; latus vtriq; lateri æquale exiſtit in dictis triangulis A B C, D E F.

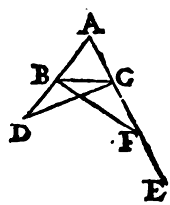


RVRSVS triangulorum A B C, D E F, latera A B, A C, æqualia ſint lateribus D E, D F, vtrumque vtrique, ſitq; vnumquodque 5. anguli verò A, & D, contenti dictis lateribus inæquales, ſitq; A, maior quam D. Quibus conceſſis, erit baſis B C, maior baſe E F, vt propoſ. 24. huius libri oſtendetur. Quod ſi baſim B C. ponamus eſſe 8. baſim autem E F, 4. erit area trianguli A B C, 12. area verò trianguli D E F, radix quadrata huius numeri 84. quæ maior quidem eſt quam 9. minor verò, quam 10. id quod notiſſimum eſt Geometris. Vt igitur duorum triangulorum & baſes, & anguli, nec non triangula ipſa æqualia inter ſe ſint, neceſſe eſt, vt vtrumque latus vnius æquale ſit vtrique lateri alterius, & anguli quoque dictis lateribus contenti æquales exiſtant, vt optimè dixit Euclides.



THEOR. 2. PROPOS. 5.

ISOSCELIVM triangulorum, qui ad baſim ſunt, anguli inter ſe ſunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui ſub baſi ſunt, anguli inter ſe æquales erũt.



SIT triangulum Iſoſceles A B C, in quo latera A B, A C, inter ſe ſint æqualia. Dico angulos A B C, A C B, ſupra baſim B C, æquales inter ſe eſſe: Item ſi latera æqualia A B, A C, producantur quantum libuerit, vſque ad puncta D, & E, angulos quoque D B C, E C B, infra baſim eandem B C, eſſe æquales. Ex linea enim A E, producta infinitè *a* abſcindatur A F, æ- a 3. *primi.*
qualis ipſi A D, *b* & ducantur rectæ B F, C D. Conſiderentur deinde duo triangula A B F, A C D. Quia ergo duo latera A B, A F, b 1. *poſt.*
trianguli A B F, æqualia ſunt duobus lateribus A C, A D, trianguli A C D, vtrumque vtrique, nempe A B, ipſi A C, ex hypotheſi, &

Digitized by Google

theſi, & A F, ipſi A D, ex conſtructione; angulusque A, contentus lateribus A B, A F, æqualis eſt angulo A, contento lateribus A C, A D, imò angulus A, communis eſt vtrique triangulo: *a* Erit baſis B F, æqualis baſi C D; & angulus F, angulo D; & angulus A B F, angulo A C D; cùm & priores duo, & poſteriores opponantur æqualibus lateribus in dictis triangulis, vt patet. Rurſus conſiderentur duo triangula B D C, C F B. Quoniam verò rectæ A D, A F, æquales ſunt, per conſtructionem, fit vt, ſi auferantur ex ipſis æquales A B, A C, *b* & reliquæ B D, & C F, ſint æquales. Quare duo latera B D, D C, trianguli B D C, æqualia ſunt duobus lateribus C F, F B, trianguli C F B, vtrumq; vtrique, videlicet B D, ipſi C F, & D C, ipſi F B. vt probatum eſt. Sunt autem & anguli D, & F, contenti dictis lateribus æqualibus æquales, vt oſtenſum etiam fuit. Igitur erit angulus *c* D B C, angulo F C B, æqualis; & angulus B C D, angulo C B F. Tam enim priores duo, quàm poſteriores, æqualibus opponuntur lateribus, exiſtuntq; ſupra communem baſim B C, vtriuſque trianguli B D C, C F B. Quod ſi ex totis angulis æqualibus A B F, A C D, (quos æquales eſſe iam demonſtrauimus in prioribus triangulis) detrahantur anguli æquales C B F, B C D, (quos itidem in poſterioribus triangulis modo probauimus eſſe æquales) *d* remanebunt anguli A B C, A C B, ſupra baſim B C, æquales. Oſtenſum eſt autem in poſterioribus triangulis, & angulos D B C, F C B, qui quidem ſunt infra eandem baſim B C, eſſe æquales. Igitur & anguli ſupra baſim inter ſe, & anguli infra eandem inter ſe ſunt æquales; Ac propterea Iſoſcelium triangulorum, qui ad baſim ſunt anguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 4. *primi.*

b 3. *pronun.*

c 4. *primi.*

d 3. *pronun.*

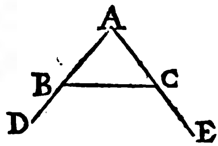
SCHOLIVM.

HÆC propoſitio vera etiam eſt in triangulis æquilateris, cum in quolibet reperiantur duo latera inter ſe æqualia, licet eam Euclides ſolis Iſoſcelibus triangulis videatur accommodaſſe. Exiſtentibus enim duobus lateribus A B, A C, trianguli A B C, æqualibus; ſiue reliquum latus B C, ipſis quoq; ſit æquale, vt contingit in triangulo æquilatero, ſiue inæquale, vt in Iſoſcele accidit, neceſſario conſequetur, & angulos ſupra baſim inter ſe, & angulos infra eandem inter ſe quoque eſſe æquales, vt conſtat ex demonſtratione prædicta. Solet autem theorema hoc tyronibus ſubdifficile, & obſcuriuſculum videri, propter multitudinem linearum, & angulorum, quibus nondum ſunt aſſueti. Verùm tamen, ſi diligenter theorematis præcedentis vis ac demonſtratio ponderetur, non multo labore hoc, quod præ manibus habemus, à quolibet percipietur, ſi modo memor ſit, illos angulos triangulorum probari æquales eſſe in antecedenti theoremate, qui æqualibus lateribus opponuntur. Quod quidem, quoniam Campanus non appoſuit,

Digitized by Google

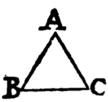
fuit, cuſe fuit, vt confuſa eſſe videatur, & ſubobſcura eius demonſtratio.

VERITAS porro huius theorematis, quoad vtramque partem, facile quoque demonſtrari poteſt per ſuperpoſitionem, vt demonſtrata fuit propoſitio. 4. Sint enim rurſum in triangulo ABC, duo latera æqualia AB, AC, quæ producantur quantumlibet vſque ad D, & E. Dico tam angulos ABC, ACB, ſupra baſim BC, inter ſe æquales eſſe, quàm angulos DBC, ECB, infra eandem baſim. Si enim concipiamus mente triangulum ABC, triangulo ACB, (ita vt idem triangulum ſit inſtar duorum) ſuperponi, ita vt recta AB, rectæ AC, ſuperponatur, cadet punctum B, in C, ob æqualitatem laterum AB, AC. Quo poſito, cadet recta AC, ſuper rectam AB, ob æqualitatem, ſiue identitatem anguli A; atque punctum C, in punctum B, incidet, propter æqualitatem laterum AC, AB. Quapropter angulus ABC, angulo ACB, & angulus DBC, angulo ECB, a congruet, ac proinde tam illi, quàm hi, inter ſe æquales erunt. a 8. pronun.



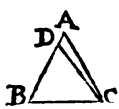
COROLLARIVM.

Ex hac propoſitione quinta liquet, omne triangulum æquilaterum eſſe æquiangulum quoque: Hoc eſt, tres angulos cuiuſlibet trianguli æquilateri eſſe inter ſe æquales. Sit enim triangulum æquilaterum ABC. Quoniam igitur duo latera AB, AC, ſunt æqualia, *b* erunt duo anguli B, & C æquales. Item quia duo latera AB, BC, ſunt æqualia, erunt & anguli C, & A, æquales. Quare omnes tres A, B, & C, æquales erunt. Quod oſtendendum erat. b 5. primi.



THEOR. 3. PROPOS. 6.

SI trianguli duo anguli æquales inter ſe fuerint: & ſub æqualibus angulis ſubtenſa latera æqualia inter ſe erunt.



IN triangulo ABC, ſint duo anguli ABC, ACB, ſuper latus BC, æquales. Dico duo latera illis oppoſita AB, AC, eſſe quoque æqualia. Si enim non credantur æqualia, exiſtentibus nihilominus angulis dictis æqualibus, erit alterum maius altero; ſit igitur AB, maius quàm AC, ſi fieri poteſt: Et ex AB, *c* abſcindatur in D, recta BD, æqualis rectæ AC, quæ minor dicitur eſſe quàm AB, ducaturque recta CD. Conſiderentur iam duo triangula ACB, DBC. In quibus cum duo latera AC, CB, trianguli ACB, æqualia ſint duobus lateribus DB, BC, trianguli DBC, vtrumque vtrique, nempe AC, ipſi DB, (abſcidimus enim ex c 3. primi.

AB, ipſi

AB, ipſi AC, conceſſu aduerſarij, æqualem DB,) & CB, i BC, cum ſit vnum & idem; Sint autem & anguli ACB, DB

a 4. primi. contenti dictis lateribus æquales, per hypotheſin: a Erunt tria gula ACB, DBC, æqualia, totum, & pars; quod fieri non pote Non igitur erunt latera AB, AC, inæqualia, ſi anguli B, & C, ſ per latus BC, æquales ſunt, ne totum parti æquale eſſe conced mus: ſed æqualia exiſtent. Quare ſi trianguli duo anguli, & Quod demonſtrandum erat.

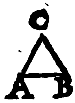
SCHOLIVM.

CONVERTIT hoc theorema primam partem præcedenti. Nam ibi demonſtratum eſt, ſi duo latera trianguli inter ſe æquali fuerint, angulos, qui ad baſim ſunt, eſſe quoque æquales: Hic verò, anguli ad baſim ſint æquales, latera quoque angulis illis oppoſita eſ æqualia. Non autem mirum alicui debet videri, ſi Mathematici interdum conuertunt propoſitiones, ita vt nunc ex antecedente quopiam conceſſo colligant per demonſtrationem conſequens aliquod, nunc verò rurſus ex conſequente hoc conceſſo inferant per aliam demonſtrationem antecedens illud, vt ab Euclide in hiſce duabus proximis propoſitionibus factum eſſe conſpicimus: Non debet, inquam, videri mirum, quoniam non ſemper in rebus Mathematicis reciprocantur antecedens & conſequens. Nam in propoſitionibus neceſſariis, quales ſunt propoſitiones Geometricæ, poteſt interdum prædicatum eſſe vniuerſalius ſubiecto, vt cum Dialecticis loquamur. Quare tunc non poterit conuerti propoſitio. Nam neceſſaria eſt hæc propoſitio; (Omnis homo eſt animal) non tamen conuerti poteſt vniuerſaliter, cum non omne animal ſit homo. Ita quoque fieri poteſt in propoſitionibus Geometricis neceſſariis: Cuius ego rei vnum duntaxat nunc exemplum tale in medium proferam. Demonſtrat Euclides propoſ. 16. huius lib. Si trianguli cuiuſuis vnum latus producatur, angulum externum maiorem eſſe duobus internis ſibi oppoſitis; In qua quidem propoſitione nullo modo antecedens, & conſequens reciprocantur. Non enim ſequitur, ſi figura cuiuſuis rectilinea vno latere producto, angulus externus maior ſit ſingulis internis oppoſitis, figuram illam eſſe triangulum, cum poſſit etiam eſſe quadrilatera figura, vt ad propoſ. 16. huius lib. oſtendemus. Eodemque modo multa alia propoſitiones conuerti nequeunt. Quam ob rem neceſſe eſt, vt prius demonſtret Geometra, propoſitionem aliquam conuerti, hoc eſt, antecedens, & conſequens illius reciprocari, antequam ex conſequente conceſſo colligat antecedens. Non conuertit autem Euclides omnes propoſitiones, quæ conuerti poſſunt, ſed eas duntaxat, quarum conuerſione maximè indiget: Nos tamen dabimus operam, vt fere omnes illas conuertamus, quæ aliquam videbuntur afferre vtilitatem.

COROL-

Digitized by Google

COROLLARIVM.

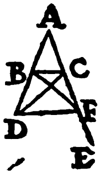


SEQVITVR ex hac propoſitione, omne triangulum æquiangulum, id eſt, cuius omnes anguli ſunt æquales, eſſe æquilaterum. Quod quidem conuerſum eſt corollarij quintæ propoſitionis, vt liquet. Sint enim trianguli A B C, tres anguli æquales. Dico ipſum eſſe æquilaterum. Cum enim anguli B, & C, ſint æquales, a erunt latera A B, A C, æqualia. Rurſus cum duo anguli A, & B, ſint æquales, erunt quoque latera A C, B C, æqualia, & idcirco omnia tria latera A B, B C, A C, æqualia. Quod oſtendendum erat. a 6. primi.

EX PROCLO.

LICEBIT nobis etiam conuertere ſecundam partem quintæ propoſitionis, hoc modo.

SI trianguli cuiuslibet productis duobus lateribus, anguli infra baſim fiant æquales, & duo latera illa æqualia inter ſe erunt.



Trianguli enim A B C, productis lateribus A B, A C, ad D, & E, fiant anguli D B C, E C B, infra baſim B C, æquales. Dico latera A B, A C, eſſe quoque inter ſe æqualia. Ex C E, quantumlibet producta b *abſcindatur C F, æqualis ipſi B D, & ducantur rectæ B F, F D, D C. Conſiderentur deinde triangula D B C, F C B. In quibus cum latera D B, B C, æqualia ſint lateribus F C, C B, vtrumque vtrique, nempe D B, ipſi F C, per conſtructionem, & B C, ipſi C B, quod ſit vnum & idem: ſint autem & anguli D B C, F C B, dictis lateribus contenti æquales, per hypotheſin:* c *erunt & baſes C D, B F, & anguli B C D, C B F, ſuper has baſes, cum opponantur æqualibus lateribus B D, C F, æquales. Ablatis igitur hiſce angulis æqualibus B C D, C B F, ex angulis F C B, D B C, per hypotheſin, æqualibus;* d *remanebunt anguli F C D, D B F, æquales. Conſiderentur rurſus triangula D B F, F C D. In quibus quoniam latera D B, B F, æqualia ſunt lateribus F C, C D, vtrumque vtrique, nempe D B, ipſi F C, per conſtructionem, & B F, ipſi C D, vt modo oſtenſum eſt; Sunt autem & anguli contenti dictis lateribus D B F, F C D, æquales, vt etiam fuit nuper demonſtratum:* e *Erit angulus B D F, ſuper baſim D F, trianguli D B F, æqualis angulo C F D, ſuper eandem baſim F D, trianguli F C D. Hi enim æqualibus lateribus opponuntur. Cum igitur in triangulo A D F, duo anguli A D F, A F D, ſint æquales, vt nunc oſtendimus,* f *erunt latera A D, A F, æqualia. A quibus ſi rectæ B D, C F, per conſtructionem, æquales demantur,* g *remanebunt A B, A C, latera trianguli A B C, æqualia. Quod erat oſtendendum.*

b 3. primi.
c 4. primi.
d 3. pronun.
e 4. primi.
f 6 primi.
g 3. pronun.

THEOR.

Digitized by Google

THEOR. 4. PROPOS. 7.

SVPER eadem recta linea, duabus eiſdem rectis neis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, n conſtituentur, ad aliud atq; aliud punctum, ad eaſde partes, eoſdemque terminos cum duabus initio du rectis lineis habentes.

SVPER recta A B, conſtituantur ad punctum quoduis C duæ rectæ lineæ A C, B C. Dico ſuper eandem rectam A B, verſ partem eandem C, non poſſe ad aliud punctum, vt ad D, conſ tui duas alias rectas lineas, quæ ſint æquales lineis A C, B C, vtr que vtrique, nempe A C, ipſi A D, quæ eundem habent terminu A; & B C, ipſi B D, quæ eundem etiam terminum poſſident B Sint enim, ſi fieri poteſt, rectæ A C, A D, inter ſe, & rectæ B C B D, inter ſe etiam æquales. Aut igitur punctum D, erit in alteru tra rectarum A C, B C, ita vt recta A D, in ipſam rectam A C v B D, in ipſam B C, cadat; aut intra triangulum A B C; aut extr Sit primo punctum D, in altera rectarum A C, B C, nempe in A C vt A D, ſit pars ipſius A C. Quoniam igitur rectæ A C, A D, eun



dem terminum A, habentes dicuntur æquales, er pars A D, toti A C, æqualis. Quod fieri non poteſt. Sit deinde punctum D, intra triangulum A B C, & ducta recta C D, producantur rectæ B C, B D, vſque ad E, & F. Quoniam igitur in triangulo A C D, ponuntur latera

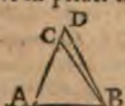
a 5. primi. A C, A D, æqualia, *a* erunt anguli A C D, A D C, ſuper baſim C D, æquales; *b* Eſt autem angulus A C D, minor angulo D C E; nem-

b 9. pronun. pe pars toto: Igitur & angulus A D C, minor erit eodem angulo



D C E. Quare angulus C D F, pars ipſius A D C, multo minor erit eodem angulo D C E. Rurſus, quia in trian-

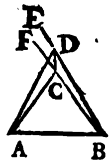
c 5. primi. gulo B C D, latera B C, B D, ponuntur æqualia, *c* erunt anguli C D F, D C E, ſub baſi C D, æquales. Oſtenſum autem fuit, quod idem angulus C D F, multo ſit minor angulo D C E. Idem ergo angulus C D F, & minor eſt angulo D C E, & eidem æqualis, quod eſt abſurdum. Sit poſtremo punctum D, extra triangulum A B C. Aut igitur in tali erit loco, vt vna linea ſuper alteram cadat, vt in priori figura, dummodo loco D, intelligas C, & loco C,



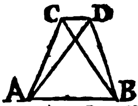
ipſum D; ex quo rurſus colligetur pars æqualis toti, quod eſt abſurdum. Aut in tali erit loco, vt poſteriores duæ lineæ ambiant priores duas, ceu in poſteriori figura, ſi modo loco D, iterum intelligas C, & D, loco C. Quo poſito, in idem abſurdum incidemus, nempe angulum D C F, & minorem eſſe angulo C D E, & eidem æqua-

Digitized by Google

æqualem vt perſpicuum eſt. Aut denique punctum D, incidat extra triangulum A B C, vt altera linearum poſteriorum, nempe A D, ſecet alteram priorum, ipſam B C. Ducta igitur recta C D, cum in triangulo A C D, latera A C, A D, ponantur æqualia, erunt anguli A C D, A D C, ſupra baſim C D, æquales: Ac proinde *b* cum angulus A D C, minor ſit angulo B D C, pars toto, erit & angulus A C D, minor eodem angulo B D C. Quare multo minor erit angulus B C D, pars anguli A C D, angulo eodem B D C. Rurſus, cum in triangulo B D C, latera B C, B D, ponantur æqualia, erunt anguli B C D, B D C, ſuper baſim C D, æquales: Eſt autẽ iam oſtenſum, angulum BCD, multo eſſe minorem angulo B D C. Idem igitur angulus B C D, & minor eſt angulo B C D, & eidem æqualis, quod eſt abſurdum. Non ergo æquales ſunt inter ſe A C, A D, & inter ſe quoque B C, B D. Quare ſuper eadem recta linea, duabus eiſdem rectis lineis, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 5. primi.
b 9. pronun.

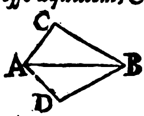


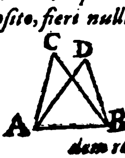
c 5. primi.

SCHOLIVM.

FIERI poteſt, vt duæ lineæ A D, B D, æquales ſint duabus A C, B C, vtraque vtrique, vt A D, ipſi B C, & B D, ipſi A C. vt vltima figura indicat. Verum hoc modo non egrediuntur ab eodem puncto lineæ illæ, quæ ſunt æquales inter ſe, vt conſtat. Solæ enim A C, A D, eundem limitem poſſident A; Item B C, B D, eundem B; optimeq; demonſtratum fuit ab Euclide, fieri non poſſe, vt A C, A D, inter ſe ſint æquales, ita vt B C, B D, quoque inter ſe æquales exiſtant. Rectè igitur in propoſitione appoſita ſunt hæc verba: eoſdemq; terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes. Rurſus poſſunt eſſe duæ lineæ ſimul ſumptæ A D, B D, æquales duabus lineis A C, B C, ſimul ſumptis, vt in eadem figura perſpici poteſt: Sed hoc nõ oſtendit Euclides fieri non poſſe. Dixit enim non poſſe vtramq; vtriq; eſſe æqualem, &c.

Eadem ratione poſſunt ex A, & B, infra A B, baſim trianguli A B C, hoc eſt, ad contrarias partes, duci duæ lineæ rectæ A D, B D, conuenientes ad aliquod punctum, ita vt A D, exiens è puncto A, æqualis ſit ipſi A C; & B D, egrediens ex B, æqualis ipſi B C, vt perſpicuum eſt in appoſita figura. Non igitur ſine cauſa adiecit Euclides: ad eaſdem partes. Deniq; eſſe poterunt duæ lineæ A C, A D, æquales inter ſe eundem terminum A, poſſidentes; Sed hoc poſito, fieri nulla ratione poterit, vt reliquæ duæ B C, B D, terminum habentes eundem B, inter ſe quoque ſint æquales, vt in hac figura apparet, & ab Euclide eſt demonſtratum. Appoſite igitur dictum eſt in propoſitione: duabus eiſ-





D

dem re-

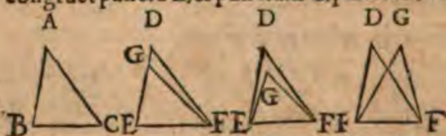
dem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, Quare vt planè ſcopus Euclidi in hac propoſitione propoſitus intelli tur, diligenter ſingula verba propoſitionis ſunt ponderanda.

viij. THEOR. 5. PROPOS. 8.

SI duo triangula duo latera habuerint duobus la tribus; vtrumque vtrique æqualia, habuerint verò & i ſim baſi æqualem: Angulum quoque ſub æqualibus ctis lineis contentum angulo æqualem habebunt.

SINT duo latera A B, A C, trianguli A B C, duobus lateri DE, DF, trianguli DEF, æqualia, vtrumque vtrique, nem AB, ipſi DE, & AC, ipſi DF; ſit autem & baſis B C, baſi E F, æq lis. Dico angulum A, æqualem eſſe angulo D, quorum videli vterq; dictis lateribus continetur. Nam ſi mente intelligatur ba

a 8. pronun. B C, ſuperponi baſi E F, *a* neutra excedet alteram, ſed punctum congruet puncto E, & punctum C, puncto F, cum hæ baſes pona tur æquales int ſe. Deinde ſi tria gulũ A B C, co tetur cadere ſup triangulum D E



cadet punctum A, aut in ipſum punctum D, aut aliò. Si punctu A, in ipſum punctum D, cadat, congruent ſibi mutuo triangul

b 8. pronun. rum latera, cum ponantur æqualia; Ac propterea *b* angulus æqualis erit angulo D, cum neuter alterum excedat. Quod punctum A, aliò dicatur cadere, vt ad G, quomodocunq; id co tingat, hoc eſt, ſiue in latus E D, ſiue intra triangulum E D F, ſi extra, vt in figuris apparet; erit perpetuo E G, (quæ eadem e quæ B A,) æqualis ipſi E D; & F G, (quæ eadem eſt, quæ C æqualis ipſi F D, propterea quod latera vnius trianguli æqual ponuntur lateribus alterius. Hoc autem fieri non poſſe, iamd

c 7. primi. dum *c* demonſtratum eſt, cum tam rectæ E G, E D, terminu eundem E, quam rectæ F G, F D, eundem limitem F, poſſidean Non igitur punctum A, cadet aliò quam in punctum D: ac pro pterea angulus A, angulo D, æqualis erit. Quare ſi duo triang la duo latera habuerint duobus lateribus, &c. Quod erat demon ſtrandum.

SCHOLIVM.

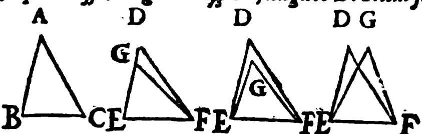
VT vides, hæc propoſitio conuertit primam partem propoſition quarta. Sicut enim ibi ex æqualitate angulorum, qui lateribus æqua libus continentur, collecta fuit baſium æqualitas; ita hic ex æquali tate baſium concludit Euclides æqualitatem angulorum, qui lateri bus æqua

Digitized by Google

bus quibus comprehenduntur. Poſſumus eodem modo ex prima, & tota parte concluſionis quartæ propoſitionis inferre totum antecedens aliud, ita vt theorema proponatur in hanc formam.

SI duo triangula baſes habuerint æquales, & angulos ſuper baſes conſtitutos æquales, vtrumque vtrique: Habebunt quoque reliqua latera æqualia, vtrumque vtrique, quæ videlicet æqualibus angulis ſubtenduntur, anguloſque reliquos hiſce lateribus incluſos æquales.

SIT enim baſis B C, æqualis baſi E F, & angulus B, angulo E, æqualisque C, angulo D F E. Dico latus quoque A B, lateri D E, & latus A C, lateri D F, æquale eſſe, angulumque A, angulo D. Nam ſi baſis baſi ſuperponatur, a congruent ſibi mutuo extrema earum, nec non & lineæ angulorũ æqualium. Quare omnia ſibi congruent, proptereaque omnia inter ſeſe æqualia erunt. Verum hoc idem theorema à nobis propoſitum, quod quidem magis propriè conuertere videtur quartam propoſitionem, quam illud Euclidis, aliter demonſtrabit Euclides in prima parte propoſitionis 26. vt eo loco monebimus.



a 8. pronun.

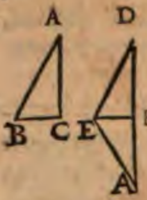
COROLLARIVM.

PORRO ex antecedente huius octauæ propoſitionis non ſolum colligi poteſt, angulos lateribus æqualibus contentos æquales eſſe, verum etiam reliquos angulos, qui ad baſes conſtituuntur, vtrumque vtrique, vt angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F; imo totum triangulum toti triangulo, vt conſtat ex eadem ſuperpoſitione vnius trianguli ſuper alterum. Nam ſibi mutuo congruent & dicti anguli, & tota triangula, vt perſpicuum eſt. Quod etiam ex quarta propoſ. colligi poterit, poſtquam demonſtratum fuerit, angulos æqualibus comprehenſos lateribus æquales eſſe. Inde enim fiet, cum latera quoque ſint æqualia, & reliquos angulos, & tota triangula eſſe æqualia, vt in propoſ. 4. demonſtratum eſt.

EX PROCLO.

PHILONIS familiares hoc idem theorema octauum oſtendunt demonſtratione affirmatiua, hac ratione. Poſito enim eodem antecedente, ſuperponi intelligatur baſis B C, baſi E F, ita vt triangulum A B C, cadat in diuerſas partes, & non ſuper triangulum D E F, quale eſt triangulum A E F. Aut igitur duo latera, nempe D F, F A, conſtituunt vnam lineam rectã, quod quidem continget, ſi duo anguli C, & F, recti extiterint; aut non. Si conſtituant vnã lineam rectã, veluti D A, ſic propoſitũ concludetur. Quoniã in triangulo A E D, duo latera AE, DE, ponuntur æqualia (eſt enim nunc A E, recta eadem, quæ A B,

Digitized by Google

a 5. primi. 

quæ per hypotheſin recta D E, æqualis eſt) a er
anguli A, & D, ſuper baſin A D, æquales, quod
oſtendendum. Si verò neque D E, F A, neque
E A, lineam rectam conficiant, ducatur ex D,
linea recta D A, quæ vel cadet intra triangula
extra. Cadat primum intra, quod quidem acc
quando anguli ad E, & F, ſunt acuti. Quon
igitur in triangulo A E D, duo latera A E,
b 5. primi. *æqualia ponuntur,* b *erunt duo anguli E A D, E D A, æquales a*



ſin D A. Eadem ratione, cum duo latera A F,
æqualia ſint per hypotheſin, erunt duo anguli F
F D A, ſuper baſin D A, æquales. Si igitur hi
c 2. pronun. *les illis æqualibus addantur,* c *fient toti a*
E A F, E D F, æquales. Quod erat oſtenden
Cadat deinde recta D A, extra triangula, quod
mum fiet, quando anguli ad F, fuerint obtuſi. Quoniam igitu
d 5. primi. *triangulo A E D, duo latera A E, D E, ponuntur æqualia,* d *er*



anguli E A D, E D A, æquales ſuper baſin D A.
dem ratione, cum duo latera A F, D F, in trian
A F D, ſint per hypotheſin æqualia, erunt an
F A D, F D A, ſuper baſin D A, æquales. Hu
e 3. pronun. *prioribus ablatis,* e *remanebunt anguli E A F, E*
æquales; Quod demonſtrandum proponebatur.

ix. PROBL. 4. PROPOS. 9.

DATVM angulum rectilineum bifariam ſecare.

SIT diuidendus rectilineus angulus B A C, bifariam, hoc
in duos angulos æquales. In recta A B, ſumatur quodcunq; p



f 3. primi. ctum D, & rectæ A D, *f* ſecetur ex A C, recta
æqualis, ducaturque recta D E. Deinde ſuper D
g 1. primi. *g* conſtituatur triangulum æquilaterum D F E
ducatur recta A F, diuidens angulum B A C, in
gulos B A F, C A F. Dico hos angulos inter ſe
æquales. Cum enim latera D A, A F, trianguli D
æqualia ſint lateribus E A, A F, trianguli E
vtrumque vtrique, quod D A, ipſi E A, per conſ
ctionem, ſit æquale, & A F, commune; Sit autem & baſis D
baſi E F, æqualis, propterea quod triangulum D F E, conſt
h 8. primi. ctum eſt æquilaterum: *h* Erit angulus D A E, angulo E A F,
qualis, ideoque angulus B A C, diuiſus bifariam; quod erat
ciendum.

SCHOLIVM.

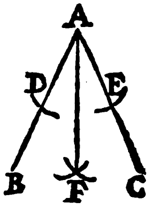
QVOD ſi loco trianguli æquilateri conſtruamus triangulum
ſec

Digitized by Google

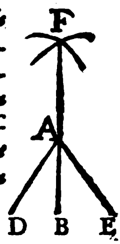
ſcalen. ſimiliter idem demonſtrabimus. Id quod etiam in proximis tribus propoſitionibus, quæ ſequuntur, fieri poteſt.

PRAXIS.

DICTO citius angulus quilibet rectilineus, vt B A C, bifariam ſecabitur hoc modo. Ex centro A, circino aliquo abſcindantur rectæ æquales A D, A E, cuiuſcunque magnitudinis. Et circino non variato (poſſes tamen etiam variare, ſi velles) ex centris D, & E, deſcribantur duo arcus ſecantes ſeſe in F. Recta igitur ducta A F, ſecabit angulum B A C, bifariam. Si conducerentur rectæ D F, E F, eſſent hæ æquales, nempe ſemidiametri circulorum æqualium. Vnde vt prius demonſtrabitur, angulum D A F, æqualem eſſe angulo E A F. Non deſcripſimus autem dictas lineas, vt nuda praxis haberetur. Id quod in aliis quoque praxibus, quoad eius fieri poterit, obſeruabimus, ne linearum multitudo tenebras nobis offundat, pariatque confuſionem.



QVOD ſi quando angulus rectilineus breuiſſimis lineis contentus, & in extremo alicuius plani poſitus, diuidendus ſit bifariam, deſcribemus ex D, & E, duos arcus ſeſe mutuo interſecantes in F, ſupra angulum A, quia infra puncta D, & E, ſpatium deeſt, in quo deſcribi poſſint. Recta enim ex F, per A, vſque ad B, eiecta ſecabit angulum A, bifariam, vt prius, vt in appoſita figura apparet.



SCHOLIVM.

HINC apertè colligitur, angulum rectilineum quemuis diuidi poſſe etiam in 4. angulos æquales, in 8. in 16. in 32. in 64. & ita deinceps, ſemper procedendo per augmentum duplex. Nam poſtquam angulus quilibet rectilineus in duos æquales angulos fuerit diuiſus, ſi horum vterque iterum bifariam ſecetur, habebimus 4. angulos æquales. Quod ſi ſinguli rurſus diuidantur bifariam, obtinebimus 8. angulos æquales, & ſic deinceps; Non docuit autem Euclides vſquam, quanam ratione angulus rectilineus in quotuis partes æquales poſſit diuidi, quia id à nemine vſque ad illum diem fuerat demonſtratum. Ex Pappo tamen Alexandrino nos id docebimus, beneficio cuiuſdam lineæ curuæ, vel inflexæ, ad finem lib. 6. Interim verò, ſi quis angulum rectilineum quemcunque propoſitum in quotuis partes æquales diuidere deſideret, rudi, vt dicitur, Minerua, vti eum neceſſe erit circino, vt quaſi attentando, & ſæpius repetendo praxim ipſam ad finem deſideratum perueniat; hac nimirum ratione. Sit angulus rectilineus B A C, diuidendus in 5. angulos æquales. Ex A, centro deſcri-



batur arcus circuli B C, ad quodcunq
teruallum, ſecans rectas A B, A C, in
C. Deinde hic arcus beneficio circini
crura modo dilatando magis, modo re
gendo, donec debitam habeant diſtan
diuidatur in tot partes æquales, in quot angulus propoſitus eſt
dendus, vt in exemplo propoſito in quinque partes in punctis D,
G. Si namque ad hæc puncta ex A, rectæ ducantur lineæ, diuiſu
angulus B A C, in quinque æquales angulos. Cum enim circino
ptæ ſint æqualia interualla B D, D E, &c ſi ducantur rectæ B D,
&c. erunt hæ omnes inter ſe æquales. Quare erunt duo latera
a 15. defin. *A D, trianguli B A D, a æqualia duobus lateribus E A, A D, tri*
guli E A D, vtrumque vtrique, cum omnia ex centro egrediantur
circumferentiam vſque. Baſis autem B D, baſi quoque D E, vt di
b 8. pri. *fuit, æqualis eſt: b Angulus igitur B A D, angulo E A D, æqualis*
ſtet; Eademque ratione demonſtrabitur, angulum E A D, an
E A F, æqualem eſſe, & ſic de cæteris. Breuius autem colligetur, om
angulos ad A, eſſe inter ſe æquales, ex 27. propoſ. tertij lib. propte
quod circumferentiæ B D, D E, &c. acceptæ ſunt omnes æquales in
ſeſe. Nemo verò miretur, quod praxes exhibeamus interdum, quar
demonſtrationes ex ſequentibus propoſitionibus pendent. Hoc en
vt ſupra ad defin. 10. diximus, eo conſilio facimus, vt quoad eius f
poteſt, ſingula propriis in locis tractentur, diuiſio nimirum anguli
ctilinei cuiuſuis in quotlibet partes æquales eo in loco, in quo Eucli
docet diuiſionem eiuſdem anguli in duas partes æquales. Et diuiſio
neæ rectæ in quotuis partes æquales, vbi eandem diuidit Euclides bi
riam, & ita de ſingulis. Neque enim ad praxes huiuſmodi requiri
tur ſemper ſequentes demonſtrationes, ſed ſolum, vt probetur recte
per ipſas effectum, quod imperabatur. Quamobrem is, qui non co
tentus nuda praxi demonſtrationem requirit, poterit regredi ad p
xin quamlibet, poſtquam demonſtrationes ad eam neceſſarias di
genter perceperit. Nam ſemper propoſitiones illas, quæ ad hanc r
debent adhiberi, citabimus in demonſtrationibus noſtrarum p
xium; quemadmodum & in proxima praxi citauimus propoſition
27. tertij libri.

x. PROBL. 5. PROPOS. 10.

DATAM rectam lineam finitam bifariam ſecare.



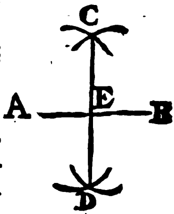
c 1. pri. SIT recta finita A B, diuidenda bifariam, id e
in duas partes æquales. c Deſcribatur ſuper A B, tria
d 9. pri. gulum æquilaterum A B C, cuius angulus C, per r
ctam C D, d diuidatur bifariam, rectaq; C D, recta
A B, ſecet in D. Dico rectam A B, bifariam eſſe di
ſam in D. Quoniam duo latera A C, C D, triang

AC

ACD, æqualia ſunt duobus lateribus B C, C D, trianguli B C D, vtrumque vtrique, nempe A C, ipſi B C, cum ſint ambo latera trianguli æquilateri, & C D, eſt commune; Eſt autem & angulus ACD, angulo B C D, æqualis, per conſtructionem: a Erit baſis A D, baſi B D, æqualis. Datam ergo rectam A B, bifariam ſecuimus, quod facere oportebat. a 4. primi.

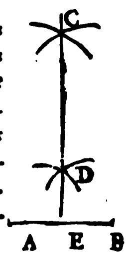
PRAXIS.

EX centro A, ad quoduis interuallum, quod tamen dimidium lineæ AB, excedat, deſcribantur duo arcus, vnus ſupernè, alter infernè; Et ex centro B, ad idem interuallum omnino alij duo arcus delineentur, qui priores ſecent in C, & D. Recta enim ducta CD, ſecabit rectam AB, in E, bifariam. Si enim ex A, & B, ad C, & D, ducantur quatuor rectæ, erunt hæ omnes inter ſe æquales, cum ex centris ad circumferentias æqualium circulorum cadant; Nam arcus circulorum deſcripti ſunt eodem interuallo.



Quoniam igitur latera A B, C D, æqualia ſunt lateribus B C, C D, vtrumque vtrique, & baſis A D, baſi B D, b erit angulus A C D, angulo B C D, æqualis. Rurſus quia latera A C, C E, æqualia ſunt lateribus B C, C E, vtrumque vtrique, & angulus A C E, angulo B C E, vt oſtenſum fuit; c erit baſis A E, baſi B E, æqualis. b 8. primi. c 4. primi.

IAM verò ſi linea bifariam diuidenda poſita ſit in extremo plani cuiuſpiam, ita vt infra ipſam locus non ſit, in quo commodè duo arcus ſeſe interſecantes poſſint deſcribi; deſcriptis ſupra eam duobus arcubus ſeſe interſecantibus in C, deſcribemus ad eaſdem partes alios duos arcus ſeſe interſecantes mutuo in D, ſiue hoc fiat infra punctum C, vt in appoſita figura, ſiue ſupra C. Nam recta per C, D, educta ſecabit rectam A B, bifariam in E.



SCHOLIVM.

PERSPICVVM eſt, eodem modo diuidi poſſe eandem lineam rectam A B, in 4. partes æquales, & in 8. in 16. in 32. &c. ſicuti in propoſitione præcedenti diximus de diuiſione trianguli rectilinei. Qua verò ratione quæuis recta linea propoſita diuidenda ſit in quotcunque partes æquales, vberrimè trademus ad propoſ. 40. huius lib. Idemque longè facilius poſtea efficiemus ad propoſ. 10. lib. 6. vbi varias, & non iniucundas praxes in medium adducemus. Ibi enim videtur eſſe proprius huic rei locus, cum huiuſmodi praxes ferè omnes per linearum proportiones facilius demonſtrentur. Neque verò vnquam diui-

Digitized by Google

ſione lineæ in plures, quàm in duas partes æquales, ad eum locum que indigebimus.

xj. ## PROBL. 6. PROPOS. 11.

DATA recta linea, à puncto in ea dato, rectam li neam ad angulos rectos excitare.

RECTA linea data ſit AB; & in ea punctum C, à quo iub



mur erigere ſuper AB, lineam ad angulos r ctos, ſeu perpendicularem. A puncto C, ſum a 3.pri-mi. tur recta CD, *a* cui æqualis auferatur CE. D inde ſuper DE, *b* conſtituatur triangulum b 1.pri. quilaterum DEF, atque ex F, ad C, ducat recta FC, quam dico eſſe perpendicularem AB. Quoniam latera DC, CF, trianguli DCF, æqualia ſunt l teribus EC, CF, trianguli ECF, vtrumque vtrique, nempe D ipſi EC. per conſtructionem, & CF, commune; Eſt verò & baſi c 8.pri. DF, baſi EF, æqualis, ob triangulum æquilaterum: *c* Erunt an guli ad C, contenti dictis lateribus, æquales. *d* Quare dicetu d 10. de fin. vterque rectus, atque adeo FC, recta, ad AB, perpendicularis Data igitur recta linea à puncto in ea dato, &c. Quod facien dum erat.

PRAXIS.



EX puncto C, abſcindantur vtrinque lineæ æqua les CD, CE, & ex D, & E, deſcribantur duo arcus ſecantes ſeſe in F. Recta namque ducta FC, erit perpendicularis. Demonſtratio eadem eſt, qua Euclidis, ſi modo ducantur rectæ DF, EF, quæ æquales erunt, propter æquales circulos ex D, & E, deſcriptos, qui ſe interſecant in puncto F. Quod ſi punctum datum in linea recta fuerit extremum, producenda erit linea in rectum & continuum, ad partes puncti dati, vt ex illo erigatur ſecundum pra xim datam linea perpendicularis. Vt ſi linea data fuerit AC, & punctum datum C, extremum; protrahenda erit AC. in B, & ſu menda æquales CD, CE, &c. Si verò ad aliquam lineam conſti tuenda ſit linea perpendicularis, non quidem in puncto aſſignato, ſed vtcunque, id efficietur hac methodo. Ex duobus punctis A, & B, qui buſcunque lineæ propoſitæ deſcribantur tam ſuperne, quàm inferne



duo arcus ſeſe interſecantes in C, & D. Nam recta ducta CD, erit perpendicularis ad AB, hoc eſt, fa ciet duos angulos ad E, rectos, ſeu æquales. Quod non aliter probabis, quàm ſupra praxim, qua lineam in duas æquales diuiſimus partes, demonſtrauimus.

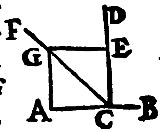
Namque

Digitized by Google

Nam 4. propoſ. erunt anguli ad E, æquales, quippe qui ſuper æqualibus lineis A E, B E, conſiſtant, opponanturq́; æqualibus lateribus A C, B C, quæ ex C, ad puncta A, & B, ducerentur.

EX PROCLO.

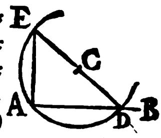
Si punctum in linea datum fuerit extremum, & linea commodè duci nequiuerit, poterimus ex puncto dato educere lineam perpendicularem, linea non producta, hac ratione. Sit linea A B, & punctum A. Ex C, puncto quolibet ſupra lineam educatur perpendicularis C D, vt docet Euclides; a & abſcindatur C E, æqualis ipſi A C: Deinde b diuidatur angulus C, biſariam, ducta recta C F: Et ex E, rurſus, vt docuit Euclides, educatur E G, perpendicularis ad C D, ſecans rectam C F, in G. Ducta enim recta G A, perpendicularis erit ad A B. Quoniam cùm latera A C, C G, trianguli A C G, æqualia ſint lateribus E C, C G, trianguli E C G, vtrumque vtrique, & anguli hiſce lateribus contenti æquales quoque, per conſtructionem: c Erunt anguli A, & E, oppoſiti communi lateri C G, æquales; Sed E, eſt rectus per conſtructionem; igitur & A, rectus erit, d ideoq́; A C, ad A B, perpendicularis.



a 3. primi.
b 9. primi.
c 4 primi.
d 10. def.

SCHOLIVM.

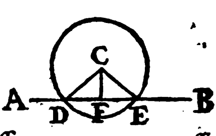
BREVIVS lineam perpendicularem erigemus ex puncto dato, ſiue extremum illud ſit, ſiue non, hoc modo. Sit data linea A B, punctumq́; in ea A. Ex centro C, extra lineam aſſumpto, vbi libuerit (dummodo recta A B, producta cum ipſo non conueniat) interuallo vero accepto vſque ad A, deſcribatur arcus circuli ſecans A B, in D. Et ex D, per C, recta ducatur ſecans arcum in E. Recta enim ducta E A, erit perpendicularis ad A B. Nam angulus A, eſt rectus, cùm ſit in ſemicirculo D A E, vt oſtendemus propoſitione 31. libri 3.



PROBL. 7. PROPOS. 12. xij.

SVPER datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod in ea non eſt, perpendicularem rectam deducere.

Sit recta A B, interminatæ quantitatis, & extra ipſam punctũ C, à quo oportet lineam perpendicularem deducere ad rectam A B. Centro C, interuallo vero quolibet circulus deſcribatur ſecans A B, in D, & E. (quoniam interuallum aſſumptum tantum eſſe



Digitized by Google

a 10 pri. debet, vt tranſcendat rectam A B; aliàs eam non ſecaret) a Diuiſa autem recta D E, biſariam in F, ducatur recta C F, quam dico perpendicularem eſſe ad A B. Si enim ducantur C D, C E, erunt duo latera D F, F C, trianguli D F C, æqualia duobus lateribus E F, F C, trianguli E F C, vtrumque vtrique, per conſtructionē; eſt autem & baſis C D, baſi C E, æqualis, cùm hæ ſint ex centro

b 8. pri. C, ad circumferentiam. Quare b erit angulus D F C, angulo E F C, æqualis, & propterea vterque rectus. Ducta eſt igitur C F, perpendicularis, quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

PROBE appoſuit Euclides hanc particulam, infinitam. *Si enim linea eſſet infinita, non poſſet ſemper à puncto dato extra ipſam perpendicularis ad eam deduci. Vt ſi linea finita eſſet B E, & punctum C, non poſſet ex C, deſcribi circulus ſecans B E, in duobus punctis, quare neque ex C, perpendicularis duci ad B E. Hac igitur de cauſa Vult Euclides, rectam datam eſſe infinitam, hoc eſt, non habere magnitudinem determinatam, Vt ſaltem ad ipſam productam perpendicularis poſſit deduci. Ita enim fiet hic. ſi B E, producatur, donec circulus ex C, deſcriptus ſecet totam B A, productam in D, & E, &c.*

PRAXIS.

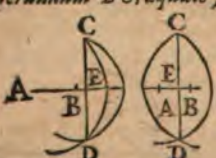


CENTRO facto C, & interuallo quouis eodem, deſcribantur duo arcus ſecantes rectam datam in A, & B. Deinde ex A, & B, eodemq́; interuallo, Vel alio, ſi placuerit, alij duo arcus deſcribantur ſecantes ſe in D. Nam ducta recta C D ſecans A B, in E, erit perpendicularis ad A B. Demonſtratio huius operationis non differt à demonſtratione tradita in praxi propoſitionis

c 4. pri. 10. *Nam anguli ad E, erunt recti,* c *nempe inter ſe aquales.*



IDEM efficiemus hoc modo. Ex quouis puncto A, in linea data, & interuallo quolibet Vſque ad C, aſſumpto, arcus circuli deſcribatur: Deinde ex quolibet alio puncto B, interualloq́; Vſq; ad idem C, alius arcus deſcribatur priorem ſecans in C, & D; Eritq́; recta C D, ſecans A E, in E, perpendicularis ad A B. Demonſtratio eadem eſt, quæ prior. Non eſt autem neceſſe, Vt interuallum B C, aquale ſit interuallo A C, Vt in hac figura apparet.

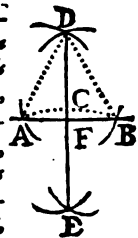


Facilior tamen erit, & breuior operatio, ſi idem ſemper interuallum accipiatur.

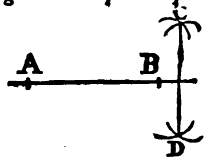
QVOD ſi punctum C, fuerit nimis Vicinum recta A B, ita agendum erit. Centro C, ad quoduis interuallum ſecetur recta A B, in duobus punctis A, B, ex quibus ad maius interuallum quodcunque, quàm A C, Vel A C, bini arcus

ſam

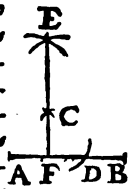
tam ſuprà, quàm infrà deſcribantur, ſe interſecantes in D, E. Nam ducta recta D C F, quæ producta neceſſariò per punctum E, tranſibit, perpendicularis erit ad rectam A B, in F. Quod ita demonſtrabimus, ductis rectis A D, B D, A C, B C. Quoniam duo latera D A, D C, trianguli A C D, duobus lateribus D B, D C, trianguli B C D, æqualia ſunt, nec non & baſes A C, B C, æquales ſunt, a erunt anguli ad D, æquales. Quare cùm duo latera D A, D F, trianguli A D F, duobus lateribus D B, D F, trianguli D B F, æqualia ſint, contineantq; angulos ad D, æquales, vt oſtendimus; b erunt anguli ad F, æquales, ac proinde recti, &c. a 8. pri. b 4. pri.



IAM verò ſi punctum datum ſit iuxta extremum plani cuiuſpiam, ita vt linea data non poſſit produci, ita agemus. Ex puncto quouis B, quod è regione dati puncti C, videatur quaſi eſſe poſitum, hoc eſt, ferè in extremitate lineæ datæ A B, deſcribantur duo arcus ſupra, & infra lineam A B, ad interuallum B C. Deinde ex puncto A, aliquantum remoto à puncto accepto B (Quo autem magis diſtabunt inter ſe puncta A, & B, eò commodiùs puncta interſectionum arcuum cognoſcentur) alij duo arcus ad interuallum A C, deſcribantur, ſecantes priores in C, & D. Nam recta C D, perpendicularis erit ad datam rectam A B.

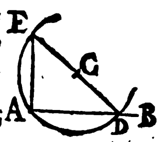


SI autem puncto non prope extremum plani, in quo linea eſt, dato, linea ſit in extremo plani, vt duo arcus infra lineã commodè ſe interſecare non poſſint, ſiue punctum datum C, ſit propinquum lineæ A B, ſiue non, abſoluemus problema hoc modo. Ad interuallum A C, vbicunque punctum A, ſumatur, deſcribatur ex C, arcus ſecans rectam A B, in D; atque ex A, D, duo arcus deſcribãtur verſus punctũ C, ſeſe interſecantes in E. Recta namq; ex E, per C, ducta ſecans A B, in F, perpendicularis erit ad A B, vt ſuprà demonſtratum eſt, quando punctum C, erat prope lineã A B.



QVO verò modo nos gerere debeamus, quando & punctum datum eſt iuxta vnum extremum plani, & linea data prope alterum extremum, ita vt neque lineam producere liceat, neque duo arcus commodè ſe interſecare poſſint in D, infra datam rectam A B, docebimus in ſcholio propoſitionis 31. huius lib.

VERVM hoc etiam efficiemus hoc modo. In figura ſcholij propoſ. 11. ſit ad rectam A B, ex puncto E, deducenda perpendicularis ad extremum quodammodo lineæ. Ducta vtcunque recta E D, a ſecetur bifariam in C; & centro C, per E, arcus circuli deſcri- a 11. pri.



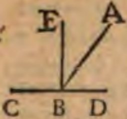
deſcribatur ſecans rectam datam in A. Quod ſi non ſecet, producenda erit, donec ab arcu ſecetur. Recta enim E A, erit ad A B, perpendicularis; b *cùm angulus A, ſit in ſemicirculo rectus.*

a 31. tertij.

xiij.

THEOR. 6. PROPOS. 13.

CVM recta linea ſuper rectam conſiſtens lineam angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.



RECTA linea A B, conſiſtens ſuper rectam C D, faciat duos angulos A B C, A B D. Si igitur A B, fuerit perpendicularis ad C D, *b* erunt dicti anguli duo recti. Si verò A B, non fuerit perpendicularis, faciet vnum quidem angulū obtuſum, alterum verò acutū. Dico igitur ipſos duobus eſſe rectis æquales. *c* E ducatur enim B E, ex B, perpendicularis ad C D, vt ſint duo anguli E B C, E B D, recti. Quoniam verò angulus rectus E B D, *d* æqualis eſt duobus angulis D B A, A B E; *e* erunt, appoſito communi angulo recto E B C, duo recti E B D, E B C, tribus angulis D B A, A B E, E B C, æquales. Rurſus quia *f* angulus A B C, duobus angulis A B E, E B C, æqualis eſt; *g* erunt appoſito communi angulo A B D, duo anguli A B C, A B D, tribus angulis D B A, A B E, E B C, æquales. Sed eiſdem his tribus oſtendimus, æquales etiam eſſe duos rectos E B D, E B C; quæ autem eidem æqualia, *h* inter ſe ſunt æqualia. Duo igitur anguli A B C, A B D, æquales ſunt duobus rectis E B D, E B C. Cùm ergo recta linea ſuper rectam conſiſtens lineam, &c. Quod oſtendere oportebat.

b 10. def
c 11. pri.
d 19. pro
e 2. pron
f 19. pro
g 2. pro.
h 1. pron

SCHOLIVM.

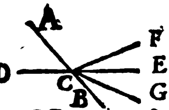
VIDETVR hæc propoſitio pendere ex communi quadam animi notione. Quo enim angulus A B C, ſuperat rectum angulum E B C, eo reliquus angulus A B D, ſuperatur ab angulo recto E B D. Nam ſicut ibi exceſſus eſt angulus A B E, ita hic defectus eſt idem angulus A B E. Quocirca anguli A B C, A B D, duobus rectis æquales eſſe conuincuntur: ſiquidem tantum vnus eorum ſupra rectum acquirit, quantum alter deperdit.

xiv.

THEOR. 7. PROPOS. 14.

SI ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctū, duæ rectæ lineæ non ad eaſdem partes ductæ eos, qui ſunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.

Ad punctum C, lineæ rectæ A B, in diuerſas partes eductæ ſint duæ rectæ C D, C E, facientes cum A B, duos angulos A C D, A C E,



ACE, vel rectos, vel duobus rectis æquales. Dico eas CD, CE, inter ſe eſſe cõſtitutas in directum, ita vt DCE, ſit vna linea recta. Si enim nõ eſt recta DCE; producta DC, ad partes C, in directum, & continuum cadet aut ſupra CE, vt ſit recta DCF, aut infra CE, vt ſit recta DCG. Si cadit ſupra, cum AC, conſtat ſuper rectam DCF, a fient duo anguli ACD, ACF, duobus rectis æquales; Ponuntur autem & duo anguli ACD, ACE, æquales duobus rectis; b & omnes recti ſunt inter ſe æquales. Quare duo anguli ACD, ACF, duobus angulis ACD, ACE, erunt æquales. Ablato igitur cõmuni angulo ACD, c remanebunt anguli ACF, ACE, inter ſe æquales, pars & totum, quod eſt abſurdum. Non igitur recta DC, producta cadet ſupra CE; Sed neq; infra cadet; Eadem enim ratione probarentur anguli ACE, ACG, æquales. Igitur DC, producta eadem efficietur, quæ CE; propterea que, ſi ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, &c. Quod demonſtrandum erat.

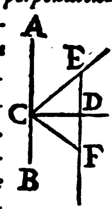
a 13. primi.
b 12. pro
c 3. pron

SCHOLIVM.

EST hæc propoſitio præcedentis conuerſa. In ea enim probatum fuit, ſi DCE, ſit recta, angulos ACD, ACE, duobus eſſe rectis æquales. In hac verò demonſtratum eſt, ſi dicti anguli ſint duobus rectis æquales, rectas DC, EC, eſſe vnam lineam rectam.

EX PROCLO.

RECTE Euclides addidit in propoſitione hac (& non ad eaſdem partes.) Quoniam, vt ait Porphyrius, fieri poteſt, vt ad punctum aliquod lineæ datæ ad eaſdem partes duæ lineæ ducantur, facientes cum data duos angulos duobus rectis æquales, quæ tamen non conſtituant vnam lineam, eò quòd non ad diuerſas ſint ductæ partes. Sit enim punctum C, in linea AB, datum. Ducatur CD, d *perpendicularis ad AB,* e *diuidaturq; rectus angulus ACD, bifariam per rectam CE. Deinde ex D, quolibet puncto rectæ CD,* f *ducatur DE, perpendicularis ad CD, ſecans rectam CD, in E. Producta autem ED, ad partes D,* g *ſumatur DF, æqualis rectæ DE, & ducatur recta FC. Quoniam igitur latera ED, DC, trianguli EDC, æqualia ſunt lateribus FD, DC, trianguli FDC, vtrumque vtrique, & anguli D, ipſis contenti æquales, nempe recti;* h *erit baſis EC, baſi CF, æqualis, & angulus ECD, angulo FCD. Sed angulus ECD, dimidium eſt recti. (Eſt enim rectus ACD, diuiſus bifariam.) Igitur & FCD, dimidium erit recti. Quare CF, cum AC, faciet angulum ACF, conſtantem ex recto, & dimidio recti; Facit autem CE, cum eadem AC, angulum ACE, dimidium etiam recti. Duo igitur anguli ACF, ACE, quos ad eaſdem partes faciunt rectæ CF, CE, cum AB; æquales ſunt duobus rectis: Et tamen*



d 11. primi.
e 9. primi.
f 11. primi.
g 3. primi.
h 4 primi.

Digitized by Google

men CF, CE, non ſunt vna linea recta, propterea quòd non ſunt ducta ad diuerſas partes, ſed ad eaſdem.

xv.

THEOR. 8. PROPOS. 15.

SI duæ rectæ lineæ ſe mutuò ſecuerint, angulos ad verticem æquales inter ſe efficient.

Secent ſe duæ rectæ AB, CD, in puncto E, vtcunque. Dico angulos, quos faciunt ad verticem E, inter ſe eſſe æquales, angulum videlicet AED, angulo BEC, & angulum AEC, angulo BED.
a 13.pri. Quoniam recta DE, conſiſtit ſuper rectam AB, *a* erunt duo anguli AED, DEB, æquales duobus rectis. Rurſus quia recta BE, ſuper rectam CD, conſiſtit, erunt eadem ratione duo anguli CEB, BED, duobus rectis æquales. Cùm igitur *b* omnes recti
b 12.pro



anguli inter ſe ſint æquales; erunt duo anguli AED, DEB, duobus angulis DEB, BEC, æquales. Dempto igitur communi angulo DEB, *c* remanebit angulus AED, angulo BEC, æ-
c 3.pro. qualis. Eadem ratione confirmabitur, angulos AEC, BED, inter ſe æquales eſſe. Nam duo anguli AEC, CEB, *d* qui duobus
d 13.pri. ſunt rectis æquales, æquales erunt duobus quoq; angulis DEB, BEC, qui duobus rectis ſunt æquales. Ablato igitur angulo communi BEC, *e* remanebunt anguli AEC, BED, æquales inter
e 3.pron ſe. Si igitur duæ rectæ lineæ ſe mutuò ſecuerint, &c. Quod oſtendere oportebat.

COROLLARIVM I.

EVCLIDES colligit ex demonſtratione huius theorematis (ex ſententia Procli, quoniam alia exemplaria hoc corollarium non habent) duas lineas rectas ſe mutuò ſecantes efficere ad punctum ſectionis quatuor angulos quatuor rectis angulis æquales. Nam in demonſtratione oſtenſum fuit, tam duos angulos AED, DEB, quàm duos AEC, CEB, duobus eſſe rectis æquales, per 13. propoſ. Omnes igitur quatuor anguli ad E, conſtituti æquipollent bis duobus rectis angulis. Quare quatuor rectis æquales exiſtunt.

COROLLARIVM II.

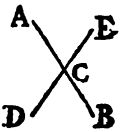
EADEM ratione colligemus, omnes angulos circa vnum & idem punctum conſtitutos, quotcunq; fuerint, quatuor duntaxat rectis angulis æquales eſſe. Si enim ex E, aliæ lineæ quotlibet educantur, diuidentur ſolummodò illi quatuor anguli ad E, conſtituti in plurimas partes, *f* quæ
f 19.pro. omnes ſimul ſumptæ totis ſuis adæquantur. Cùm ergo illi quatuor anguli æquales ſint quatuor rectis, ex 1. corollario, erunt quoq; omnes alij ſimul ſumpti quatuor tantùm rectis æquales. Ex quo perſpicuum eſt, omne ſpatium punctum aliquod in plano circumſtans, æquiualere quatuor rectis angulis, vt multi auctores aſſerunt: quia omnes anguli, qui circa illud punctum conſtitui poſſunt, quatuor ſunt rectis angulis æquales. Simili modo conſtat, quotlibet lineas rectas ſe inuicem ſecantes, facere ad punctum ſectionis angulos æquales quatuor rectis.

EX

Digitized by Google

EX PROCLO.

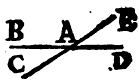
SI ad aliquam rectam lineam, ad eiuſque ſignum, duæ rectæ lineæ non ad eaſdem partes ſumptæ, angulos ad verticem æquales fecerint; ipſæ rectæ lineæ in directum ſibi inuicem erunt.



EX puncto C, rectæ A B, in diuerſas partes egrediuntur duæ rectæ C D, C E, facientes angulos A C E, B C D, inter ſe æquales: Vel etiam duos A C D, B C E. Dico duas C D, C E, efficere vnam lineam rectam. Quoniam enim angulus A C E, æqualis eſt angulo B C D; addito communi angulo B C E, a *erunt duo anguli A C E, E C B, duobus angulis D C B, B C E, æquales: Sed* b *anguli A C E, E C B, ſunt æquales duobus rectis. Igitur & duo D C B, B C E, duobus erunt rectis æquales. Quamobrem C D, C E,* c *erunt lineæ vna recta. Hoc autẽ, vt vides, cõuerſum eſt propoſitionis decimaquintæ.* a 2. pro. b 13. pri. c 14. pri

EX PELETARIO.

SI quatuor rectæ lineæ ab vno puncto exeuntes binos angulos oppoſitos inter ſe æquales fecerint, erunt quælibet duæ lineæ aduerſæ in rectum ſibi, & continuum coniunctæ.



EX puncto A, quatuor lineæ eductæ A B, A C, A D, A E, faciant duos angulos oppoſitos B A E, C A D, inter ſe æquales: Item duos B A C, D A E, inter ſe æquales. Dico tam B A, A D, facere vnam lineam rectam, quam C A, A E. Quoniam æquales ſunt anguli B A E, C A D, ſi æquales illis addantur anguli B A C, D A E, d *erunt duo anguli B A E, B A C, æquales duobus angulis C A D, D A E. Tam ergo illi, quàm hi, dimidium ſunt quatuor angulorum circa punctum A, conſiſtentium: At hi quatuor æquales ſunt quatuor rectis, per 2. coroll. præcedentis propoſ. Igitur duo anguli B A E, B A C, æquales ſunt duobus rectis;* e *atque adeò C A, A E, vnam efficient lineam rectam. Eodem pacto oſtendetur, duas B A, A D, vnam rectam efficere lineam. Nam eadem ratione erunt duo anguli B A E, E A D, æquales duobus angulis D A C, C A B. Quare, vt prius, concludetur propoſitum. Peletarius autem demonſtrat hoc idem ratione ducente ad id, quod fieri nequit. Nos tamen demonſtrationem noſtram oſtenſiuam eius demonſtrationi iure optimo præpoſuimus.* d 2. pro. e 14. pri.

XVI.

THEOR. 9. PROPOS. 16.

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto, externus angulus vtrolibet interno, & oppoſito, maior eſt.

TRIAN-

TRIANGVLI A B C, latus B A, producatur ad D. Dico angulum externum D A C, maiorem eſſe interno, & oppoſito A C B, itemque maiorem interno, & oppoſito A B C. Diuidatur *a* enim A C, bifariam in E; & ex B, per E, extendatur recta B E F, ita vt E F, *b* abſciſſa ſit æqualis rectæ E B; ducaturq; recta F A. Quoniam igitur latera C E, E B, trianguli C E B, æqualia ſunt lateribus A E, E F, trianguli A E F, vtrumque vtrique, per conſtructionem; Sunt autem & anguli ad E, dictis lateribus comprehenſi, *c* inter ſe æquales, cùm ſint circa verticem E, & oppoſiti: Erit *d* baſis C B, æqualis baſi A F, & angulus E C B, angulo E A F; Eſt autem angulus D A C, externus maior angulo E A F, totum videlicet parte. Igitur & externus angulus D A C, maior erit interno, & oppoſito angulo A C B. Quod ſi latus C A, producatur ad G; & A B, diuidatur bifariam in H; extendaturque recta C H I, vt H I, æqualis ſit rectæ H C, & ducatur recta I A: demonſtrabitur eadem prorſus ratione, angulum externum G A B, maiorem eſſe interno angulo, & oppoſito A B C; Eſt autem *e* angulus D A C, angulo G A B, æqualis, cùm lineæ B D, C G, ſe mutuò ſecent in A. Igitur & angulus D A C, maior erit interno & oppoſito angulo A B C. Eſt autem idem angulus D A C, maior quoque oſtenſus angulo interno & oppoſito A C B. Cuiuſcunque ergo trianguli vno latere producto, &c. Quod demonſtrandum erat.



a 10. *primi.*
b 3. *primi.*
c 15. *primi.*
d 4. *primi.*
e 15. *primi.*

S C H O L I V M.

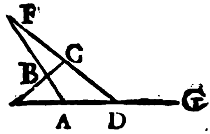
NON dixit Euclides, angulum externum D A C, maiorem eſſe angulo B A C, interno, qui ſibi eſt deinceps; ſed ſolùm magnitudine ſuperare vtrumlibet A C B, A B C, internorum, ſibiq; oppoſitorum: quoniam externus angulus æqualis poteſt eſſe angulo interno ſibi deinceps, quando ſcilicet externus rectus eſt. Tunc enim neceſſariò is, qui ſibi eſt deinceps, rectus quoque erit: Poteſt & eſſe minor, quando nimirum eſt acutus. Hoc enim poſito, angulus illi deinceps obtuſus erit. Solùm ergo, quando obtuſus erit externus, ſuperabit internũ ſibi deinceps; Hic enim neceſſario acutus exiſtet. Quæ omnia facilè colliguntur ex propoſ. 13. per quam angulus externus, & internus illi deinceps, æquales ſunt duobus rectis.

ID verò, quod in ſcholio propoſ. 6. huius libri nos demonſtraturos recepimus, nimirum hanc propoſitionem non poſſe conuerti; cùm & vno latere figura quadrilatera producto, externus angulus quolibet interno, & oppoſito poſſit eſſe maior; hac ratione abſoluemus.

SIT figura quadrilatera A B C D, cuius angulus B A D, obtuſus, & A B C, rectus conſtituatur, hac tamen lege, vt recta A B, D C, producta ad partes B, & C, in puncto E, nec non & recta D A, C B, ad

partes

Digitized by Google



partes B, & E, in pũcto F, coeant. Quod quidem fiet, ſi conſtituatur triangulũ ADE, obtuſangulũ, & producta D A, verſus A, ducatur ex pũcto F, ad A E, perpẽdicularis, ſecans latus D E, in C. Dico, ſi A D, producatur ad G, angulum externum C D G, maiorem eſſe quolibet trium internorũ B A D, A B C, B C D, ſibi oppoſitorum. Cùm enim A D E, triangulum ſit, a erit angulus externus E D G, maior interno oppoſito D A E. Rurſus cum D A B, obtuſus maior ſit recto A B C, maior quoq; multò erit E D G, ipſo A B C. Poſtremò, quia & in triangulo C D F, b angulus externus C D G, maior eſt interno, & oppoſito F C D; manifeſtum eſt, in quadrilatero A B C D, externum angulum C D G, maiorẽ eſſe internis, & oppoſitis B A D, A B C, B C D. Quamobrem propoſitio hæc 16. conuerti nequit, quippe cùm eius antecedens, & conſequens non reciprocentur, vt demonſtratum eſt. a 16. primi. b 16. primi.

E X P R O C L O.

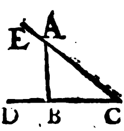
SEQVITVR ex hac propoſitione, ab eodem puncto ad vnam eandemq; lineam rectam non poſſe duci plures lineas rectas, quàm duas inter ſe æquales. Si enim fieri poteſt, ducantur ex A, ad lineam B C, tres lineæ rectæ æquales A B, A C, A D. Quoniam igitur latera A B, A C, ſunt æqualia, c erunt anguli A C B, & A B C, æquales ſuper baſim B C. Rurſus quia latera A B, A D, ſunt æqualia, d erunt anguli A D B, & A B D, ſuper baſim B D, æquales. Quare cùm vterque angulus A C D, & A D B, æqualis ſit angulo A B C, e erit angulus A D B, æqualis angulo A C D, externus interno oppoſito, quod eſt abſurdum, cùm per hanc 16. propoſ. externus interno maior ſit. Non ergo plures lineæ rectæ, quàm duæ, inter ſe æquales, ex A, ad B C, poſſunt duci. Quod eſt propoſitum. c 5. primi. d 5. primi. e 1. pronun.



PROBL. 10. PROPOS. 17. xvij.

CVIVSCVNQVE trianguli duo anguli duobus rectis ſunt minores, omnifariam ſumpti.

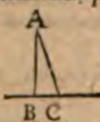
Sit triangulum A B C; Dico duos angulos A B C, & A C B, minores eſſe duobus rectis; Itẽ duos C B A, & C A B; Itemque duos B A C, & B C A. Producantur enim duo quæuis latera, nempe C B, C A, ad D, & E. Quoniam igitur *f* angulus A B D, externus maior eſt interno & oppoſito angulo A C B; ſi addatur communis angulus A B C, *g* erunt duo anguli A B D, A B C, maiores duobus angulis A B C, A C B: *h* Sed A B D, A B C, æquales ſunt duobus rectis. Igitur A B C, A C B, minores ſunt duobus rectis. Eadem ratione erunt anguli C B A, & C A B, minores duobus rectis. Nã cùm angulus externus A B D, *i* maior ſit angulo C A B, f 16. primi. g 4. pronun. h 13. primi. i 16. primi.



a 4.pro. interno, & oppoſito; *a* erunt, appoſito communi angulo A B C duo anguli A B D, A B C, maiores duobus angulis C A B, C B A.
b 13.pri. Cùm ergo *b* duo illi duobus rectis ſint æquales, erunt hi alij duo duobus rectis minores. Non ſecus oſtendemus, duos B A C, B C A duobus eſſe rectis minores. Cùm enim angulus externus B A E
c 16.pri. *c* maior ſit interno & oppoſito angulo B C A; ſi apponatur com-
d 4.pro. munis angulus B A C, *d* erunt duo anguli B A E, B A C, duobus
e 13.pri. angulis B C A, B A C, maiores: ac proinde cùm illi duo *e* ſint duobus rectis æquales, erunt duo hi minores duobus rectis. Cuiuſcunque igitur trianguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

EX PROCLO.

HINC perſpicuum eſt, ab eodem puncto ad eandem rectam lineam non poſſe deduci plures lineas perpendiculares, quàm vnam. Si enim fieri poteſt, ducantur ex A, ad rectam B C, duæ perpendiculares A B, A C. Erunt igitur in triangulo A B C duo anguli interni B, & C, duobus rectis æquales, cum ſint duo recti, quod eſt abſurdum.



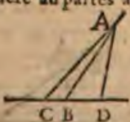
f 17.pri. *f Sunt enim quilibet duo anguli in triangulo quocunque oſtenſi minores duobus rectis. Non ergo plures perpendiculares, quàm vna, ex A, ad B C, deduci poſſunt. Quod eſt propoſitum.*

COROLLARIVM I.

CONSTAT etiam ex his, In omni triangulo, cuius vnus angulus fuerit rectus, vel obtuſus, reliquos eſſe acutos, ceu monuimus defin. 26. huius lib. Cùm enim per hanc propoſ. duo quilibet anguli ſint duobus rectis minores, neceſſe eſt, ſi vnus fuerit rectus, vel obtuſus, quemcunque reliquorum eſſe acutum, ne duos angulos in triangulo rectos, aut duobus rectis maiores eſſe fateamur.

COROLLARIVM II.

SEQVITVR etiam ex hac propoſ. ſi linea recta cum alia recta angulos inæquales faciat, vnum acutum, & obtuſum alterum, lineam perpendicularem ex quouis eius puncto ad aliam illam rectam demiſſam cadere ad partes acuti anguli: Faciat enim recta A B, cum recta C D, angulos inæquales, nempe A B D, acutum, & A B C, obtuſum, demittaturque ex puncto A, quocunque ad C D, perpendicularis A D. Dico A D, cadere ad partes anguli acuti A B D. Nam ſi non cadit ad partes acuti anguli A B D, cadat ſi fieri poteſt, ad partes anguli obtuſi A B C. Igitur duo anguli A B C, A C B, obtuſus & rectus, in triangu-



g 17.pri lo A B C, maiores ſunt duobus rectis; *g* ſed & duobus rectis ſunt minores, quod eſt abſurdum. Non ergo ex A, perpendicularis ad C D, deducta cadit ad partes anguli obtuſi. Quare ad partes acuti anguli cadet.

COROLLARIVM III.

PARI ratione fit ex hac propoſ. manifeſtum omnes angulos trianguli æquilateri, & duos angulos trianguli Iſoſcelis ſupra baſin, eſſe acutos.
h 5.pri. Nam *h* cùm & quilibet duo in triangulo æquilatero, & duo in Iſoſcele
i 17.pri. ſupra baſin ſint inter ſe æquales; *i* ſintq; ſimul tam illi duo, quàm hi duobus

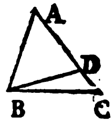
Digitized by Google

bus rectis minores: erit quilibet illorum recto minor, hòc eſt, acutus. Si e-
nim alter foret, aut obtuſus, eſſent ambo vel duobus rectis æquales, aut
maiores.

THEOR. 11. PROPOS. 18. XVIII.

OMNIS trianguli maius latus maiorem angulum ſubtendit.

IN triangulo A B C, ſit latus A C, maius latere A B. Dico angulum A B C, ſubtenſum à maiori latere A C, maiorem eſſe angulo A C B, qui à minori latere A B, ſubtenditur. Nam ex A C, *a* auferatur A D, æqualis ipſi A B, & ducatur recta B D. Quoniã igitur duo latera A B, A D, æqualia ſunt per conſtructionẽ, *b* erunt anguli A B D, A D B, æquales: Eſt autem *c* angulus A D B, maior angulo A C B. Igitur & angulus A B D, maior erit angulo A C B. Quamobrem cùm *d* angulus totus A B C, maior adhuc ſit angulo A B D; erit angulus A B C, multò maior angulo A C B. Eadem ratione, ſi latus A C, maius ponatur latere B C, oſtendens angulum A B C, maiorem eſſe angulo B A C; ſi nimirum ex C A, abſcindatur linea æqualis ipſi C B, &c. Quare omnis trianguli maius latus maiorem angulum ſubtendit; Quod demonſtrandum erat.



a 3. pri.
b 5. pri.
c 16 pri
d 9. pro.

COROLLARIVM.

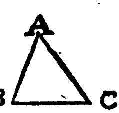
EX hoc ſequitur, omnes tres angulos trianguli ſcaleni eſſe inæquales, vt monuimus defin. 15. huius lib. Sit enim triangulum ſcalenum A B C, cuius maximum quidem latus A C, minimum autem B C, & medium locum habens A B. Dico eiuſdem omnes angulos inæquales eſſe. Cùm enim latus A C, ponatur maius latere A B, erit per hanc propoſ. angulus B, angulo C, maior. Eadem ratione maior erit angulus C, angulo A, quandoquidem & latus A B, latere B C, maius ponitur. Sunt igitur omnes tres anguli inæquales, maximus quidem B, minimus verò A, & C, medium locum inter vtrumque tenens.



THEOR. 21. PROPOS. 19. XIX.

OMNIS trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur.

IN triangulo A B C, angulus B, maior ſit angulo C. Dico latus A C, ſubtendens maiorem angulum B, maius eſſe latere A B, quod angulum minorem C, ſubtendit. Si enim latus A C, maius non eſt latere A B, erit vel æquale illi, vel minus. Si dicatur A C, æquale eſſe ipſi A B, *e* erit angulus B, æqualis angulo C; Eſt autem & maior per hypotheſin, quod eſt abſurdum. Si verò A C, minus eſſe dicatur latere A B, erit angulus B, ſubtenſus à minore latere A C, minor angulo C, ſubtenſo à maiore latere A B; Ponitur autem maior, quod magis eſt abſurdum. Cùm igitur A C, latus



e 5. pri

Digitized by Google

neque æquale ſit lateri A B, neque minus eo, erit maius. Eaden ratione probabitur, latus A C, maius eſſe latere B C, ſi angulu B, maior eſſe concedatur angulo A. Omnis ergo trianguli maio angulus maiori lateri ſubtenditur; Quod demonſtrandum pro ponebatur.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex hac propoſ. omnium rectarum ex quouis punct ad rectam quamcunque ductarum, eam, quæ perpendicularis eſt, eſſe mi



nimam. Ducantur enim ex puncto A, ad rectam B C quotcunque lineæ A D, A E, A F, & aliæ, quarum A D ſola ſit perpendicularis ad B C, & nulla alia, cùm ex eo dem puncto ad eandem rectam ſola vna perpendiculari duci poſſit, vt ex Proclo ad propoſ. 16. demonſtrauimu Dico omnium minimam eſſe A D. Nam in triangulo A E D, cum duo an

a 17. pri. guli A D E, A E D, *a* ſint duobus rectis minores, ponaturque A D E, re

b 19. pri. ctus; erit A E D, acutus. Quare *b* maius erit latus A E, latere A D. Eoden modo oſtendemus, omnes alias rectas maiores eſſe recta A D: ac proind perpendicularis A D, omnium erit minima.

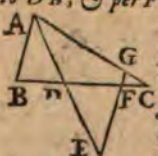
EX PROCLO.

POSSVMVS hoc idem theorema oſtendere affirmatiua demonſtratione, ſine adminiculo præcedentis; ſi tamen prius demonſtretur hoc ſequens theorema.

SI trianguli angulus bifariam ſectus fuerit, ſecanſque angulum recta linea ad baſin ducta in partes inæquales ipſam diuidat; Latera illum angulum continentia inæqualia erunt, & maius quidem illud, quod cum maiori baſis ſegmento coincidit, minus verò, quod cum minori.

TRIANGVLI A B C, angulus B A C, diuidatur biſariam per rectam A D, quæ ſecet baſin B C, in partes inæquales, maiuſque ſegmentum ſit D C. Dico latus A C, maius eſſe latere A B. Producatur enim A D, ad E,

c 3. pri. *c Vt ſit D E, æqualis ipſi A D. Deinde ex maiori ſegmento D C, auferatur recta D F, æqualis minori ſegmento D B, & per F, ex E, extendatur recta E F G. Quoniam igitur latera A D, D B, trianguli A D B, æqualia ſunt lateribus E D, D F, trianguli E D F, vtrumque*



d 15. pri. *vtrique, per conſtructionem; ſunt autem & d anguli A D B, E D F, dictis lateribus contenti æqua-*

e 4. pri. *les: e Erunt baſes A B, & E F, æquales, & angulo B A D, angulus E F D, æqualis: Eſt verò &*

f 1. pron. *angulus C A D, angulo B A D, æqualis, per hypotheſin: Igitur f anguli C A D, G E A, trianguli A G E, æquales erunt,*

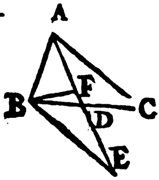
g 6. pri. *g ideoque latera A G, E G, æqualia erunt. Eſt autem recta A C, maior quàm A G: quare & A C, maior erit, quàm E G. Et quia E G, maior eſt, quàm*

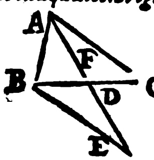
Digitized by Google

quàm I F, erit & A C, multò maior, quàm E F. Cùm igitur demonſtratum ſit rectam E F; æqualem eſſe rectæ A B, erit A C, latus maius latere A B, quod erat oſtendendum.

HOC oſtenſo theoremate, ita propoſitio 19. demonſtrabitur. In triangulo A B C, angulus A B C, maior ſit angulo C. Dico latus A C, maius eſſe latere A B. Diuiſa enim recta B C (ſuper quam conſtituti ſunt dicti anguli inæquales) bifariam in D, ex A. per D, extendatur recta A D F, a & ſit D E. æqualis ipſi A D: ducaturque recta B E. Quoniam igitur latera A D, D C, trianguli A D C, æqualia ſunt lateribus E D, D B, trianguli E D B, vtrumque vtrique, per conſtructionem, b ſunt autem & anguli A D C, E D B, dictis comprehenſi lateribus æquales: c Erunt baſes A C, & B E, æquales, angulusq; A C D, angulo E B D, æqualis: Et quia angulus A C D, ponitur eſſe minor angulo A B C, erit & angulus E B D, minor eodem angulo A B C. Ideoque angulus A B E, per rectam B D, diuidetur in partes inæquales. Si igitur bifariam ſecetur per rectam B F, cadet B F, ſupra E D, eo quòd angulus A B D, maior ſit angulo EBD. Quia verò E F, d maior eſt quàm E D, & E D, poſita eſt æqualis ipſi A D, erit E F, maior quàm A D. e Sed adhuc A D, maior eſt quàm A F. Multò igitur maior erit E F, quàm A F. Itaque quia recta B F, diuidens angulum A B E, bifariam, ſecat baſin A E inæqualiter in F, eſtq; maius ſegmentum E F, minus autem A F; erit per theorema à Proclo proximè demonſtratum, latus B E, maius latere A B. Oſtenſum eſt autem B E, æquale eſſe lateri A C. Igitur & A C, latus latere A B, maius erit. Quod erat demonſtrandum.

a 3. pri.
b 15. pri.
c 4. pri.
d 19. pri.
e 19. prim.





SCHOLIVM.

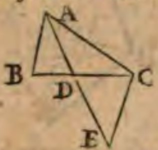
Hæc propoſitio 19. conuerſa eſt propoſitionis 18. vt perſpicuum eſt. Campanus autem duarum iſtarum propoſitionum ordinem prorſus inuertit, ita vt ea, quæ apud nos eſt 18. apud ipſum ſit 19. & contra. Quarum vtramque oſtendit ducendo ad id, quod fieri nequit, cùm tamen Euclides propoſitionem 18. directè & oſtenſiuè confirmauerit, vt ex dictis liquidò conſtat.

POTERIMVS quoque theorema à Proclo demonſtratum conuertere, hoc modo.

SI trianguli duo latera inæqualia fuerint, linea recta bifariam diuidens angulum ipſis contentum, ſecabit baſin in partes inæquales, maiuſque ſegmentum erit prope maius latus.

DVO latera A B, A C, trianguli A B C, ſint inæqualia; A C, maius, & A B, minus. Recta autem A D, diuidens angulum B A C,

*biſariam, ſecet baſin B C, in D. Dico ſegmentum D C, maius eſſe ſeg-
mento D B. Si enim non eſt maius, erit vel æquale, vel minus. Si di-*
a 3.pri. *catur eſſe æquale; producatur A D, ad E,* a *vt D E, æqualis ſit ipſ
D A, ducaturq; recta E C. Quoniam igitur latera A D, D B, æqua-
lia ſunt lateribus E D, D C, vtrumque vtrique; A D, videlicet ipſ
E D, per conſtructionem, & D B, ipſi D C, per hypotheſin aduerſarij*
b 15.pri. *Sunt autem &* b *anguli ad D, dictis lateribus contenti æquales:* c *e-*
c 4.pri. *rit baſis A B, baſi E C, æqualis & angulo B A D, angulus C E D.
Poſitus autem eſt & angulo B A D, angulus C A D, æqualis. Igitu*
d 6.pri.



& anguli C E D, C A D, æquales erunt. d *Ideoq;
latus A C, lateri E C, æquale. Cùm igitur oſten-
ſum ſit, lateri E C, æquale eſſe quoq; latus A B*
e 1.pron *e erunt latera A C, A B, æqualia; quod eſt abſur-
dum, quia A C, maius ponebatur, quam A B. N
erit igitur ſegmentum D C, ſegmento D B, æquale.
Quod ſi D C, dicatur eſſe minus, & D B, maius; erit per theorema
Procli, latus A B, maius latere A C. Ponebatur autem minus, quo
multò magis eſt abſurdum. Non igitur minus erit D C, quàm D B.
Quare erit neceſſariò maius.*

EODEM modo demonſtrari poterit hoc theorema.

SI trianguli angulum recta linea bifariam diuidens, baſin bifariam quoque ſecet, erunt duo latera angulum continentia inter ſe æqualia: Quod ſi latera æqualia fuerint, baſin etiam bifariam ſecabit linea recta, quæ angulum bifariam diuidit.

*PRIMVM recta A D, ſecans angulum B A C, biſariam diui-
dat quoque baſin B C, in D, biſariam. Dico latera A B, A C, inter ſe
æqualia eſſe. Hoc autem demonſtrabimus eadem ratione, qua in præ-
cedenti theoremate oſtenſum fuit, latus A C, æquale eſſe lateri A B,*



*ſi D C, ſegmentum ſegmento D B, æquale ponatur,
dummodò figuram eodem modo conſtruas. Cùm e-
nim latera A D, D B, æqualia ſint lateribus E D,*
f 15 pri. *D C,* f *& anguli ad D, dictis lateribus contenti
æquales;* g *erunt baſes A B, E C, æquales, & an-*
g 4.pri.
h 6.pri. *gulus C E D, angulo B A D, hoc eſt, angulo C A D,
æqualis. Quare* h *A C, æquale erit ipſi E C, hoc eſt, ipſi A B.*

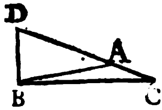
*DEINDE ſint latera A B, A C, æqualia, & recta A D, ſe-
cans baſin B C, in D, diuidat angulum B A C, biſariam. Dico ſeg-
mentum D C, æquale eſſe ſegmento D B. Cùm enim latera A D, A B,*
i 4.pri. *æqualia ſint lateribus, A D, A C, vtrumque vtrique, & anguli quo-
que ad A, contenti dictis lateribus æquales per hypotheſim,* i *erunt
baſes B D, D C, æquales.*

THEOR.

Digitized by Google

THEOR. 13. PROPOS. 20. xx.

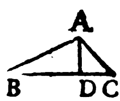
OMNIS trianguli duo latera reliquo ſunt maiora, quomodocunque aſſumpta.



SIT triangulum A B C. Dico quælibet eius duo latera, nempe A B, A C, ſimul maiora eſſe reliquo latere B C. Producatur vnum ex illis, ut C A, vſque ad D, a ſitque recta A D, æqualis alteri lateri non producto A B, & ducatur recta D B. a 3. pri. Quoniam igitur duo latera A B, A D, æqualia inter ſe ſunt, per conſtructionem, b erunt anguli A B D, A D B, æquales inter ſe: b 5. pri. Eſt autem angulo A B D, c maior angulus C B D. c 9. pron. Igitur & angulus C B D, maior erit angulo A D B. In triangulo ergo C B D, latus C D, oppoſitum maiori angulo C D B, d maius d 19. pri. erit latere B C, quod minori angulo C D B, opponitur. Cùm igitur duo latera A B, A C, ſimul æqualia ſint ipſi C D, (ſi enim æqualibus A B, A D, commune addatur A C, e fient tota æqualia; e 2. pron. nimirum linea compoſita ex A B, A C, & linea compoſita ex A D, A C) erunt quoque latera A B, A C, ſimul maiora latere B C. Eodem modo demonſtrabitur, quælibet alia duo latera maiora eſſe reliquo. Quare omnis trianguli duo latera reliquo ſunt maiora, &c. Quod demonſtrandum erat.

EX PROCLO.

ALITER hoc theorema à familiaribus Heronis, & Porphyrij, demonſtratur, nullo latere producto, hac ratione. Sit probandum duo latera A B, A C, trianguli A B C, maiora eſſe latere B C. Diuidatur angulus B A C, illis lateribus contentus f *biſariam per rectam A D.* f 9. pri *Quoniam igitur trianguli C D A, latus C D, protractum eſt ad B,* g *erit angulus externus B D A, maior interno & oppoſito C A D.* g 16. pri. *Igitur & maior angulo B A D Quare in triangulo A B D, latus A B, maiori angulo A D B, oppoſitum* h *maius erit latere B D, quod minori angulo B A D, opponitur.* h 19. pri. *Eadem ratione oſtendetur, latus A C, maius eſſe quàm C D, quia angulus C D A,* i *maior eſt angulo B A D, hoc eſt, angulo C A D, &c.* i 16. pri. *Quamobrem duo latera A B, A C, maiora erunt latere B C. Eademq́; eſt ratio quorumcunque duorum laterum, ſi angulus ipſis comprehenſus biſariam ſecetur.*

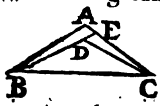


THEOR. 14. PROPOS. 21. xxj.

SI ſuper trianguli vno latere, ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius conſtitutæ fuerint; hæ conſtitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maiorem verò angulum continebunt.

Digitized by Google

IN triangulo A B C, ſuper extremitates B, & C, lateris B C, intra triangulum conſtituantur duæ rectæ lineæ B D, C D, in



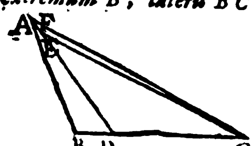
puncto D, concurrentes. Dico B D, C D, ſimul minores eſſe duobus lateribus B A, C A, ſimul; At verò angulum B D C, maiorem angulo BAC. Producatur enim altera linearum interiorum, nempe B D, ad punctum E, lateris C A. Quoniam igitur in trian-
a 20.pri. gulo B A E, duo latera B A, A E, *a* maiora ſunt latere B E, ſi ad-
b 4.pro. datur commune E C, *b* erunt B A, A C, maiora quàm BE, E C.
c 20.pri Rurſus quia in triangulo C E D, duo latera C E, E D, *c* maiora
d 4.pron ſunt latere C D; ſi commune apponatur D B, *d* erunt C E, E B, maiora quàm C D, D B. Oſtenſum iam verò fuit, A B, C A, maiora eſſe quàm B E, E C. Multò igitur maiora erunt B A, C A, quàm B D, C D, quod primò proponebatur. Præterea, quoniam
e 16.pri. angulus B D C, *e* maior eſt angulo D E C, externus interno; & angulus D E C, angulo B A C, maior quoque eſt, eandem ob cauſam: Erit angulus B D C, multò maior angulo B A C; quod ſecundò proponebatur. Si igitur ſuper trianguli vno latere, ab extremitatibus, &c. Quod erat oſtendendum.

S C H O L I V M.

QVAM rectè Euclides dixerit, duas illas lineas intra triangulum conſtitutas, duci debere ab extremitatibus vnius lateris, apertè intelligi poteſt ex eo, quod mox ex Proclo demonſtrabimus; in triangulis videlicet rectangulis, vel etiam amblygonijs, intra triangulum conſtitui poſſe duas lineas ſuper vnum latus circa angulum rectum, vel obtuſum, quarum quidem vna ab extremitate dicti lateris, altera verò à quouis puncto prope aliud extremum lateris eiuſdem educitur, quæ maiores ſint reliquis duobus trianguli lateribus. Item in triangulis ſcalenis eodem modo ſuper maximum latus duas rectas intra triangulum conſtitui poſſe, quæ minorē comprehendant angulum, &c.

E X P R O C L O.

SIT triangulum habens exempli gratia angulum A B C, obtuſum. Dico ab extremo C, & à quouis puncto, nempe à D, prope aliud extremum B, lateris B C, duci poſſe duas lineas intra triangulum



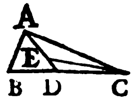
ad aliquod punctum, quæ maiores ſint duobus lateribus B A, A C. Ducatur enim recta D A: Et quoniam in triangulo A B D, duo anguli A B D, A D B,
f 16.pri. f *minores ſunt duobus rectis. Ponitur autem A B D, maior recto, nempe obtuſus; erit A D B, minor recto,*
g 19.pri *ideoque minor angulo A B D. Quare latus A D,* g *maius erit late-*
h 3 pri. *re A B. Ex D A,* h *abſcindatur recta D E, æqualis rectæ A B. Et reli-*
i 10.pri. *liqua linea A E,* i *bifariã diuidatur in F. Si igitur ab extremo C, ad*

F, re-

F, ſecta ducatur C F, erunt duæ lineæ rectæ conſtitutæ C F, D F, intra triangulum maiores duobus lateribus B A, A C. Quoniã enim in triangulo A F C, duo latera A F, F C, a *maiora ſunt latere A C. Eſt autem recta A F, ipſi F E, æqualis, per conſtructionẽ; erunt C F, F E, maiores quoque latere C A. Si igitur æqualia addantur E D, & A B, fient rectæ C F, F D,* b *maiores lateribus C A, A B. Quod eſt propoſitum. Quod ſi ad F, ex B, extremo recta duceretur, eſſent duæ rectæ conſtitutæ C F, B F, minores duobus laterib. C A, A B, vt Euclides demonſtrauit.*

a 20. primi.
b 4. pronun.

RVRSVS ſit triangulum ſcalenum A B C, cuius latus maximum B C, minimum A B. Ex B C, c *auferatur B D, æqualis rectæ A B, & ducatur A D, recta, ad cuius punctum quodlibet, vt ad E, ab extremo C, recta ducatur C E. Conſtitutæ igitur erunt intra triangulum duæ lineæ C E, D E, quæ minorem angulum comprehendunt eo, quem efficiunt duo latera A B, A C. Cum enim duo latera B A, B D, æqualia ſint,* d *erunt duo anguli B A D, B D A, æquales: Sed B D A, angulus* e *maior eſt angulo C E D. Maior igitur erit & angulus B A D, angulo C E D. Quare multo maior erit totus angulus B A C, angulo C E D. Quod eſt propoſitum. Rectè igitur Euclides monuit, duas lineas intra triangulum conſtitutas educi debere, ab extremis punctis vnius lateris, vt minores quidem ſint duobus reliquis trianguli lateribus, maiorem verò complectantur angulum. Alias enim propoſitio vera non eſſet, vt iam eſt demonſtratum.*



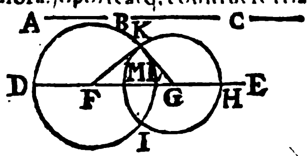
c 3. primi.
d 5. primi.
e 16. primi.

VERVM de conſtitutione duarum linearum intra triangulum, quæ maiores ſint, vel æquales duobus lateribus, plura oſtendemus ex Pappo ad propoſ. 34. huius lib.

PROBL. 8. PROPOS. 22. xxij.

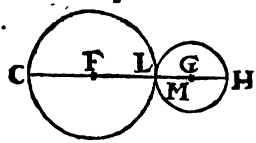
EX tribus rectis lineis, quæ ſint tribus datis rectis lineis æquales, triangulum conſtituere. Oportet autem duas reliqua eſſe maiores omnifariam ſumptas: quoniam vniuſcuiuſque trianguli duo latera omnifariam ſumpta reliquo ſunt maiora.

TRES lineæ rectæ datæ ſint A, B, & C, quarum quælibet duæ reliqua ſint maiores, (Alias ex ipſis non poſſet conſtitui triangulum, vt conſtat ex propoſ. 20. in qua oſtenſum fuit, duo quæuis latera trianguli reliquo eſſe maiora.) oporteatq; conſtruere triangulum habens tria latera tribus datis lineis æqualia. Ex aſſumpta recta quauis D E, infinitæ magnitudinis f abſcindatur recta D F, æqualis rectæ A. Et ex reliqua F E, recta F G,

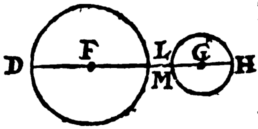


f 3. primi.

æqualis rectæ B; & ex reliqua G E, recta G H, æqualis recta
Deinde centro F, interuallo verò F D, circulus deſcribatur D
Item centro G, interuallo autem G H, alius circulus deſcriba
H I K, qui neceſſario priorem ſecabit in punctis I, & K, (cu
enim duæ F D, G H, maiores ponantur recta F G; ſi ex F E, ſum
tur recta F L, æqualis ipſi F D: & ex G D, recta G M, æqualis i
G H, cadet punctum M, inter L, & D. Si namque M, caderet



L, punctum, eſſent G L, F L, hoc e
G H, & F D, æquales rectæ F G, Si v
rò M, caderet inter G, & L, eſſent e
dem duæ F L, G M, hoc eſt, D F, G H
minores recta F G, quorum vtrun
que eſt contra hypotheſin. Id quod
appoſitis figuris apparet) ex quorum quolibet, nimirum ex K



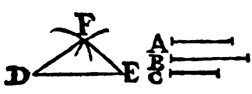
ducantur ad puncta, F, G, rectæ K
K G, factumq; erit triangulum F G K
cuius latera dico æqualia eſſe dat
rectis A, B, & C. Cum enim recta F K
a æqualis ſit rectæ F D, & recta A, pe
conſtructionem eidem F D, æqualis

a 15. defin.
b 1. pronun.

b erit latus F K, rectæ A, æquale. Rurſus quia G K, æqualis eſt ip
G H, & recta C, eidem G H; erit quoque latus G K, rectæ C
æquale: Poſitum autem fuit per conſtructionem, reliquum la
tus F G, reliquæ rectæ B, æquale. Omnia igitur tria latera F K
F G, G K, tribus datis rectis A, B, C, æqualia ſunt. Conſtituimus
ergo ex tribus rectis lineis, quæ ſunt tribus datis rectis lineis
æquales, triangulum: Quod faciendum erat.

PRAXIS.

SVMATVR recta D E, æqualis cuicunque rectarum datarum, nempe ipſi B, quam nunc volumus eſſe baſin. Deinde ex D, ad interuallum rectæ A, arcus deſcribatur: Item ex E, ad interuallum rectæ C, alter arcus ſecans priorem in F. Si igitur ducantur rectæ D F, E F, factum erit triangulum habens tria latera æqualia tribus datis lineis. Erit enim latus D F, æquale rectæ A, propter interuallum ipſius A, aſſumptum: & latus E F, ipſi C, propter aſſumptum interuallum C: D E, verò latus, acceptum eſt rectæ B, æquale, ab initio.



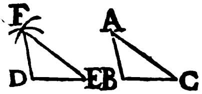
SCHOLIVM.

HAC arte cuicunque triangulo propoſito alterum prorſus æquale & quoad latera, anguloſq; & quoad aream ipſius, conſtituemus. Sit namque triangulum quodcunque A B C, cui æquale omni ex

parte

Digitized by Google

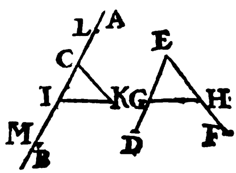
primò conſtruendum. Intelligo eius latera, tanquam tres lineas rectas datas A B, B C, C A, quarum qualibet duæ maiores ſunt reliqua. Deinde ſumo rectam D E, æqualem uni Lateri, nempe B C; & ex D, interuallo lateris A B, arcum deſcribo, item alium ex E, interuallo reliqui lateris C A, qui priorem ſecet in F, &c. a 20. primi.



PROBL. 9. PROPOS. 23. xxiij.

AD datam rectam lineam, datumq; in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum conſtituere.

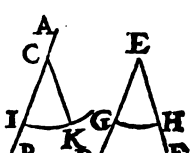
DATA recta ſit A B, datumque in ea punctum C, & datus angulus D E F. Oportet igitur ad rectam A B, in puncto C, angulum conſtituere æqualem angulo E. Sumantur in rectis E D, E F, duo puncta vtcunque G, H, quæ recta G H, connectantur: Deinde *b* conſtituatur triangulum C I K, habens tria latera æqualia b 22. primi. tribus rectis E G, G H, H E, ita vt C I, æquale ſit ipſi E G; & C K, ipſi E H; & I K, ipſi G H. (Quod facile fiet, ſi C I, ſumatur æqualis ipſi E G, & C L, ipſi E H, & I M, ipſi G H. Deinde ex centris C, & I, interuallis verò C L, & I M, circuli deſcribantur



ſecantes ſeſe in K, &c.) Dico angulum C, æqualem eſſe angulo E. Quoniam enim duo latera C I, C K, æqualia ſunt duobus lateribus E G, E H, vtrumque vtrique, & baſis I K, baſi G H, per conſtructionem; *c* erit angulus C, angulo E, æqualis: Effecimus igitur angulum ad C, æqualem angulo F, &c. Quod facere oportebat. c 8. primi.

PRAXIS.

NON differt huius problematis praxis ab illa, quam in præcedente problemate tradidimus; propterea quod triangulum conſtituere oportet æquale alteri triangulo, vt angulus dato angulo æqualis exhibeatur, vt perſpicuum eſt. Facilius tamen hac arte problema efficies. Sit linea data A B, punctumque in ea C, & angulus datus E. Centro igitur E, & interuallo quouis arcus deſcribatur G H: Eodemque interuallo ex centro C, arcus deſcribatur I K, ſumaturque beneficio circini arcus I K, arcui G H, æqualis. Recta enim ducta C K, faciet angulum ad C,



æqualem

Digitized by Google

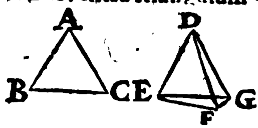
æqualem angulo E. Nam ſi ducerentur rectæ I K, G H, eſſent ipſæ æquales, propterea quod circino non variato vtramq; diſtantiam I K, G H, accepimus. Cum ergo & duo latera I C, C K, æqualia ſint duobus G E, E H, ob æqualia interualla, quibus arcus ſunt deſcripti;
a 8. primi. *a erunt anguli I C K, G E H, æquales.*

CÆTERVM qua ratione ex puncto extra datam rectam propoſito recta duci poſſit, quæ cum data recta angulum conſtituat dato angulo rectilineo æqualem, docebimus ad propoſ. 31. huius lib.

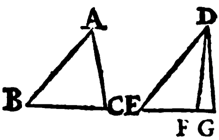
xxiiij. THEOR. 15. PROPOS. 24.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, angulum verò angulo maiorem ſub æqualibus rectis lineis contentum; Et baſin baſi maiorem habebunt.

DVO latera A B, A C, trianguli A B C, æqualia ſint duobus lateribus D E, D F, vtrumq; vtrique, nempe A B, ipſi D E, & A C, ipſi D F; Angulus verò A, maior ſi angulo E D F. Dico baſin B C, maiorem eſſe baſe E F. Ad lineam enim D E, ad eiuſque punctum
b 23. primi. D, *b* conſtituatur angulus E D G, æqualis angulo A; (cadetque recta D G, extra triangulum D E F, cum angulus E D F, minor po-
c 3. pri. natur angulo A) *c* ponaturque D G, æqualis ipſi D F, hoc eſt, ipſi A C. Ducta deinde recta E G, cadet ea aut ſupra rectam E F; aut in ipſam, aut infra ipſam. Cadat primum ſupra E F,



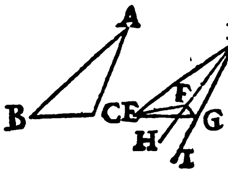
ducaturque recta F G. Quia ergo latera A B, A C, æqualia ſunt lateribus D E, D G, vtrumque vtrique, & angulus A, æqualis angu-
d 4. primi. lo E D G, per conſtructionem: *d* Erit baſis B C, baſi E G, æqualis. Rurſus quia duo latera D F, D G, inter ſe ſunt æqualia; *e* erunt
e 5 pri. anguli D F G, D G F, æquales: Eſt autem angulus D G F, *f* maior
f 9. pronun. angulo E G F. Igitur & angulus D F G, eodem angulo E G F, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus E F G, eodem an-
g 19. primi. gulo E G F. In triangulo igitur E F G, *g* maius erit latus E G, latere E F. Eſt autem oſtenſum E G, æquale eſſe ipſi B C. Maior igitur erit quoq; B C, quam E F. Quod eſt propoſitum.



CADAT deinde E G, in ipſam E F.
h 4. pri. Et quia rurſus, vt prius baſis E G, *h* æ-
i 9. pronun. qualis eſt baſi B C: & E G, *i* maior quam E F, quod eſt propoſitum.

CADAT tertio E G, infra E F, producanturque rectæ D F, D G, vſque ad H, & I, & ducatur recta F G. Erit autem rurſus, vt
k 4. pri. prius *k* baſis E G, baſi B C, æqualis. Deinde quia duo latera D F, D G, æqua-

D G, æqualia ſunt inter ſe, per con-
ſtructionem, a erunt anguli G F H, a 5. pri.
F G I, infra baſin F G, æquales: Eſt au-
tem angulus F G I, b maior angulo b 9. pro-
F G E. Igitur & angulus G F H, eodem nun.
angulo F G E, maior erit. Quare mul-
to maior erit totus angulus E F G, eo-



dem angulo F G E. In triangulo ergo E F G, c maius erit latus E G, c 19. pri-
latere E F. Eſt autem oſtenſum E G, æquale eſſe ipſi B C. Maior mi.
igitur erit quoque B C, baſis baſi E F. Si igitur duo triangula duo
latera duobus lateribus, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

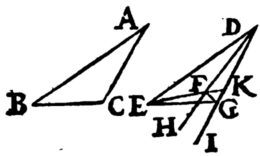
SI quis fortè roget, cur in 4. propoſitione Euclides ex eo, quod duo latera vnius trianguli æqualia ſint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumque vtrique, & anguli contenti dictis lateribus æquales, concluſerit non ſolum æqualitatem baſium, verùm etiam triangulorum, & reliquorum angulorum; hic autem ex eo, quod duo latera vnius trianguli æqualia ſint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumque vtrique, anguli verò lateribus illis comprehenſi inæquales, colligat tantùm inæqualitatem baſium, non autem triangulorum, & reliquorum angulorum: Huic reſpondendum eſt, neceſſario id ab Euclide peritiſſimo Geometra eſſe factum. Nam ex antecedente huius theorematis ſemper conſequitur baſium inæqualitas, ita vt baſis illius trianguli, cuius angulus contentus lateribus aſſumptis eſt maior, ſuperet baſim alterius, cuius angulus minor exiſtit, vt demonſtratum eſt; non autem neceſſe eſt, triangulum illud maius hoc eſſe. Vt enim clariſſime ex Proclo demonſtrabimus ad propoſ. 37. huius primi libri, Triangulum maiorem habens angulum aliquando æquale eſt triangulo minorem habenti angulum, aliquando verò minus eodem, & aliquando maius. Non igitur potuit in vniuerſum inferri, ex eo, quod angulus vnius trianguli maior eſt angulo alterius, triangulum etiam maius eſſe, cum modò æquale ſit, modo minus, & modo maius. Idem dici poteſt de angulis reliquis. Nam in prima figura huius theorematis angulus A B C, minor eſt ſemper angulo D E F; cum angulus D E G, (qui æqualis eſt per 4. propoſ. angulo A B C,) d *minor ſit* d 9. pro-
eodem angulo D E F, pars toto. In ſecunda autem figura, exiſtit qui- nun.
dem angulus A B C, angulo D E F, æqualis, per 4. propoſ. At verò an-
gulus A C B, minor eſt angulo D F E, cum angulus D F E, e *maior* e 16.
ſit angulo D G F, externus interno, & oppoſito; & angulus D G F, æqualis ſit angulo A C B. In tertia denique figura angulus A B C, maior quidem eſt angulo D E F, propterea quod angulus D E G,
(æqualis exiſtens per 4. propoſ. angulo A B C,) f *maior eſt eodem an-* f 9. pro-
gulo D E F, totum parte. Sed angulus A C B, minor eſt angulo D F E. nun.

Nam ſi

Digitized by Google

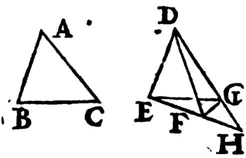
Nam ſi recta E F, producatur ſecans rectam D G, in K, fiet angulus D F E, a *maior angulo D K E, externus interno; Eſt autem & angulus D K E, maior adhuc angulo D G E, externus quoque interno, & oppoſito. Multo igitur maior erit angulus D F E, angulo D G E, qui per 4. propoſ. æqualis eſt angulo A C B. Quod etiam conſtat ex 2. parte propoſ. 21. Nam interiores lineæ D F, E F, continent angulum maiorem angulo D G E, quem exteriores lineæ D G, E G, continent. Quare neque certi quicquam colligi potuit de inæqualitate reliquorum angulorum, cum modo vnus altero ſit maior, modo minor, & modo æqualis.*

a 16. primi.



b 17 primi.

QVONIAM verò in triangulo D E F, duo anguli E, F, b *ſemper minores ſunt duobus rectis, erit neceſſario ſaltem alter eorum acutus. Si igitur ad partes acuti anguli (vt in 1. figura ad partes anguli D F E, in 2. verò & 3. ad partes anguli D E F.) fiat angulus E D G, æqualis angulo A, & reliqua fiant, vt in propoſ. dictum eſt, cadet ſemper ducta recta E G, ſupra punctum F. Nam cum angulus D F E, acutus ſit,* c *erit ei deinceps, producto latere E F, obtuſus. Producta ergo recta D G, ſecante latus E F, productum in H,* d *maior erit recta D H, latere D F, cum opponatur angulo obtuſo in triangulo D F G; ac proinde recta E G, auferens D G, æqualem ipſi D F, cadet neceſſario ſupra F. Si namque vel per F, tranſiret, vel infra caderet, abſcinderet ex D G, maiorem lineam latere D F; nimirum vel D H, vel maiorem, quam D H. Hoc ſi obſeruetur, ſatis erit primus caſus propoſitionis, quæ fortaſſis cauſa fuit, vt Euclides apud Theonem primo caſu contentus fuerit.*



c 13. primi.

d 19. primi.

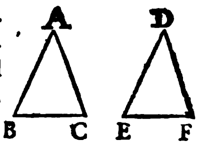
XXV.

THEOR. 16. PROPOS. 25.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, baſin verò baſi maiorem: Et angulum ſub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt.

DVO latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia ſint duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF, vtrumque vtrique, hoc eſt, AB, ipſi DE, & AC, ipſi DF; Baſis autem BC, maior ſit

ſior ſit baſe E F. Dico angulum A, maiorem eſſe angulo D. Si enim non eſt angulus A, maior angulo D, erit vel æqualis, vel minor. Si dicatur eſſe æqualis, cum etiam duo latera circa A, æqualia ſint duobus circa D, vtrumque vtrique, per hypotheſin; *a* erit & baſis B C, æqualis baſi B F; quod eſt abſurdum; a 4. *pri.*

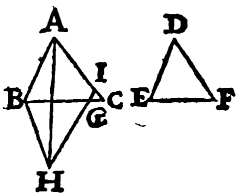


Ponitur enim baſis B C, baſe E F, maior: Si verò angulus A, dicatur eſſe minor angulo D; erit, propter æqualitatem laterum circa iſtos angulos, baſis E F, *b* maior baſe B C; quod magis eſt abſurdum, cum E F, ponatur eſſe minor quam B C. Quare angulus A, cum neque poſſit æqualis eſſe angulo D, neque minor, erit maior. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, &c. Quod erat oſtendendum. b 24 *pri mi.*

SCHOLIVM.

THEOREMA hoc conuerſum eſt præcedentis. In eo enim ex maiori angulo demonſtratum eſt, baſin illi reſpondentem eſſe maiorem: In hoc autem ex maiori baſi oſtenſum fuit, angulum illi reſpondentem maiorem eſſe. Differunt autem plurimum hæc duo theoremata, nempe vigeſimum quartum, & vigeſimum quintum, ab illis, quæ explicata ſunt propoſition. decima octaua, & decima nona. Nam in decima nona demonſtratum eſt, in vno eodemque triangulo maiori angulo maius latus reſpondere: At in vigeſima quarta, idem oſtenſum fuit in duobus diuerſis triangulis, quorum duo latera vnius æqualia ſunt duobus lateribus alterius &c. Idemque diſcrimen reperies inter propoſitiones decimam octauam, & vigeſimam quintam.

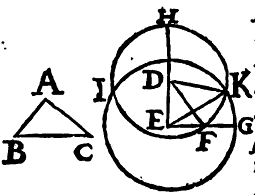
MENELAVS Alexandrinus, vt ait Proclus, demonſtrat hoc idem theorema oſtenſiue, hac ratione. Poſitis eiſdem triangulis, ex baſe maiore B C, c *abſcindatur recta B G, æqualis baſi minori E F. Fiat quoque angulus G B H,* d *æqualis angulo D E F,* e *& ſit B H, æqualis ipſi B A, atque adeo ipſi D E. Ducta autem recta linea A H, ducatur quoque recta per G, ex H, ſecans A C, in I. Quoniam igitur duo latera B A, B H, æqualia ſunt,* f *erunt anguli B A H, B H A, æquales. Rurſus quia latera B G, B H, æqualia ſunt lateribus E F, E D, vtrumque vtrique, & angulus G B H, æqualis,* c 3. *pri.* d 23. *pri mi.* e 3. *pri.* f 5. *pri.*



angulo

a 4.pri- *angulo D E F, per conſtructionem: a erit baſis H G, baſi D F, atq; adeo*
mi. *eo ipſi A C, æqualis, anguluſq; G H B, angulo E D F. Et quoniam re-*
b 9.pro- *cta H I, b maior eſt quam H G, quæ eſt oſtenſa æqualis ipſi A C, erit*
nun. *quoque maior H I, quam A C: Sed A C, c maior eſt adhuc, quam*
c 9 pro- *A I. Multo ergo maior erit H I, quam A I. Quare angulus I A H,*
nun. *d maior erit angulo I H A. Additis igitur duobus angulis B A H,*
d 18.pri. *B H A, qui oſtenſi ſunt æquales, fiet e totus angulus B A C, toto angu-*
e 4.pro- *lo B H G, maior: Sed angulus B H G, demonſtratus fuit æqualis an-*
nun. *gulo D. Maior igitur etiam erit angulus B A C, angulo D, quod erat*
propoſitum. Quod ſi quando contingat, rectam A H, cadere extra
triangulum, auferendi erunt anguli æquales B A H, B H A, &c. vt
reliquus fiat angulus B A C, maior reliquo angulo B H G. Quando
autem recta A H, per punctum B, tranſit, nihil addendum erit, aut
demendum, vt perſpicuum eſt.

HERON autem idem ex eodem Proclo hoc modo demonſtrat. Po-
ſitis eiſdem triangulis, producatur baſis minor E F, ad G, vt ſit E G,
f 3.pri. *f æqualis baſi maiori B C. Deinde centro D, interuallo autem D F, de-*



ſcribatur circulus, producaturq; E D, ad
H, in circumferentiam. Quoniam igitur
g 15 de- *D H, g eſt æqualis ipſi D F, erit quoque*
fin. *D H, æqualis ipſi A C. Additis igitur*
h 2.pro- *æqualibus D E, A B, h fient A C, A B,*
nun. *ſimul æquales toti H E: Sed A C, A B,*
i 20.pri- *i ſimul maiores ſunt, quam B C, atque*
mi. *adeo quam E G. Igitur & H E, maior*
erit, quam E G Quare circulus deſcriptus ex centro E, & interuallo
E G, interſecabit rectam E H, atque adeo circumferentiam prioris cir-
culi in I, & K, punctis: ad K, autem ducantur rectæ D K, E K. Et
quoniam duo latera A B, A C, æqualia ſunt duobus lateribus D E,
D K, vtrumque vtrique, (eſt enim D K, æquale ipſi D F, per defini-
tionem circuli: D F, autem poſitum eſt æquale lateri A C.) & ba-
ſis B C, baſi E K, æqualis: (cum E K, æqualis ſit ipſi E G, per defini-
tionem circuli: E G, verò recta per conſtructionem facta ſit æqualis
k 8.pri. *baſi B C.) k Erit angulus B A C, angulo E D K, æqualis: Sed angu-*
l 9.pro- *lus E D K, maior eſt l angulo E D F. Quare & angulus A, anguli*
nun. *E D F, maior exiſtet. Quod eſt propoſitum. Atque hæc demonſtratio*
generalior eſt priore, cum omnibus caſibus conueniat.

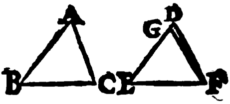
THEOR. 17. PROPOS. 26.

xxvj. SI duo triangula duos angulos duobus angulis æqua-
les habuerint, vtrumque vtrique, vnumque latus vni la-
teri æquale, ſiue quod æqualibus adiacet angulis, ſeu
quod vni æqualium angulorum ſubtenditur: & reliqua
latera

Digitized by Google

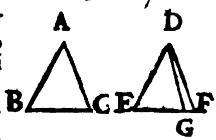
latera reliquis lateribus æqualia, vtrumque vtrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

SINT duo anguli B, & C, trianguli A B C, æquales duobus
angulis E, & E F D, trianguli D E F, vterque vtrique, hoc eſt, B,
ipſi E, & C, ipſi E F D; Sitque primo latus B C, quod angulis B, &
C adiacet, lateri E F, quod angulis E, & E F D, adiacet, æquale. Di-
co, reliqua quoque latera A B, A C, reliquis lateribus D E, D F,
æqualia eſſe, vtrumque vtrique, hoc eſt, A B, ipſi D E, & A C, ipſi
D F, ea nimirum, quæ æqualibus angulis ſubtendũtur; reliquum-
que angulum A, reliquo angulo D. Si enim latus A B, non eſt
æquale lateri D E, ſit D E, maius, à quo
a abſcindatur recta linea E G, æqualis — a 3. pri.
rectæ lineæ A B, ducaturque recta G F.
Quoniam igitur latera A B, B C, æqua-



lia ſunt lateribus G E, E F, vtrumque vtrique, & anguli B, & E,
æquales per hypotheſin: *b* Erit angulus C, æqualis angulo E F G. — b 4. pri.
Ponitur autem angulus C, æqualis angulo E F D. Quare & angu-
lus E F G, eidem angulo E F D, æqualis erit, pars toti; Quod eſt
abſurdum. Non eſt igitur latus A B, inæquale lateri D E, ſed æqua-
le. Quamobrem, cum latera A B, B C, æqualia ſint lateribus D E,
E F, vtrumque vtrique, & anguli contenti B, & E, æquales; *c* erunt — c 4. pri.
& baſes A C, D F, & anguli reliqui A, & D, æquales. Quod eſt pro-
poſitum.

SINT deinde latera A B, D E, ſubtendentia æquales angulos
C, & E F D, inter ſe æqualia. Dico rurſus reliqua latera B C, C A,
reliquis lateribus E F, F D, eſſe æqualia, vtrumque vtrique, hoc
eſt, B C, ipſi E F, & C A, ipſi F D; reliquumque angulum A, reli-
quo angulo D, æqualem. Si enim latus B C, non eſt æquale lateri
E F, ſit E F, maius; *d* ex quo ſumatur recta E G, æqualis ipſi B C, — d 3. pri.
ducaturque recta D G. Quoniam igitur la-
tera A B, B C, æqualia ſunt lateribus D E,
E G, vtrumque vtrique, & anguli contenti
B, & E, æquales, per hypotheſin; *e* Erit an- — e 4. pri.
gulus C, angulo E G D, æqualis: Ponitur
autem angulus C, angulo E F D, æqualis;



Igitur & angulus E G D, angulo eidem E F D, æqualis erit, exter-
nus interno, & oppoſito, quod eſt abſurdum. *f* Eſt enim maior. — f 16. pri.
Non ergo eſt latus B C, lateri E F, inæquale. Quocirca, vt prius,
colligetur inſtitutum ex 4. propoſ. huius libri. Si duo igitur trian-
gula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, &c. Quod
demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex demonſtratione huius theorematis, tota etiam

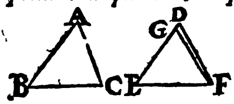
 triangula,

Digitized by Google

triangula, quoad areas, eſſe æqualia. Nam ſi latera A B, B C, lateribus D E F, æqualia ſint, vt oſtenſum fuit, contineantque ex hypotheſi angul
a 4.pri. æquales B, E, a erunt tota quoque triangula æqualia inter ſe.

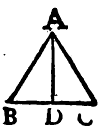
SCHOLIVM.

PRIOR huius theorematis pars conuerſa eſt 4. propoſition quoad eam partem, in qua ex æqualitate laterum, & angulor ipſis contentorum, collecta fuit æqualit baſium, & angulorum ſuper baſes. Nam priori parte huius theorematis ex æqualit te baſium B C, E F, & angulorum ſup has baſes, demonſtratum eſt, reliqua latera vnius trianguli reliqu lateribus æqualia eſſe, reliquumque angulum reliquo angulo, & Quod quidem alia nos ratione iam demonſtrauimus ad propoſiti nem octauam huius lib. quem modum eo loco monuimus.



HOC loco demonſtrandum eſt theorema quoddam admodu neceſſarium, & perutile rebus Geometricis, videlicet.

IN triangulo æquilatero, ſiue Iſoſcele, recta linea al angulo duobus lateribus æqualibus comprehenſo du cta, diuidenſque vel angulum, vel baſin bifariam, per pendicularis eſt ad baſim, & ſi quidem angulum bifa riam diuidat, ſecabit quoque baſin bifariam. Si verò ba ſim ſecet bifariam, diuidet quoque angulum bifariam Et contra; linea perpendicularis ad baſin ducta diuidit & baſin, & angulum bifariam.



SINT in triangulo A B C, duo latera æqualia A B A C, diuidatque primum recta A D, angulum A, bifariam. Dico rectam A D, eſſe ad B C, perpendicularem, ſecare que baſin B C, bifariam. Cum enim duo latera A B, A D, duobus lateribus A C, A D, ſint æqualia, anguloſque æqua-
b 4.pri. *les contineant, ex hypotheſi, b erunt & baſes B D, C D, æquales, & anguli ad D, atque adeo recti.*

DIVIDAT deinde recta A D, baſin B C, bifariam. Dico rectam A D, ad B C, perpendicularem eſſe, & angulum A, ſecare bifariam. Cum enim duo latera B D, D A, duobus lateribus C D, D A, æqua-
c 8.pri. *lia ſint, & baſis A B, baſi A C, ex hypotheſi, c erunt quoque anguli ad D, æquales, atque adeo recti, ac proinde ex coroll. propoſ. 8. huius lib. & anguli ad A, æquales erunt.*

SED iam recta A D, ſit ad B C, perpendicularis. Dico & baſim
d 5.pri. *B C, & angulum A, ſecare bifariam. d Erunt enim anguli B, C, ſupra baſin B C, æquales. Itaque quoniam duo anguli D, B, trianguli A B D, duobus angulis D, C, trianguli A C D, æquales ſunt, vterque*

vtrique

Vtrique, atq; A D, æqualibus oppoſitum angulis B, C, commune; a erunt reliqua latecta B D, C D, æqualia, & reliqui anguli ad A, æquales. quod erat demonſtrandum. a 26. primi.

SED & hoc theorema verum eſt.

TRIANGVLVM, in quo linea recta ab vno angulo ducta ad baſim perpendicularis diuidit vel baſim, vel angulum bifariam, habet duo latera dictum angulum comprehendentia æqualia: Et ſi quidem baſis ſecatur bifariam, angulus quoq; bifariam ſecabitur: ſi vero angulus bifariam ſecetur, baſis quoque diuidetur bifariam.

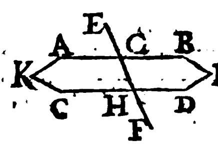
IN eodem triangulo A B C, ſit A D, ad B C, perpendicularis, diuidatq; primum baſin B C, bifariam. Dico & latera A B, A C, eſſe æqualia, & angulos ad A, æquales. Quoniam enim duo latera B D, D A, duobus lateribus C D, D A, æqualia ſunt, anguloſq; comprehendunt æquales, nempe rectos; b erunt quoque & baſes A B, A C, & anguli ad A, æquales. Quod eſt primum. b 4. primi.

SECET deinde perpendicularis A D, angulum A, bifariam. Dico & Tatera A B, A C, æqualia eſſe, & rectas B D, C D. Quoniam enim duo anguli D, A, trianguli A B D; duobus angulis D, A, trianguli A C D, æquales ſunt, latusq; A D, illis adiacens, cõmune; c erunt quoq; & latera A B, A C, & latera B D, C D, æqualia. Quod eſt ſecundum. c 26. primi.

THEOR. 18. PROPOS. 27. xxvij.

SI in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter ſe fecerit: parallelæ erunt inter ſe illæ rectæ lineæ.

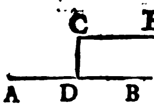
IN duas rectas A B, C D, incidens recta E F, faciat angulos alternatim A G H, D H G, inter ſe æquales. Dico lineas A B, C D, eſſe parallelas. Si enim non ſunt parallelæ, coibunt tandem, ſi producantur infinitè. Si namque non coirent vnquam, parallelæ eſſent, ex paralleleatum definitione. Conueniant ergo ad partes B, & D, in puncto I. Quoniam igitur triangulum eſt G I H, (cum A B, recta cõtinuata ſit, item recta C D, vſq; ad punctum I;) & angulus A G H, poſitus eſt æqualis angulo D H G; erit externus angulus A G H, æqualis interno, & oppoſito D H G, quod eſt abſurdum; d quoniã externus interno maior eſt. Quod ſi A B, C D, coire dicantur ad partes A, & C, in puncto K, erit rurſus eadem ratione angulus externus D H G, æqualis d 16. primi.



interno, & oppoſito A G H, quod eſt abſurdum. Non igitur coibunt lineæ A B, C D. Quare parallelæ erunt. Eodem modo, ſi ponantur anguli alterni B G H, C H G, æquales, demonſtrabitur, lineas A B, C D, eſſe parallelas. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

NECESSE eſt, vt lineæ, quæ dicuntur parallelæ, in eodem exiſtant plano, vt ex definitione conſtat: Quare non ſatis eſt, duos angulos alternos æquales inter ſe eſſe, vt duæ lineæ probentur eſſe parallelæ, niſi ponatur, eas in vno, eodemq́; exiſtere plano. Fieri enim poteſt, vt linea recta incidens in duas rectas non in eodem plano exiſtentes, faciat alternos angulos æquales.

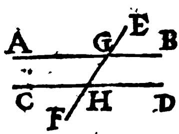


Sit enim C D, perpendicularis ad A B, rectam, quæ in ſubiecto plano exiſtit; & ex C, in alio plano, ad C D, ducatur alia perpendicularis C E, ita vt punctum E, intelligatur in ſublimi. Quo poſito, perſpicuum eſt, rectam C D, incidentem in rectas C E, A B, facere duos angulos E C D, A D C, alternos æquales, cum ſint recti; & tamen C E, A B, non ſunt parallelæ, quod non in eodem exiſtant plano. Non appoſuit autem Euclides in propoſitione hanc conditionem; in eodem plano exiſtentes: ſicut neque in ſubſequentibus; quoniam cum in prioribus ſex libris agatur de planis duntaxat, vt ſupra diximus, omnia intelligenda ſunt neceſſario in eodem plano exſiſtere. In vndecimo verò libro, & aliis, qui ipſum ſequuntur, monebit ſemper, lineas aliquas in eodem eſſe plano, vel in diuerſis planis, quia in illis libris diſſeritur de ſolidis; in quibus diuerſa plana conſiderari poſſunt. Quod idem dicendum eſt de punctis extra lineas, & ſuperficies, &c.

xxviij. THEOR. 19. PROPOS. 28.

SI in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulũ interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes, æqualem fecerit; Aut internos, & ad eaſdem partes duobus rectis æquales: Parallelæ erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.

IN duas rectas A B, C D, recta incidens E F, faciat primo externum angulum E G A, æqualem angulo interno, & oppoſito ad eaſdem partes G H C. Dico rectas A B, C D, eſſe parallelas.



a 15. *pri.* b 1. *pronun.* c 27. *primi.*

Quoniam enim angulo E G A, æqualis ponitur angulus G H C; & eidem angulo E G A, *a* æqualis eſt angulus H G B; *b* erunt anguli alterni G H C, H G B, æquales. Quare lineæ A B, C D, *c* parallelæ erũt. Idem oſtendetur, ſi angulus externus E G B, æqualis ponatur interno G H D.

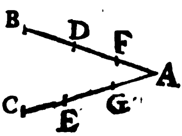
DEINDE

DEINDE faciat recta E F; angulos internos ex eadem parte, nempe A G H, C H G, duobus rectis æquales. Dico rurſus rectas A B, C D, eſſe parallelas. Quoniam enim anguli A G H, C H G, duobus rectis æquales ponuntur; Sunt autem & anguli A G E, A G H, duobus rectis æquales; Erunt duo anguli A G H, C H G, duobus angulis A G E, A G H, æquales. Ablato igitur communi angulo A G H, remanebit angulus A G E, externus angulo C H G, interno, & oppoſito ad eaſdem partes æqualis. Quare vt iam oſtenſum eſt, erunt rectæ A B, C D, parallelæ. Idem oſtendetur, ſi duo anguli B G H, D H G, duobus rectis ponantur æquales. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum, &c. Quod erat demonſtrandum. a 13. pri.

SCHOLIVM.

IAMDVDVM pronunciatum tertium decimum à Principiorum numero reiecimus. Cum igitur ſequens propoſ. 29. cum multis alijs illi ita innitatur, vt ſine eius auxilio demonſtrari nequeat, operæpretium erit illud hoc loco, ex hactenus demonſtratis theorematibus, atque problematibus, quæ ex eo nulla ratione dependent, Geometrica demonſtratione confirmare, vt in expoſitione dicti Axiomatis polliciti ſumus. Primo autem loco demonſtrationem Procli afferemus. Deinde idem nos pronunciatum magis accurate, atque euidentius demonſtrabimus. Proclus igitur, antequam illud demonſtret, duo præmittit. Primum eſt.

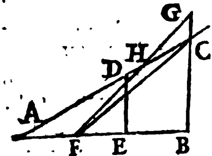
SI ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes infinitè producantur, ipſarum diſtantia omnem finitam magnitudinem excedet.



EXEANT à puncto A, duæ rectæ A B, A C, facientes angulum A. Quoniam igitur puncta D, & E, plus inter ſe diſtant, quam F, & G. Item puncta B, & C, plus quam D, & E, & ita deinceps, ſi producantur vltra rectæ lineæ A B, A C, perſpicuum eſt, extrema earum puncta infinito ſpatio inter ſe diſtare, ſi infinitè ipſæ producantur. Si enim non infinito ſpatio diſtarent, augeri poſſet eorum diſtantia; igitur & lineæ ipſæ vltra produci, quod eſt abſurdum, cum ponantur infinitè iam eſſe productæ. Quare ſi dictæ lineæ A B, A C, producantur infinitè, ipſarum diſtantia excedet omnem finitam diſtantiam. Hoc pronunciato vſus eſt & Ariſtoteles lib. 1. de cælo, vbi demonſtrauit, mundum non eſſe infinitum.

QVOD autem rectæ A B, A C, quo longius protrahantur, eo magis inter ſe diſtent, (Hoc enim Proclus ſine demonſtratione aſſumpſit, cum dixit puncta D, & E, in proxima figura plus inter ſe diſtare,

Digitized by Google

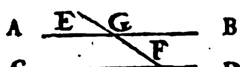


quam F, & G. Item B, & C, plus quam D, & E, &c.) hac ratione demonſtrabimus. Demittantur ex punctis C, D, vtcunque in recta A C, acceptis, ad A B, perpendiculares C B, D E, quæ diſtantias punctorum C, D, à recta A B, metientur, cum ſint minima omnium rectarum ex C, D, ad A B, ductarum, vt in coroll. propoſ. 19. oſtendimus. Dico C B, maiorem eſſe, quam D E; ac proinde plus diſtare rectam A C, à recta A B, in puncto C, remotiore, quam in puncto propinquiore D. Si enim C B, non eſt maior, quam D E, erit vel æqualis, vel minor: Sit primum æqualis & recta A E, abſcindatur æqualis F B, ita vt punctum F, cadat vel inter A, & E, vel in E, vel denique inter E, & B, ducaturq́; recta F C. Quoniam igitur duo latera A E, E D, trianguli A E D, duobus lateribus F B, B C, trianguli F B C, æqualia ſunt, vtrumque vtrique, anguloſq́; continent æquales, vtpote rectos:
a 4. pri. *a erunt & baſes A D, F C, & anguli D A E, C F B, inter ſe æquales: Igitur externus angulus C F B, interno D A E, æqualis erit,*
b 16 pri. *b quod eſt abſurdum. Vel cum externus angulus C F B, interno*
c 27 primi. *D A E, æqualis ſit, c parallelæ erunt A C, F C, quod etiam abſurdum eſt, cum in C, concurrant.*

SIT deinde C B, minor quam D E, ſi fieri poteſt, & producta B C, fiat B G, ipſi D E, æqualis, iungaturq́; recta F G. Quia igitur duo latera A E, E D, trianguli A E D, duobus lateribus F B, B G, æqualia ſunt, vtrumque vtrique, anguloſq́; continent æquales, puta rectos,
d 4. pri. *d erunt & baſes A D, F G, & anguli E A D, B F G, inter ſe æquales. Igitur externus angulus B F G, interno E A D, æqualis erit, quod eſt abſurdum. Vel cum externus angulus B F G, interno E A D, æqualis*
e 27. primi. *ſit, e erunt A C, F G, inter ſe parallelæ, quod abſurdum eſt, cum ſe mutuo ſecent in H. Quocirca B C, ipſa E D, maior erit, cum neque æqualis, neque minor eſſe poſſit, vt demonſtratum eſt.*

SECVNDVM, quod Proclus præmittit, huiuſmodi eſt.

SI duarum parallelarum rectarum linearum alteram ſecet quædam recta linea, reliquam quoque productam ſecabit.

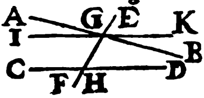


SINT duæ parallelæ A B, C D, & recta E F, ſecet ipſam A B, in G. Dico rectam E F, ſi producatur, ſecturam eſſe quoque ipſam C D. Quoniam duæ rectæ G B, G F, in puncto G, angulum faciunt, ſi producantur infinitè, excedent omnem finitam diſtantiam; igitur & diſtantiam, qua parallela A B, à parallela C D, diſtat, cum hæc diſtantia ſit finita, alias enim non eſſent lineæ parallelæ. Quare quando diſtantia G B, à G F, maior iam fuerit ea, quæ inter parallelas eſt, neceſſe eſt rectam G F, productam

ctam fuiſſe rectam C D. Nam quamdiu G F, continebitur inter duas parallelas, minori diſtantia à G B, remouebitur, quam C D, ab eadem G B, vt conſtat. His igitur ita expoſitis, facile demõſtrabitur hoc theorema, quod eſt apud Euclidem, tertium decimum pronunciatum.

SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad eaſdemq; partes, angulos duob. rectis minores faciat; Deillæ rectæ lineæ infinitè productæ ſibi mutuo incident ad eas partes, vbi ſunt anguli duob. rectis minores.

IN rectas A B, C D, incidens recta E F, faciat internos angulos ad partes B, & D, vt B G H, D H G, duobus rectis minores. Dico rectas A B, C D, coire ad eaſdem partes B, & D. Quoniam enim duo anguli B G H, D H G, minores ponuntur eſſe duobus rectis: Sunt autem duo anguli D H G, D H F, a duobus rectis æquales: Erunt duo anguli D H G, D H F, maiores duobus angulis D H G, B G H. a 13. pri.

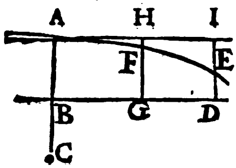


Ablato ergo communi angulo D H G, remanebit angulus D H F, b maior angulo B G H. Si igitur ad rectam F G, & ad punctum, G, c conſtituatur angulus K G H, æqualis angulo D H F, cadet G K ſupra G B, d ſecabitq; producta rectam A B. Quoniam igitur in duas rectas I K, C D, recta incidens E F, facit angulum externum D H F, æqualem interno, & oppoſito K G H. e Erunt rectæ I K, C D, parallelæ. Secat autem recta A B, ipſam I K, in G. Producta igitur ſecabit quoque ipſam C D, vt demonſtratum eſt. Quare A B, cum C D, conueniet ad partes B, & D, nimirum in puncto L. quod eſt propoſitum.

b 5. pronun.
c 23. primi.
d 11. pronun.
e 28. primi.

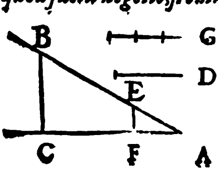
HAC ergo ratione conatur Proclus Axioma tertiumdecimum demonſtrare. Sed quoniam principium, quod primo loco præmiſit, æquè dubium, & obſcurum eſſe videtur, atq; illud Axioma, afferemus nos demonſtrationem magis accuratam, ſi prius doceamus, in quo difficultas, ſiue obſcuritas principij illius à Proclo aſſumpti conſiſtat. Quemadmodum igitur ex Procli, & aliorum Geometrarum ſententia, ſine demonſtratione concedendum non eſt, duas rectas, quæ ſemper ſibi mutuo ſiunt propinquiores, tandem aliquando concurrere, licet ſit veriſſimum, cuiuſmodi ſunt duæ rectæ, in quas recta incidens facit internos duos angulos ex eadem parte duobus rectis minores, quorum vnus rectus ſit, & alter acutus: Hæ enim ſibi mutuo appropinquant ad eas partes, vbi duo illi anguli duobus rectis minores exiſtunt, vt mox demonſtrabimus. Quemadmodum, inquam, concedendum hoc ſine probatione non eſt, propterea quod dari poſſunt in eodem plano duæ lineæ, vna recta, & altera inflexa, nimirum vel Hyperbole, vel linea conchoideos, ſibi ſemper mutuo magis ac magis appropinquantes, quæ tamen nunquam coeant, licet in infinitum ambæ producantur. quorum illud ab Apollonio Pergæo, hoc verò à Nicomede demonſtratum eſt: Ita quoque non videtur ſine demonſtratione ad-

mittendum eſſe, (quamquam verißimum ſit) duas rectas lineas angulum efficientes omnem finitam magnitudinem excedere, ſi in infinitum producantur ambæ, licet ſemper magis ac magis inter ſe diſtent, vt nos ſupra demonſtrauimus. Nam exhiberi poſſunt duæ lineæ in eodem plano angulum comprehendentes, recta vna, & altera inflexa, quæ conchoideos appellatur à Nicomede, ſemper magis ac magis inter ſe diſtantes, quarum tamen diſtantia datam quamcunque rectam lineam nunquam ſuperet, aut exæquet, licet ambæ extendantur in infinitum.



Data namque ſit recta A B. Dico deſcribi poſſe lineam rectam, & inflexam, quarum vna ab altera ſemper magis recedat, diſtantiam tamen earum nunquam æqualem eſſe rectæ A B, aut maiorem, quantumuis producantur ambæ. Producta enim recta A B, quantumlibet vſque ad C, ducatur per B, ad A C, perpendicularis B D; & polo C, interuallo autem A B, deſcribatur linea conchoideos A E, inflexa nimirum linea, quæ rectæ B D, fiat quidem ſemper propinquior, nunquam tamen cum ea conueniat, vt à Nicomede traditur. Deinde per
a 28.primi. *A, excitetur recta A I, ad A C, perpendicularis, a quæ ipſi B D, parallela erit. Poſtremo ex duobus punctis H I, vtcunque in recta A I, acceptis demittantur ad B D, perpendiculares H G, I D,* b 28 primi. *b quæ parallelæ,* c 34.primi. *c atque adeo æquales inter ſe erunt, anguloſque* d 29.primi. *d conſtituent ad H, I, rectos. Admittantur enim nunc, vt propoſitum oſtendamus, omnes demonſtrationes Euclidis, ac ſi ex axiomate 13. non penderent, aut etiamſi pendeant ex eo, concedantur tamen, perinde ac ſi axioma illud iam ſit demonſtratum ante propoſ. 29. huius lib. vbi primum vſus illius apparere incipit, vti verè à nobis mox ante propoſ. 29. demonſtrabitur. Itaque quoniam F G, maior eſt, quam E D, vt Nicomedes demonſtrauit, erit F H, reliqua minor, quam reliqua E I. Magis ergo inter ſe diſtant lineæ A I, A E, in punctis I, E, quam in punctis H, F; atque ita ſemper eas probabimus magis ac magis diſtare, ſi longius protendantur. Diſtantia nihilominus ſemper minor erit, quam recta A B, hoc eſt, quam perpendicularis ex recta A I, ad rectam B D, demiſſa, cum inflexa linea A E, ad rectam B D, nunquam perueniat, vt demonſtratum eſt à Nicomede.*

SCIO principium illud Procli in lineis rectis eſſe verißimum, & quod facili negotio, ſi omnes demonſtrationes Euclidis, quæ ex axiomate 13. pendent, concedantur, demonſtrari poſſit hoc modo.



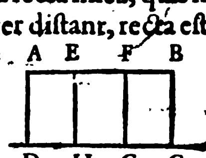
Contineant duæ rectæ A B, A C, angulum A, & data ſit recta D, cuiuſuis magnitudinis. Dico diſtantiam rectarum A B, A C, in infinitum productarum excedere magnitudinem D. Nam ex quouis

quouis puncto E, in recta A B, ſumpto demittatur ad A C, perpendicularis E F. quæ ſi maior fuerit, quàm D, conſtat propoſitum: ſi verò non eſt maior, ſumatur eius multiplex proximè maior, quàm D, nempe G. Sumpta autem A B, ipſius A E, ita multiplice, vt multiplex eſt G, ipſius E F, demittatur ex B, ad A C, perpendicularis B C, quam dico maiorem eſſe data recta D. Quoniam enim a eſt, vt A B, ad B C, ita A E, ad E F. (quod ex coroll. propoſ. 4. a 4. ſexti.
lib. 6. Euclid. triangula A B C, A E F, ſimilia ſint, ob rectas B C, E F, quæ b parallelæ ſunt.) Et permutando, vt A B, ad A E, ita B C, ad b 28. pri
E F: erit ita multiplex B C, ipſius E F, vt multiplex eſt A B, ipſius A E, hoc eſt, vt multiplex eſt G, ipſius E F. Cùm ergo B C, & G, æquè multiplices ſint ipſius E F, ipſa erunt inter ſe æquales. Eſt autem ex conſtructione, maior G, quàm D. Igitur & B C, diſtantia puncti B, à puncto C, maior erit, quàm recta D, data. Quod eſt propoſitum.

VERVM demonſtratio hæc ſine proprietatibus linearum parallelarum, quæ axiomate illo 13. nituntur, vim nullam habet, ac proinde principium illud Procli aſſumi non poteſt ad illud axioma 13. demonſtrandum, ne principium in eo demonſtrando petatur. Quæ cùm ita ſint, ſedulò dedimus operam, vt illud ipſum Euclidis axioma demonſtraremus ex iis ſolùm, quæ ante propoſ. 29. primi libri demonſtrata ſunt. Ante enim propoſ. 29. vſus illius axiomatis apud Euclidem nullus eſt. Id quod in Euclide quodam Arabico factum etiam eſſe accepi, ſed nunquam facta mihi eſt copia demonſtrationem illam legendi, etſi obnixè illud iterum atque iterum ab eo, qui eum Euclidem Arabicum poſſidet, flagitaui. Quare hanc, quæ ſequitur, excogitauimus. Primùm autem præmittenda quoque ſunt nonnulla, quæ licet ad id, quod proponimus, demonſtrandum requirantur neceſſariò, multò tamen euidentiora ſunt ac faciliora axiomate illo Euclidis, ita vt omni dubitatione excluſa, firmum eis aſſenſum præbere poſſimus. Primum ſit huiuſmodi.

I.

LINEA, cuius omnia puncta à recta linea, quæ in eodem cum ea plano exiſtit, æqualiter diſtant, recta eſt.

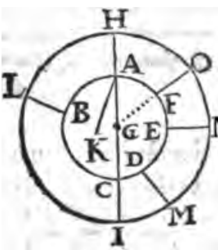


VT ſi omnia puncta lineæ A B, à recta D C, æqualiter diſtent, hoc eſt, omnes perpendiculares, quales ſunt A D, E H, F G, B C, ad D C, demiſſæ æquales ſint (perpendicularis enim quælibet, cùm ſit omnium ex eodem puncto ad rectam D C, ductarum minima, ex coroll. propoſ. 19. huius lib. diſtantiam puncti, à quo ducta eſt, metitur.) erit A B, linea recta. Hoc autem ex defin. lineæ rectæ liquidò conſtare poteſt Nam ſi omnia puncta lineæ A B, æqualiter diſtant à recta D C, ex æquo ſua interiacebit puncta, hoc eſt, nullum in ea punctum intermedium ab extremis ſur-

Digitized by Google

mis ſurſum; aut deorſum, vel huc atq; illuc deflectendo ſubſultabit, nihilq; in ea flexuoſum reperietur, ſed æquabiliter ſemper inter ſua puncta extendetur, quemadmodum recta D C. Alioquin non omnia eius puncta æqualem à recta D C, diſtantiam haberent, quod eſt contra hypotheſin. Neq; verò cogitatione apprehendi poteſt, aliam lineam præter rectã poſſe habere omnia ſua puncta à recta linea, quæ in eodem cum illa plano exiſtat, æqualiter diſtantia. Eſt ſanè principium hoc, ex quo ſolo conceſſo, vna cum iis, quæ vſq; ad propoſ. 29. huius lib. oſtenſa ſunt, axioma 13. demonſtrabimus, adeò clarum, vt lumine naturali cognitum ſit, nemoq; ſanæ mentis illud negare poſſit. Aut certè citra omnem controuerſiam eſt eiuſmodi, vt longè facilius ei quilibet aſſentiatur, quàm illi axiomati 13. Euclidis.

IDEM prorſus in linea circulari contingit. Nam etiam linea inflexa circularem lineã ambiens, cuius omnia puncta æqualiter à circulari diſtant, id eſt, à qua omnes rectæ in circularem lineã ad æquales angulos incidentes æquales ſunt, circularis quoque eſt; ita vt naturam circularis lineæ, à qua æquali ſemper diſtantia abeſt, induat: quemadmodum linea æqualiter ſemper à recta linea diſtans, naturã lineæ rectæ, cui ſemper æquidiſtat, induit, proptereaq; recta eſt, vt diximus. Quòd autem inflexa illa linea circa lineam circularem ſit quoq; perfectè circularis, facilè oſtendemus, ſi priùs demonſtremus, rectam ex centro circuli ductam efficere cum circumferentia angulos binos æquales; & contra; rectam, quæ æquales cum circumferentia angulos conſtituat, per centrum tranſire. Sit igitur circulus A B C D E F, cuius centrum G. Dico rectam G C, ex centro ductam efficere tam angulos internos G C B, G C D, quàm externos I C B, I C D, inter ſe æquales.



Producta enim I G, vſq; ad A, ſi ſemicirculus A B C, circa diametrum A C, intelligatur circumuerti, congruet is ſemicirculo A E C, cùm ſemicirculi eiuſdem circuli ſint inter ſe æquales. Quod ſi quis dicat, vnum ſemicirculum alterum interſecare, ducenda erit recta linea ex centro G, ſecans vtramq; circumferentiam, colligendamq; partem toti eſſe æqualem, nimirum ſemidiametrum vſque ad interiorem circumferentiam, ſemidiametro ad exteriorem vſque circumferentiam ductæ, quod abſurdum eſt. Anguli igitur ad C, tam interni, quàm externi inter ſe congruent, ac proinde æquales erunt. Efficiat iam recta H A K, æquales angulos ad A. Dico eam per centrum tranſire. Si enim non tranſeat, ducatur ex centro G, ad A, recta G A, quæ ex proximè demonſtratis angulos G A B, G A F, conſtituet æquales. Nõ ergo æquales ſunt K A B, K A F. Quod eſt contra hypotheſin.

HOC oſtenſo, ambiat inflexa linea H L I M N O, circularem lineam

neam A B C D E F, omniaq́; eius puncta ab hac æqualiter abſint, id eſt, omnes rectæ ab ea linea in circularem lineam cadentes, efficientesq́; angulos æquales, ſint inter ſe æquales, cuiuſmodi ſunt H A, L B, I C, M D, N E, O F. Hæ enim cùm, vt demonſtratum eſt, per centrum tranſeant, erunt omnium ex punctis H, L, I, M, N, O, in conuexam peripheriam cadentiũ, minimæ; (Hoc enim demonſtratum eſt ab Eucl. propoſ 8. lib. 3. quæ ſolùm ex propoſitionibus, quæ 29. huius lib. antecedunt, pendet, vt iure optimo huc transferri poſſit) atq; adeò earum diſtantias à ſubiecta linea circulari metientur. Dico lineã HLIMNO, eſſe circularem. Cùm enim omnes illæ, vt proximè oſtendimus, per centrum G, tranſeant; ſi æqualibus H A, O F, addantur æquales A G, F G, erunt totæ H G, O G, æquales; eademq́; ratione omnes aliæ ex linea inflexa H L I M N O, ad G, ductæ æquales erunt & rectis H G, O G, & inter ſe. Ex defin. circuli igitur linea inflexa circularis eſt. Quod erat demonſtrandum. Ex hoc primo, quòd præmiſimus, ſequitur ſecundum: videlicet.

II.

SI recta linea ſuper aliam rectam in tranſuerſum moueatur, conſtituens in ſuo extremo cum ea angulos ſemper rectos, deſcribet alterum illius extremum lineam quoque rectam.

VT ſi in priore figura recta A D, ad D C, perpendicularis moueatur in tranſuerſum ſuper rectam D C, conſtituens cum ea in D, ſemper rectos angulos, hoc eſt, non titubans, aut vacillans, ſed æquabiliter ſemper incedens, deſcribet extremum A, rectam quoq; lineam, nempe A B. Conſtat hoc ex eo, quod primo loco præmiſimus; propterea quòd omnia puncta lineæ A B, deſcripta æqualiter à recta D C, diſtant, nimirum per rectam A D. Ex quo fit, ipſam lineam rectam eſſe, cùm, vt ibi dictum eſt, eius media ab extremis non ſubſultent, ſed æqualiter inter ipſa iaceant, quippe cùm nullum eorum magis aut minus à recta C D, abſcedat ſurſum, aut deorſum vergendo, quàm aliud. Patet hoc etiam ex ijs, quæ ad definitionem lineæ rectæ ſcripſimus. Cùm enim duo puncta D, A, ſimilibus prorſus motibus ferantur (quòd recta A D, in ſuo motu non titubet, aut vacillet, ſed puncta D, A, æquè velociter incedant, æqualiterq́; ſemper inter ſe diſtent) deſcribent vtiq; lineas ſimiles, vt in eadem definitione docuimus. Cùm ergo punctum D, rectam DC, deſcribat, erit quoq; linea A B, quam punctum A, deſcribit, recta. Neq; verò imaginari quis poterit, ſi linea recta in tranſuerſum moueatur vniformiter ſine vlla titubatione huc atq; illuc, duo puncta eius extrema deſcribere duas differentes inter ſe lineas; ſed qualem vnum extremum deſcribit, talem quoque ab altero extremo deſcribi neceſſe eſt, propter vniformem illum, æquabilemq́; motum vtriuſque puncti extremi. Eſt principium hoc æquè clarum, & euidens, atque antecedens.

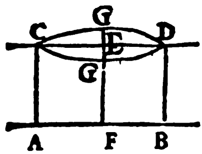
CON-

Digitized by Google

CONTINGIT autem idem omninò in circulari linea. Nam eodem pacto recta linea ſuper lineã circularem in tranſuerſum fluens æquabiliter, conſtituens nimirum in ſuo extremo cum circulari æquales ſemper angulos, non vacillando, aut deflectendo huc atque illuc, circularem lineam altero ſuo extremo deſcribit, ita vt naturam circularis lineæ ſubiectæ, à qua æqualiter ſemper diſtat, linea illa deſcripta induat: quemadmodum linea recta A D, ſuper rectam D C, in tranſuerſum fluens æquabiliter, conſtituens nimirum cum ea in ſuo extremo D, angulos ſemper rectos, ita vt nuſquam declinet, huc atque illuc deflectendo, aut titubando, lineam rectam A B, altero extremo A, delineat: adeò vt linea deſcripta A B, naturam induat rectæ lineæ ſubiectæ D C, à qua æqualiter ſemper recedit. Rectam autem, quæ ſuper lineam circularem in tranſuerſum fluit æquabiliter, deſcribere altero ſuo extremo lineam quoque circularem, facilè demonſtrabimus. Moueatur enim in figura poſteriore recta H A, in tranſuerſum ſuper peripheriam A B C D E F, æquabiliter, faciens ſemper in extremo A, cum ea angulos æquales. Dico lineam H L I M N O, ab altero extremo H, deſcriptam eſſe quoque circularem. Cùm enim recta H A, in omni ſitu motus illius imaginarij faciat æquales angulos cum peripheria A B C D E F, fit vt ea producta in centrum G, cadat, vt ſuprà oſtendimus. Quare additis rectis æqualibus H A, O F, ad rectas æquales A G, F G, fient totæ rectæ H G, O G, & omnes aliæ, inter ſe æquales: ac propterea ex defin. circuli H L I M N O, circumferentia circuli erit. Quod oſtendendum erat. Hinc ſequitur tertium.

III.

SI ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter ſe æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur, erit perpendicularis ex quouis puncto huius rectæ ad priorem rectam demiſſa, vtrilibet priorum perpendicularium æqualis.



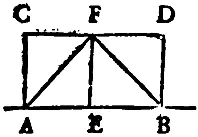
SINT ad rectam A B, erectæ duæ perpendiculares A C, B D, inter ſe æquales: Et ducta recta C D, demittatur ex quolibet eius puncto E, ad A B, perpendicularis E F. Dico E F, vtrique A C, B D, eſſe æqualem. Si namque æqualis non eſt, erit vel maior, vel minor. Abſciſſa ergo æquali F G, ſi intelligatur recta A C, moueri in tranſuerſum per rectam A B, faciens cum ea angulos ſemper rectos, deſcribet punctum C, lineam rectam per G, tranſeuntem, vt ſuprà oſtenſum eſt, qualis eſt C G D. Duæ ergo rectæ C E D, C G D, ſuperficiem claudent. Quod eſt abſurdum. Aequalis igitur eſt E F, vtrique A C, B D. Quod erat oſtendendum. Ex hoc quartum, quod ſequitur, demonſtrabimus.

SI ad

IV.

SI ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter ſe æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur, efficiet hæc recta cum vtraque perpendiculari angulum rectum.

SINT ad rectam AB, erectæ duæ perpendiculares AC, BD, æquales inter ſe, ducaturq; recta CD. Dico vtrumque angulum C, D, rectum eſſe. Secta namque recta AB, biſariam in E, excitetur in E, ad AB, perpendicularis EF, iunganturq; rectæ AF, BF. Quoniam igitur duo latera AE, EF, trianguli AEF, duobus lateribus BE, EF, trianguli BEF, æqualia ſunt, & vtrumque vtrique, anguloſq; continent æquales, puta rectos, a *erunt quoque & baſes AF, BF, & tam anguli FAE, FBE, quàm AFE, BFE, inter ſe æquales.* a 4. pri.



Ablatis igitur æqualibus angulis FAE, FBE, ex rectis æqualibus CAE, DBE, reliqui erunt æquales anguli CAF, DBF. Itaque cùm duo latera CA, AF, trianguli CAF, duobus lateribus DB, BF, trianguli DBF, æqualia ſint, anguloſq; complectantur æquales, vt oſtendimus, b *erunt quoque & baſes CF, DF, & tam anguli C, D, quàm CFA, DFB, inter ſe æquales.* b 4. pri. *Si ergo æqualibus angulis CFA, DFB, addantur anguli AFE, BFE, oſtenſi æquales, fient toti anguli CFE, DFE, æquales, ac proinde recti. Quia verò perpendicularis EF, vtrique AC, BD, æqualis eſt, vt proximo theoremate oſtendimus, erunt duæ rectæ AC, EF, ad AE, perpendiculares, inter ſe æquales. Quare, vt de angulis C, D, proximè probatum eſt; anguli C, & EFC, æquales inter ſe erunt. Eſt autem EFC, oſtenſus rectus. Igitur & C, rectus erit, ac proinde & angulus D, qui oſtenſus eſt ipſi C, æqualis.*

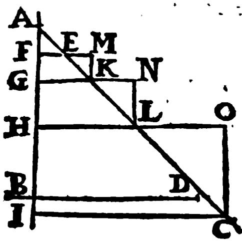
CAETERVM angulos C, D, rectos eſſe, demonſtrabimus alio modo, hoc prius theoremate præmiſſo.

SI in duas rectas lineas alia recta incidens faciat cum vna earum angulum internum rectum, & cum altera ex eadem parte acutum, duæ illæ rectæ minùs ſemper inter ſe diſtabunt ad eas partes, vbi eſt angulus acutus, ex altera verò parte ſemper inter ſe magis diſtabunt.

RECTA linea AB, in rectas AC, BD, incidens faciat angulum ABD, rectum, & BAC, acutum. Dico rectas AC, BD, minùs ſemper inter ſe diſtare verſus C, D, productas, magis verò, ſi verſus E, F, producantur. c *Ducatur e-* c 12. pri.



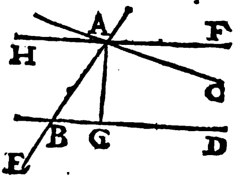
B D, ad partes C, D, productas coire. Sit enim primum alter angulorum, nempe A B D, rectus, & alter B A C, acutus. Sumpto in recta
a 12.pri. A C, puncto quolibet E, a ducatur ex eo ad rectam A B perpendicularis E F, & rectæ A F, æqualis accipiatur F G, & G H, æqualis ipſi A G, & H I, ipſi A H, ita ut A G, ipſius A F, & A H, ipſius A G, & A I, ipſius A H, dupla ſit. Et quoniam ſi rectæ A F, abſcindantur continuè æquales rectæ ex A B, aliqua tandem pars ultra B, punctum cadet, quod finitæ rectæ A B, per continuam ablationem unius eiuſdemq́; quantitatis abſumatur tandem, quandoquidem linea



A F, ita multiplicari poteſt (quod fit, ſumendo ipſi in A B, continenter partes æquales) ut tandem aliquando finitam lineam A B, ſuperet. Id quod Euclides frequenter aſſumit in lib. 5. & aliis ſequentibus, ubi datis duabus magnitudinibus inæqualibus proportionem inter ſe habentibus, iubet plerunque minorem ita multiplicari, donec maiorem ſuperet. Fit, ut multò magis, ſi ipſi A F, æqualis abſcindatur F G, & toti deinde A G, non autem ſoli A F, æqualis auferatur G H: Item toti A H, non autem ſoli A F, vel A G, æqualis dematur H I, & ſic deinceps, cadat tandem pars aliqua ultra punctum B. Statuatur ergo punctum I, terminans tertiam duplam in dato exemplo, exiſtere ultra punctum B. Accipiatur quoque in recta A C, recta E K, ipſi A E, & K L, ipſi A K, & L C, ipſi A L, æqualis, ita ut tot ſint partes in recta A C, quot in recta A I; ducanturq́; rectæ K G, L H, C I, producanturq́; unà cum E F, ut E M, K N, L O, ipſis E F, K G, L H, fiant æquales, ac tandem rectæ iungantur M K, N L, O C. Itaque quoniam duo latera K E, E M, trianguli K E M, duobus lateribus A E, E F, trianguli A E F, per conſtructionem æqualia ſunt, utrum-
b 15.pri. que utrique, b anguloſq́; ad verticem E, continent æquales, c erit
c 4.pri. & baſis M K, baſi A F, & angulus M, angulo F, æqualis. Eſt autem & F G, eidem A F, æqualis, & angulus F, rectus, ex conſtructione.
d 1.pri. Igitur & M K, F G, d æquales inter ſe erunt, & angulus M, quoque rectus. Quare cùm ad F M, excitatæ ſint duæ perpendiculares æquales F G, M K, erit per antecedens theorema, angulus G, rectus. Rurſus ergo, quia duo latera L K, K N, trianguli L K N, duobus lateribus A K, K G, trianguli A K G, æqualia ſunt, ex conſtructione,
e 15.pri. e anguloſq́; comprehendunt æquales ad K, verticem, f erit & baſis
f 4.pri. N L, baſi A G, & angulus N, angulo G, æqualis. Eſt autem & G H, ex conſtructione, eidem A G, æqualis, & angulus G, rectus, ut proxi-
g 1.pren mè demonſtratum eſt. Igitur & N L, G H, inter ſe g erunt æquales, & angulus N, quoque rectus. Quocirca per præcedens theorema erit etiam angulus H, rectus. Eadem ratione oſtendemus angulum I, rectum

ctum eſſe: atque ita deinceps, ſi plures eſſent partes rectæ A B. Eſt autem & angulus B, per hypotheſin rectus. Igitur rectæ I C, B D, a parallelæ ſunt: ac propterea B D, producta rectam A C, ſecabit ſupra punctum C; atque adeò in puncto illo ſectionis rectæ A C, B D, coibunt. Quod erat demonſtrandum. a 28. pri

SIT deinde neuter angulorum A B D, B A C, rectus; ſed A B D, quidem acutus, & B A C, vel acutus etiam, vel obtuſus. Quia igitur duo anguli A B D, B A C, duobus rectis ponuntur minores; b ſunt autem duo anguli A B D, D B E, duobus rectis æquales: erunt hi duo illis duobus maiores. Ablato ergo communi A B D, maior erit reliquus b 13. pri.



D B E, reliquo B A C. c Cõſtituatur in A, ad rectam A B, angulus B A F, angulo D B E, æqualis: Cadetq́; recta A F, ſupra rectã A C, cum A F, maiorem angulũ cum A B, conſtituat, quàm A C. Quia igitur externus angulus D B E, interno B A F, ex eadem parte oppoſito æqualis eſt, d erunt rectæ A F, B D, inter ſe parallelæ. Demittatur quoque ex A, ad B D, e perpendicularis A G, quæ ex coroll. 2. propoſ 17. huius lib. ad partes acuti anguli A B D, cadet: Eritq́; angulus quoq; G A F, rectus. Nam ſi acutus eſſe dicatur, efficiet recta A G, in rectas A F, B D, incidens angulum A G D, rectum, & G A F, acutum, ac proinde, vt proximè demonſtrauimus, rectæ A F, B D, ad partes F, D, productæ coibunt tandem: Quod eſt abſurdum. Oſtenſæ enim ſunt parallelæ. Si autem angulus G A F, dicatur eſſe obtuſus, erit G A H, acutus. Quare ex proximè demonſtratis, coibunt rectæ A F, B D, ad partes H B, productæ, quod eſt abſurdum, cùm parallelæ ſint oſtenſæ. Non eſt ergo angulus G A F, acutus, aut obtuſus. Igitur rectus, ac proinde eius pars G A C, acutus. Quoniam igitur recta A G, in rectas A C, B D, incidens facit angulum G, rectum, & G A C, acutum, concurrent rectæ A C, B D, ad partes, C, D, productæ, vt proximè demonſtrauimus. Si igitur recta A B, in rectas A C, B D, incidens faciat duos angulos minores duobus rectis, neutrum tamen angulorum A B D, B A C, rectum, ipſæ rectæ A C, B D, ad partes C, D, productæ conuenient. Quod erat oſtendendum. Quòd ſi quando accidat, rectam A C, exiſtere inter A B, & perpendicularem A G, liquidò conſtat, rectas A C, B D, coire, quòd tunc A C, baſin B G, trianguli A B G, ſecaret. Quod vt faciliùs capias, ducere poteris rectam A C, inter A B, A G. c 23. pri. d 28. pri e 12. pri.

QVAMVIS autem, conceſſo principio noſtro, optimè à nobis demonſtratum ſit tertiumdecimum hoc axioma, & à Proclo etiam, ſi eius principium difficilius quidem, quàm noſtrum, admittatur, vt iure optimo inter theoremata, & non inter principia poſſit connumerari; tamen ne ordinem Euclidis in quoquam immutemus, vtemur

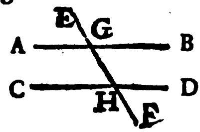
G eo in

et in omnibus propoſitionibus, quarum demonſtrationes ex ipſo pe dent, tanquam pronunciato. Sed iam ad ſeriem propoſitionum Euc dis reuertamur.

XXIX. THEOR. 20. PROPOS. 29.

IN parallelas rectas lineas recta incidens linea; E alternatim angulos inter ſe æquales efficit; & externun interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem; & internos, & ad eaſdem partes, duobus rectis æquale facit.

IN parallelas A B, C D, recta incidat E F. Dico primum, angulos alternos A G H, D H G, inter ſe eſſe æquales. Si enim non ſint æquales, ſit alter, nempe A G H, maior. Quoniam igitur angulus A G H, maior eſt angulo D H G, ſi addatur communis



a 4 pronun. angulus BGH; *a* erunt duo AGH, B GH, maiores duobus D H G, B GH: At duo *b 13 pri.* A G H, B G H, *b* æquales ſint duobus rectis. Igitur duo D H G, B G H, minores ſunt duobus rectis. Quare cùm ſint inter- *c 13. pronun.* ni, & ad eaſdem partes, B, & D, *c* coibunt lineæ A B, C D, ad eas partes, quod eſt abſurdum, cùm ponantur eſſe parallelæ. Non eſt igitur angulus A G H, maior angulo D H G: Sed neque minor. Eadem enim ratione oſtenderetur, rectas coire ad partes A, & C. Igitur æquales erunt anguli alterni A G H, D H G. Eademq́; eſt ratio de angulis alternis B G H, C H G.

DICO ſecundò, angulum externum A G E, æqualem eſſe interno, & ad eaſdem partes oppoſito C H G. Quoniam enim angulo B G H, æqualis eſt alternus C H G, vt oſtenſum eſt; & eidem *d 15. pri.* B G H, *d* æqualis eſt angulus A G E. Erunt anguli A G E, C H G, *e 1. pron.* *e* inter ſe quoque æquales. Eodem modo demonſtrabitur, angulum B G E, æqualem eſſe angulo D H G.

DICO tertiò, angulos internos ad eaſdem partes, A G H, C H G, æquales eſſe duobus rectis. Quoniam enim oſtenſum fuit, angulum externum A G E, æqualem eſſe angulo C H E, in- *f 2. pronun.* terno; ſi addatur communis A G H, *f* erunt duo A G E, A G H, duobus C H G, A G H, æquales: Sed duo A G E, A G H, *g* æqua- *g 13. pri.* les ſunt duobus rectis. Igitur & duo anguli C H G, A G H, æquales duobus rectis erunt. Eodem modo anguli B G H, D H G, duobus erunt rectis æquales. In parallelas ergo rectas lineas recta incidens linea, & alternatim angulos, &c. Quod erat demonſtrandũ.

S C H O L I V M.

CONVERTIT autem hoc præſens theorema duo præcedentia theoremata, vt perſpicuum eſt.

THEOR.

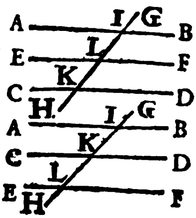
Digitized by Google

THEOR. 21. PROPOS. 30. xxx

QVÆ eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter ſe ſunt parallelæ.

SINT rectæ AB, CD, eidem rectæ EF, parallelæ. Dico & ipſas AB, CD, eſſe inter ſe parallelas. Quoniam enim omnes hæ lineæ in eodem ponuntur eſſe plano. (Nam propoſ. 9. vndecimi libri agetur de lineis in diuerſis planis) ducta recta GH, ſecabit omnes, nimirum AB, in I; CD, in K; & EF, in L. Quia igitur AB, ponitur parallela ipſi EF, a erit angulus AIL, alterno FLI, æqualis. Rurſus quia CD, ponitur etiam parallela ipſi EF, b erit angulus DKI, eidem angulo FLI, nempe internus externo, vel externus interno, æqualis. Quare anguli AIL, DKI, c æquales inter ſe quoque erunt. Cùm igitur ſint alterni, d erunt rectæ AB, CD, parallelæ inter ſe. Quæ igitur eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter ſe ſunt parallelæ. Quod demonſtrandum erat.

a 29. primi.
b 29. primi.
c 1. pronun.
d 27. primi.



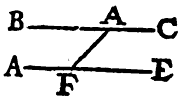
SCHOLIVM.

QVOD ſi quis dicat, duas rectas AI, BI, parallelas eſſe rectæ CD, & tamen ipſas non eſſe parallelas; Occurrendum eſt, duas AI, BI, non eſſe duas lineas, ſed partes tantùm vnius lineæ. Concipiendum enim eſt animo, quaslibet parallelas infinitè eſſe productas; Conſtat autem AI, productam coincidere cum BI. Quamobrem propoſitio hæc generalius ita poterat proponi.

QVÆ eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter ſe ſunt parallelæ: vel certè, quando inter ſe coeunt, vnam eandemq; lineam conſtituunt.

SINT enim duæ rectæ AB, AC, coeuntes in A, parallelæ ipſi DE. Dico illas in rectum eſſe conſtitutas. Ex puncto enim A, ducatur recta AF, ſecans DE, in F, vtcunq;. Quoniam igitur AB, DE, ſunt parallelæ, e erunt anguli alterni BAF, AFE, æquales. Addito ergo communi angulo CAF, f erunt duo anguli ad A, æquales duobus angulis CAF, AFE. Sed hi duo g æquales ſunt duobus rectis, cùm ſint interni inter duas parallelas AC, DE. Igitur & duo anguli ad A, duobus erunt rectis æquales; ac propterea h in rectum erunt conſtitutæ ipſæ AB, AC. Quod eſt propoſitum.

e 29. primi.
f 2. pron.
g 29. primi.
h 14. primi.



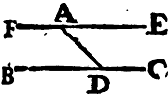
ROBL. 10. PROPOS. 31. xxxj.

A dato puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

Digitized by Google

EX puncto A, ducenda ſit linea parallela lineæ B C. Ducatu ex A, ad B C, linea A D, vtcunque, faciens angulum quemcun

a23.pri. que A D B; Cui ad A, a æqualis conſtituatur E A D. Dico rectam



E A, extenſam ad F, quantumlibet, parallelam eſſe ipſi B C. Cùm enim anguli alterni A B D D A E, æquales ſint, per conſtructionem, b e-

b27.pri tunt rectæ B C, E F, parallelæ. A dato igitu puncto, datæ rectæ lineæ, &c. Quod erat faciendum.

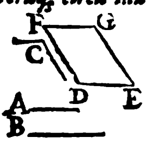
SCHOLIVM.

DEBET autem punctum datum in tali eſſe loco ſitum extra lineam datam, vt hæc producta cum illo non conueniat. Quod quidem apertè colligitur ex ipſa conſtructione problematis. Nam ex puncto dato ducenda eſt linea faciens angulum aliquem cum linea data, qui fieri non poſſet, ſi punctum in directum iaceret cum ipſa linea data. Quemadmodum autem ab vno, eodemq́; puncto ad eandem rectam non plures perpendiculares, quàm vna, ducuntur, vt oſtendimus propoſ.17. ex Proclo; ita etiam per idem punctum, datæ rectæ plures parallelæ, quàm vna, duci nequeunt. Si enim duæ ducerentur,

c30.pri. *conuenirent ipſæ in puncto illo eodem, quod eſt abſurdum, c cùm ſint parallelæ inter ſe, propterea quòd vni & eidem, cui parallelæ dicuntur duci, ſunt parallelæ.*

EX hoc porrò problemate, & illo, quod propoſ.23. continetur, facili negotio conſtituemus parallelogrammum, cuius vnus angulorum æqualis ſit dato angulo rectilineo, lateraq́; angulum illum comprehendentia datis duabus rectis lineis æqualia.

SINT enim data recta A B, oporteatq́; conſtituere parallelogrammum habens angulum æqualem dato angulo rectilineo C, lateraq́; circa illum angulum rectis A B, æqualia. Sumpta recta D E,



d23.pri *quæ rectæ A, ſit æqualis, d fiat angulus E D F,*

e3.pri. *angulo C, e & recta D F, rectæ B, æqualis. Dein-*

f31.pri. *de per E, f agatur recta E G, ipſi D F, parallela, & per F, recta F G, ipſi D E, parallela ſecans E G, in G. Quoniam ergo & latera D F, E G, & D E,*

g35.defin. *F G, parallela ſunt, ex conſtructione; g parallelogrammum erit D E G F. Quod cùm ex conſtructione, habeat angulum D, angulo dato C, æqualem, & latera D E, D F, circa dictum angulum D, datis rectis A, B, æqualia; factum erit, quod proponitur.*

PARI ratione ex hoc problemate, & propoſ.23. ducemus à puncto extra datam rectam lineam propoſito lineam rectam, quæ cum data recta angulum efficiat dato angulo rectilineo æqualem, vt ad propoſ.23. polliciti ſumus.

SIT enim datum punctum A, extra rectam B C, & datus angulus rectilineus D, oporteatq́; ex A, ad rectam B C, ducere lineam rectam.

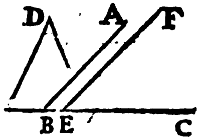
ſtam, quæ cum ea angulum dato angulo D, æqualem comprehendat. Sumpto quolibet puncto E, in linea B C, a conſtituatur in eo angulus C E F, angulo D, æqualis. Si igitur recta E F, per datum punctum A, tranſeat, factum erit, quod iubetur. Si verò non tranſeat per A, b ducatur per A, recta A B, ipſi E F, parallela ſecans B C, in B. Dico angulum A B C, angulo D, æqualem eſſe. Cùm enim parallelæ ſint, A B, E F, c erit angulus C E F, externus interno A B C, ex eadem parte oppoſito æqualis. Cùm ergo & angulus D, angulo E, per conſtructionem ſit æqualis, d æquales inter ſe erunt anguli A B C, & D, quod eſt propoſitum.

a 23. primi.

b 31. primi.

c 29. primi.

d 1. pronun.

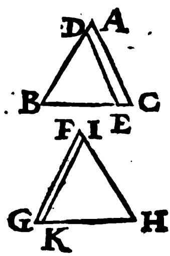


NON videtur autem alienum oſtendere hoc loco, rectè Euclidem propoſ. 26. vt demonſtraret æqualitatem laterum in duobus triangulis, ex æqualitate duorum angulorum, & vnius lateris, præcepiſſe, latus illud vel adiacere debere angulis æqualibus, vel certè ſubtendere angulum æqualem. Nam niſi altera harum conditionum adſit, nihil colligetur.

SIT enim triangulum A B C, ſintq́ latera A B, A C, latere B C, maiora. Abſcindatur B D, æqualis ipſi B C, e ducaturq́ D E, ipſi A C, parallela, f eritq́ angulus B E D, angulo C, æqualis. Quare duo anguli B, C, trianguli A B C, duobus angulis B, E, trianguli D B E, æquales ſunt, vterque vtrique, latusq́ B C, lateri D B, æquale; cùm tamen reliqua latera reliquis lateribus æqualia non ſint. Eſt enim B E, minus, quàm B C, atque adeò neque lateri A C. neque lateri A B, æquale eſſe poteſt; quòd hæc latera maiora ponantur latere B C. Cauſa huius rei eſt, quod latus B C, in triangulo A B C, adiacet angulis dictis, at latus D B, in triangulo D B E, opponitur vni angulorum dictorum, nimirum angulo D E B, qui angulo C, æqualis eſt.

e 31. primi.

f 29. primi.

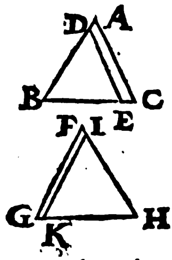


SIT rurſus triangulum F G H, ſintq́ iterum latera F G, F H, latere G H, maiora, & F H, maius quàm F G. Abſcindatur H I, ipſi F G, æqualis, g ducaturq́ I K, ipſi F G, parallela: h eritq́ angulus H K I, angulo G, æqualis. Sunt ergo duo anguli H, G, trianguli F G H, duobus angulis H, K, trianguli I K H, æquales, vterque vtrique, latusq́ F G, lateri I H, æquale; cùm tamē reliqua latera reliquis lateribus æqualia non ſint. Eſt enim H K, minus, quàm H G, atque adeò neque lateri H G, neq; lateri F H, æquale eſſe poteſt; quod latus F H, maius etiam ponitur, quàm G H. Ratio huius rei eſt, quod latus F G, in triangulo F G H, opponitur angulo H, at latus I H, oppo-

g 31. primi.

h 29. primi.

Digitized by Google

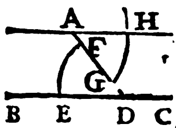


tur angulo K, in triangulo I K H, qui ma ponitur æqualis angulo H, ſed angulo G, eſt æ qualis, a qui maior eſt angulo H, propterea quòd latus F H, maius poſuimus latere F G. Diſtulimus hanc demonſtrationem huc in locum, propter linearum parallelarum proprietates, ex quibus pendet.

a 18. primi.

PRAXIS.

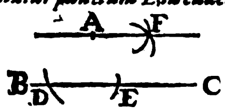
SIT ducenda parallela ipſi B C, per punctum A Ducatur recta



A D, vtcunq; ad B C, & ex D, & A, ad idem interuallum quodlibet deſcribantur duo arcus ad diuerſas partes, vnus ad partes B, alter ad partes C. Deinde beneficio circini arcui E F, abſcindatur ex arcu altero arcus G H, æqualis. Si igitur ex A, per H, recta ducatur, b erit hæc parallela ipſi B C. Nã alterni anguli E D F, H A G, ſunt æquales, vt cõſtat ex praxi propoſ. 23. &c.

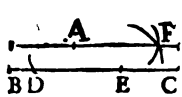
b 27. primi.

ALIO modo ducetur per idem punctum A, datum linea paralle-la lineæ datæ B C, hac arte. Ex centro A, ad quoduis interuallum deſcribatur arcus ſecans B C, in puncto D; & eodem interuallo ex D, ſumatur punctum E, in eadem recta B C. Deinde eodem interuallo ex A,



& E, deſcribantur duo arcus ſecantes ſeſe in F. Nam ducta recta A F, erit parallela rectæ B C. Quoniam enim propter idem interuallum aſſumptum recta A F, æqualis eſt rectæ D E; & recta A D, rectæ E F, ſi ducerentur hæ lineæ; erit A F, oppoſita D E, parallela, vt poſtea demonſtrabimus propoſ. 34.

QVOD ſi punctum A, vicinum fuerit rectæ B C, commodiùs hac lege parallela optata ducetur. Ex A, ſumatur punctum D, in B C, ad quoduis interuallum; Et ex quouis puncto eiuſ-



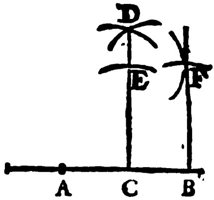
dem rectæ B C, nempe E, quod tamen aliquantulum diſtet à puncto D (Quò enim maior fuerit diſtantia inter D, & E, eò faciliùs & accuratiùs parallela ducetur) eodem interuallo arcus deſcribatur ad partes A. Deinde ex A, interuallo D E, alter arcus deſcriptus ſecet priorem arcum in F. Recta namq; ducta A F, erit parallela rectæ B C, vt prius; quia recta A F, æqualis eſt rectæ D E, ob idem interuallum; & recta A D, rectæ E F, ſi hæ rectæ ductæ eſſent, &c.

SED longè faciliimam rationẽ ducendi parallelam alicui lineæ per datum punctũ tradidimus in noſtro Aſtrolabio lib. 1. lemmate 4.

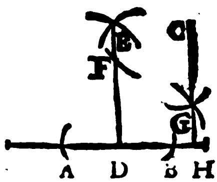
EX his facilè ducemus ex puncto extremo alicuius lineæ perpendicularem lineam ad ipſam datam lineam, etiamſi linea produci non poſſit, quod in ſcholio propoſ. 12. promiſimus. Sit enim recta A B, ex cu-

Digitized by Google

aut cum extremo puncto B, educenda ſit ad eam perpendicularis. Sumpto puncto quouis C, abſcindatur recta CB, æqualis CA, & ex A, & B, ad quoduis interuallum duo arcus deſcribantur ſecantes ſeſe in D, ducaturq́; recta DC, quæ ad AB, perpendicularis erit, vt ad propoſ. 11. ſcripſimus. Deinde per B, ducatur ipſi CD, parallela, hoc modo, ſecundum praxim huius 31. propoſitionis proximè explicatam. Ex CD, abſciſſa recta quantacunq́; CE, deſcribatur ex B, ad interuallum CE, arcus, quem in F, ſecet alius arcus ex E, ad interuallum CB, deſcriptus, ducaturq́; recta BF. Hæc namque ipſi CD, parallela erit, vt ex praxi huius propoſ. 31. liquet. Igitur cùm angulus ACD, a æqualis ſit interno CBF; ſit autem ACD, rectus, erit & CBF, rectus, ac proinde BF, ad AB, perpendicularis erit. a 29 primi.



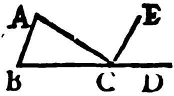
SIMILITER ſi data ſit recta AB, & punctum extra ipſam C, in extremo ferè plani, in quo recta illa iacet, ducemus ex C, ad AB, perpendicularem, neq́; producta linea, neq́; extenſo plano infra rectam AB, vt polliciti ſumus ad propoſ. 12. hoc modo. Sumpto puncto D, vtcunq́; in linea AB, abſcindatur vtrinq́; inter ſe æquales DA, DB, & ex A, & B, ad quoduis interuallum duo arcus deſcribantur ſecantes ſeſe in E, ducaturq́; recta ED, quæ ex praxi propoſ. 11. ad AB, perpendicularis erit. Deinde per C, ducatur ipſi DE, parallela, hoc modo, ſecundum praxin huius propoſ. 31. Ex dato puncto C, ad quoduis interuallum deſcribatur arcus ſecans rectam DE, in F: eodemq́; interuallo ex D, verſus C, alius arcus deſcribatur, quem in G, interſecet alius arcus ex C, ad interuallū DF, delineatus. Recta namq́; ducta ex C, per G, ſecans AB, in H, parallela erit rectæ DE, ex praxi huius propoſ. 31. Quare, vt proximè ſcripſimus, CH, ad AB, perpendicularis erit, ſicuti & ED, ad eandem perpendicularis eſt.



THEOR. 22. PROPOS. 32. xxxij.

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto: Externus angulus duobus internis, & oppoſitis eſt æqualis. Et trianguli tres interni anguli duobus ſunt rectis æquales.

PRODVCATVR in triangulo ABC, latus BC, ad D. Dico primò, angulum externum ACD, æqualem eſſe duobus internis, & oppoſitis ſimul A, & B. b Ducatur enim ex C, linea CE, parallela rectæ AB. Quoniam igitur recta AC, incidit in parallelas AB, CE, c erunt anguli interni A, & ACE, æquales. b 31. pri. c 29. pri.



a 29. primi. b 2. pronun.

Rurſus, quia recta B D, in eaſdem paralle incidit, a erit angulus externus D C E, æqu lis interno B. Additis igitur æqualibus A C & A, b fiet totus A C D (qui ex duobus D C A C E, componitur) duobus A, & B, ſimul æqualis. Quod eſt p poſitum.

c 2. pronun. d 13. primi.

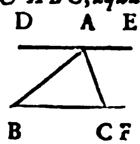
DICO ſecundò, tres angulos internos eiuſdem triang A, B, & A C B, duobus eſſe rectis æquales. Cùm enim extern angulus A C D, vt oſtenſum fuit, æqualis ſit duobus internis A, B; ſi addatur communis A C B, c erunt duo anguli A C D, A C æquales tribus A, B, & A C B; Sed duo A C D, A C B, d æqual ſunt duobus rectis. Igitur & tres interni, A, B, A C B, duobu ſunt rectis æquales. Quare cuiuſcunq; trianguli vno latere producto, &c. Quod erat demonſtrandum.

S C H O L I V M.

CVM demonſtratum ſit propoſ. 16. angulum externum cuiuſuis trianguli maiorem eſſe vtrolibet interno, & oppoſito, hic autem, eundem externum eiſdem internis ſimul eſſe æqualem, perſpicuum eſt, alterutrum internorum, & oppoſitorum ſuperari ab externo, reliquo interno angulo oppoſito. Vt in triangulo propoſito angulus A, internus ſuperatur ab angulo externo A C D, angulo B, interno: Et angulus B, internus ſuperatur ab eodē externo angulo A C D, angulo A, interno, quandoquidem angulus A C D, duobus angulis A, & B, eſt oſtenſus hoc loco æqualis. Rurſum, quia demonſtratum eſt propoſ. 17. duos angulos cuiuslibet trianguli quomodocunque ſumptos, duobus eſſe rectis minores, hic vero omnes tres duobus rectis æquales eſſe; manifeſtum eſt, duos à duobus rectis deficere, reliquo angulo trianguli. Vt in eodem triangulo, duo anguli A, & B, à duobus rectis deficiunt angulo A C B, &c.

e 31. primi. f 29. primi. g 2. pronun. h 2. primi.

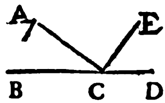
OMNE porrò triangulum habere tres angulos duobus rectis æquales, primi omnium, vt refert Eudemus, Pythagorei demonſtrarunt hac ratione. Sit triangulum A B C, & per punctum A, e ducatur recta B C, parallela D E Quoniam igitur f anguli alterni D A B, & A B C, æquales ſunt; ſi addantur æquales E A C, & A C B (ſunt enim & hi alterni) g erunt duo anguli D A B, E A C, duobus A B C, A C B, æquales. Addito ergo communi angulo B A C, h erunt tres anguli D A B, B A C, C A E, æquales tribus angulis A B C, B A C, A C B Sed anguli D A B, B A C, C A E, æquales ſunt duobus rectis, vt conſtat ex propoſitione decimatertia. Igitur & in triangulo A B C, anguli A B C, B A C, A C B, duobus ſunt rectis æquales, quod eſt propoſitum. Ex hoc autem facilè concludemus, angulum externum A C F, ſi latus B C, ſit protra-



ctum

ctum, æqualem eſſe duobus internis, & oppoſitis A B C, B A C. Quoniam enim anguli A B C, B A C, A C B, æquales ſunt duobus rectis, vt oſtenſum fuit. a Sunt autem & anguli A C F, A C B, a 13. primi.
duobus rectis æquales; Erunt anguli A B C, B A C, A C B, angulis A C F, A C B, æquales. Dempto igitur communi angulo A C B, b remanebit angulus A C F, duobus angulis A B C, B A C, b 3. pronun.
æqualis.

FACILE etiam conuerti poterit prima pars propoſitionis Euclidis: Hoc eſt, ſi ab vno angulo trianguli linea recta ducatur, vt angulus externus æqualis ſit duobus internis, & oppoſitis, illam lineam eſſe in directum ipſi lateri conſtitutam. Ex C, enim ducatur C D, recta, ſitq; angulus A C D, æqualis duobus angulis A B C, B A C. Dico rectas B C, C D, in directum iacere. Cum enim angulus A C D, æqualis ſit angulus A B C, B A C, ſi addatur communis angulus A C B, c erunt c 2. pronun.
anguli A C D, A C B, æquales angulis A B C, B A C, A C B: Sed A B C, B A C, A C B, d æquales ſunt duobus rectis. d 32. primi.
Igitur & anguli A C D, A C B, duobus erunt rectis æquales. e Quare B C, C D, vnam lineam rectam conſtituunt. e 14. primi.



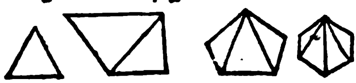
QVOT ANGVLIS RECTIS Æquiualeant anguli omnes interni cuiuſcunq; figuræ rectilineæ.

DVOBVS modis ex hac propoſ. 32. colligemus, quotnam rectis angulis æquiualeant interni anguli figuræ cuiuslibet rectilineæ, quorum primus hic eſt.

OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiuſuis ſunt æquales bis tot rectis angulis, quota ipſa eſt inter figuras rectilineas.

HOC eſt, omnes anguli primæ figuræ rectilineæ æquales ſint bis vni recto, id eſt, duobus rectis; Anguli verò ſecundæ figuræ rectilineæ æquales ſunt bis duobus rectis, nempe quatuor rectis; Anguli autem tertiæ figuræ rectilineæ æquales ſunt bis tribus rectis, ſex videlicet rectis. Et ſic reliquis. Eum autem locum qualibet figura rectilinea obtinet inter figuras rectilineas, quem indicat numerus laterum, ſeu angulorum, dempto binario; quoniam duæ lineæ rectæ ſuperficiem non concludunt, vnde nec figuram conſtituunt, ſed cum minimum tres rectæ lineæ ad figuræ conſtitutionem requirantur. Ex quo fit triangulum, quia habet tria latera, totidemque angulos, eſſe primam inter rectilineas figuras. Nam binario dempto ex tribus, relinquitur vnum. Sic erit figura habens 20. latera ſeu angulos, inter figuras rectilineas decimaoctaua, cum binarius ſubtractus ex 20. relinquat 18. Idem

iudicium de aliis figuris eſt habendum. Itaque figura contenta 20. lateribus, cum ſit decimaoctaua, habebit 20. angulos æquiualentes 36. rectis angulis, nempe bis 18. angulis rectis, vt dictum eſt. Ita quoque omnes 10. anguli figuræ 10. lateribus contentæ, æquiualebunt 16 angulis rectis, cum talis figura ſit octaua inter rectilineas figuras. Hoc autem hac ratione demonſtrabitur. Omnis figura rectilinea in tot triangula diuiditur, quota ipſa eſt inter figuras, ſeu quot ipſa habet angulos lateráue, binario dempto. Nam à quouis angulo ipſius ad omnes angulos oppoſitos duci poſſunt lineæ rectæ, ſolum ad duos propinquos angulos non poſſunt duci. Quare in tot triangula diſtribuetur, quot ipſa habet angulos, demptis duobus illis angulis. Sic vides, triangulum non poſſe diuidi in alia triangula; quadrangulum verò

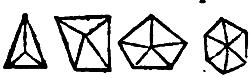


in duo ſecari; quinquangulum in tria; ſexangulum in quatuor, &c. Cum igitur anguli horum triangulorum conſtituant omnes angulos rectilineæ figuræ oppoſitæ, & omnes anguli cuiuslibet trianguli æquales ſint duobus rectis; perſpicuum eſt, omnes angulos figuræ cuiuſuis rectilineæ æquales eſſe bis tot rectis, in quot triangula diuiditur, hoc eſt, quota ipſa eſt inter rectilineas figuras. Quod quidem manifeſtè perſpicitur in propoſitis figuris.

SECVNDVS modus, quo ſcitur valor angulorum cuiuslibet figuræ rectilineæ, hic eſt.

OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiuſuis, æquales ſunt bis tot rectis angulis, demptis quatuor, quot ipſa continet latera, ſeu angulos.

HOC eſt, anguli cuiuslibet trianguli æquales ſunt bis tribus rectis, demptis quatuor, nempe duobus rectis. Ita etiam anguli figuræ continentis 20. latera æquiualebunt bis 20. angulis rectis, minus quatuor, nimirum 36. rectis angulis, &c.



Demõſtratio autem huius rei talis eſt. Si à quouis puncto intra figuram aſſumpto ad omnes angulos rectæ lineæ ducantur, efficientur tot triangula, quot latera, anguloſue figura ipſa continet. 32. primi. *Cum igitur anguli cuiuſcunq; trianguli æquales ſint duobus rectis, erunt omnes anguli illorum triangulorum æquales bis tot rectis, quot latera figuram ambiunt. At anguli eorundem triangulorum circa punctum intra figuram aſſumptum conſiſtentes non pertinent ad angulos figuræ rectilineæ propoſitæ, vt conſtat. Quare ſi hi auferantur, erunt reliqui triangulorum anguli conſtituentes angulos figuræ propoſitæ, bis quoque tot rectis æquales, demptis illis circa punctum aſſumptum conſtitutis, quot latera, vel angulos continet figura.*

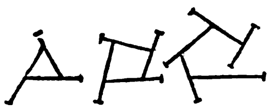
Sunt

Digitized by Google

Sunt autem omnes illi anguli, quotquot ſint, circa dictum punctum conſistentes æquales 4. rectis tantummodò, vt collegimus ex propoſ. 15. Quamobrem anguli cuiuſque figuræ bis tot rectis ſunt æquales, ablatis quatuor, quot ipſa figura continet angulos, ſeu latera, quod erat propoſitum.

Ex hoc porro ſecundo modo liquet, ſi ſingula latera figuræ cuiuſuis rectilineæ producantur ordinatim verſus eandem partem, omnes angulos externos æquales eſſe quatuor rectis. Nam quilibet externus, & deinceps internus, æquantur duobus rectis; atq; adeo omnes externi vna cum omnibus internis æquales erunt bis tot rectis, quot latera, angulóſue figura continet. Sunt autem & ſoli interni bis tot rectis æquales, minus quatuor, vt demonſtrauimus. Si igitur interni auferantur, remanebunt externi quatuor tantùm rectis æquales, qui nimirum deſunt internis angulis, vt interni & externi ſimul bis tot rectos conficiant, quot latera figuram propoſitam ambiunt. Exemplum. a 13. pri.

In triangulo quouis, anguli interni & externi ſimul æquales ſunt ſex rectis. Cum igitur interni b duobus ſint rectis æquales, erunt ſoli externi æquales quatuor duntaxat rectis. b 32. primi.



In quadrilatero, anguli externi & interni ſimul æquales ſunt octo rectis. Cum igitur interni ſoli æquales ſint quatuor rectis, vt oſtendimus, erunt & ſoli externi quatuor etiam rectis æquales. In pentagono, ſeu quinquangulo, anguli interni & externi ſunt æquales 10. rectis. Quoniam verò interni adæquantur ſex rectis, vt demonſtrauimus, remanebunt externi æquales quatuor tantum rectis. Quæ omnia in appoſitis figuris conſpiciuntur. Eademque eſt ratio in aliis omnibus figuris.

EX CAMPANO.

SI pentagoni ſingula latera producantur in partem vtramq;, ita vt quælibet duo extra pentagonum coeant, efficientur quinque anguli ex lateribus coeuntibus æquales duobus ſolum rectis.

IN pentagono ABCDE, latera in vtramque partem producta coeant in punctis F, G, H, I, K. Dico quinque angulos F, G, H, I, K, æquales tantum eſſe duobus rectis. In triangulo enim BHK, cum latus HB. ſit protractum ad F, c erit externus angulus FBK, duobus internis, & oppoſitis H, K, æqualis. Eadem ratione in triangulo AIG, erit externus angulus FAG, æqualis duobus internis, & oppoſitis I, G. Quare duo anguli FBA, FAB, æquales ſunt quatuor angulis G, H, I, K. Addito igitur communi angulo c 32. pri.



Digitized by Google

a 2.pronun. *angulo F, a erunt tres anguli A, B, F, trianguli A B F, æquales quin-*
que angulis F, G H I K. Sed anguli A, B, F, trianguli A B F, b æqua-
b 32.primi. *les ſunt duobus rectis. Igitur & quinque anguli F, G, H, I, K, duobus*
ſunt rectis æquales. Quod eſt propoſitum.

COROLLARIVM I.

EX hac propoſ. 32. colligitur, tres angulos cuiuſlibet trianguli ſimul
ſumptos æquales eſſe tribus angulis cuiuſq; alterius trianguli ſimul ſum-
c 32. primi. ptis: Quoniam tam illi tres, quam hi, c æquales ſunt duobus angulis re-
ctis. Vnde ſi duo anguli vnius trianguli fuerint æquales duobus angulis
alterius trianguli, erit & reliquus illius reliquo huius æqualis, æquiangu-
laque erunt ipſa triangula.

COROLLARIVM II.

CONSTAT etiam, in omni triangulo Iſoſcele, cuius angulus lateri-
bus æqualibus comprehenſus rectus fuerit, quemlibet reliquorum eſſe ſe-
d 32. primi. mirectum. Nam reliqui duo ſimul conficiunt vnum rectum, d cum omnes
tres ſint æquales duobus rectis: & tertius ille ponatur rectus. Quare e cum
e 5. pri. duo reliqui inter ſe ſint æquales, erit quilibet eorum ſemirectus. At verò
ſi angulus æqualibus lateribus contentus fuerit obtuſus, quemlibet alio-
rum eſſe ſemirecto minorem. Reliqui enim duo ſimul minores erunt vno
recto, &c. Si denique dictus angulus extiterit acutus, vtrumque reliquo-
rum maiorem eſſe ſemirecto. Quoniam reliqui duo ſimul maiores erunt
vno recto, &c.

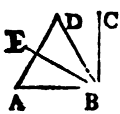
COROLLARIVM III.

PERSPICVVM quoque eſt, quemuis angulum trianguli æquila-
teri eſſe duas tertias partes vnius recti, vel tertiam partem duorum recto-
f 32. pri. rum. Duo enim anguli recti, f quibus æquales ſunt tres anguli trianguli
æquilateri, diuiſi in tres angulos, faciunt duas tertias partes vnius recti.

COROLLARIVM IV.

LIQVET etiam, ſi ab vno angulo trianguli æquilateri perpendicu-
laris ad latus oppoſitum ducatur, conſtitui duo triangula ſcalena, quorum
vnumquodque habet vnum angulum rectum prope perpendicularem;
alium duas tertias partes vnius recti, illum ſcilicet, qui eſt, & angulus trian-
guli æquilateri; reliquum denique tertiam partem vnius recti.

SCHOLIVM.

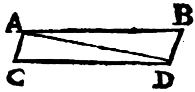


PORRO ex tertio corollario depromi poteſt me-
thodus, qua angulus rectus in tres angulos æquales di-
uidatur. Sit enim angulus rectus A B C, Super rectam
g 1. pri. *A B, g conſtituatur triangulum æquilaterum A B D.*
Et quia per corollarium 3. angulus A B D, facit duas
tertias partes anguli recti A B C; erit angulus C B D, pars tertia eiuſ-
h 9. pri. *dem recti. Diuiſo igitur angulo A B D, h biſariam, per rectam B E, erit*
vterq; angulus A B E, E B D, tertia quoque pars recti. Quare rectus
angulus A B C, diuiſus eſt in tres angulos æquales. Quod eſt pro-
poſitum.

THEOR.

THEOR. 23. PROPOS. 33. xxxiij.

RECTÆ lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas ad partes eaſdem coniungunt; Et ipſæ æquales, & parallelæ ſunt.



SINT rectæ lineæ A B, C D, æquales, & parallelæ; Ipſas autem coniungant ad eaſdem partes rectæ A C, B D. Dico A C, B D, æquales quoque eſſe, & parallelas. Ducatur enim recta A D. Quoniam igitur A D, incidit in parallelas A B, C D, *a* erunt anguli alterni B A D, C D A, æquales. Quare cum duo latera B A, A D, trianguli B A D, æqualia ſint duobus lateribus C D, D A, trianguli C D A, vtrumque vtrique, & anguli quoque dictis lateribus incluſi æquales; *b* erunt baſes B D, A C, æquales, & angulus A D B, angulo D A C, æqualis. Cum igitur hi anguli ſint alterni inter rectas A C, B D, *c* erunt A C, B D, parallelæ; Probatum autem iam fuit, eaſdem eſſe æquales. Rectæ ergo lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 29. primi.
b 4. pri.
c 27. primi.

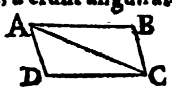
SCHOLIVM.

DIXIT Euclides, lineas æquales, & parallelas ad eaſdem partes debere coniungi, vt ipſæ coniungentes ſint & æquales & parallelæ. Nam ſi ad partes diuerſas coniungerentur, vt ad A, & D. Item ad B, & C, neque coniungentes lineæ eſſent parallelæ vnquam, ſed perpetuo ſe mutuo ſecarent, neque eſſent æquales, niſi raro admodum, vt ex ſequenti propoſitione conſtabit.

THEOR. 24. PROPOS. 34. xxxiv.

PARALLELOGRAMMORVM ſpatiorum æqualia ſunt inter ſe, quæ ex aduerſo & latera, & anguli; atque illa bifariam ſecat diameter.

SIT parallelogrammum A B C D, quale definiuimus definitione 35. Dico latera oppoſita A B, D C, inter ſe eſſe æqualia, nec non latera oppoſita A D, B C. Item angulos oppoſitos B, & D, æquales inter ſe eſſe, nec non & angulos oppoſitos D A B, & D C B: Denique ducta diametro A C, parallelogrammum ipſum bifariam ſecari. Cum enim A B, D C, ſint parallelæ, *d* erunt anguli alterni B A C, D C A, æquales. Rurſus quia A D, B C, ſunt parallelæ, *e* erunt & anguli alterni B C A, D A C, æquales. Itaq; cum anguli B A C, B C A, trianguli A B C, æquales ſint duobus angulis D C A, D A C, trianguli A D C, vterque vtrique, & latus A C, dictis



d 29. primi.
e 29. primi.

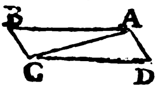
a 26. primi. A C, dictis angulis adiacens, commune vtrique triangulo; *a* erit recta A B, æqualis oppoſitæ rectæ D C, & recta B C, oppoſitæ rectæ A D, quod eſt primum. Erit rurſus eadem de cauſa angulus B, angulo D, æqualis. Et quia ſi æqualibus angulis B A C, D C A, addantur æquales anguli D A C, B C A, toti quoque anguli B A D,
b 2. pronun. B C D, *b* fiunt æquales; conſtat ſecundum, angulos nimirum oppoſitos eſſe æquales. Quoniam verò duo latera A B, B C, trianguli A B C, æqualia ſunt duobus lateribus C D, D A, trianguli C D A, vtrumque vtrique, & angulus B, angulo D, æqualis, vt iam
c 4. pri. oſtendimus; *c* erunt triangula A B C, C D A, æqualia, ideoque parallelogrammum A B C D, diuiſum erit bifariam à diametro A C, quod tertio loco proponebatur. Parallelogrammorum igitur ſpatiorum æqualia ſunt inter ſe, quæ ex aduerſo, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

APPOSITE dixit Euclides, ſolummodo parallelogramma à diametro diuidi bifariam, non autem & angulos. In Quadrato enim, & Rhombo duntaxat anguli etiam bifariam diuiduntur à diametro; At in figura Altera parte longiori, & in Rhomboide in partes inæquales. Quæ omnia perſpicua erunt, ſi prius oſtenderimus, quatuor haſce figuras, Quadratum, Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, eſſe parallelogramma. Hoc autem demonſtrabimus tribus ſequentibus theorematibus, quorum primum eſt.

OMNE quadrilaterum habens latera oppoſita æqualia, eſt parallelogrammum.

SINT in quadrilatero A B C D, latera oppoſita A B, D C, æqualia; Item oppoſita latera A D, B C. Dico A B C D, eſſe parallelogrammum; hoc eſt, lineas A B, D C, eſſe parallelas; Itemque lineas A D, B C. Ducta enim diametro A C, erunt duo latera A B, B C, trianguli A B C, æqualia duobus lateribus C D, D A, trianguli



d 8. pri. *C D A, vtrumque vtrique, & baſis A C, communis. Igitur d erit angulus B, angulo D, æqualis. Rurſus quia latera A B, B C, æqualia ſunt lateribus C D, D A, vtrumque vtrique, & anguli, B, D, oſtenſi*
e 4. pri. *æquales; e erit angulus B A C, angulo D C A, alterno æqualis, &*
f 24. primi. *angulus B C A, alterno angulo D A C. Quare f erunt A B, & D C, parallelæ; Item A D, & B C, quod eſt propoſitum.*

HINC conſtat, Rhombum, & Rhomboidem eſſe parallelogramma; quoniam oppoſita eorum latera ſunt inter ſe æqualia, vt manifeſtum eſt ex eorum definitionibus. Pari ratione quadratum, parallelogrammum erit, quod latera oppoſita habeat æqualia. Sunt enim omnia quatuor eius latera inter ſe æqualia, per eius definitionem.

Conuer-

Digitized by Google

Conuertit autem hoc theorema primam partem propoſitionis 34. vt patet.

Secundum theorema tale eſt.

OMNE quadrilaterum habens angulos oppoſitos æquales, eſt parallelogrammum.

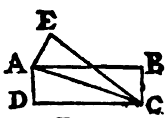
SINT in quadrilatero ABCD, anguli oppoſiti A, & C, æquales: item oppoſiti anguli B, & D. Dico ABCD, eſſe parallelogrammum: hoc eſt, lineas AB, DC, eſſe parallelas: Itemque lineas AD, BC. Nam ſi æqualibus angulis A, & C, addantur æquales anguli B, & D: a erunt duo anguli A, & B, duobus angulis D, & C, æquales & idcirco anguli A, & B, dimidium facient quatuor angulorum A, B, C, & D. Cum igitur hi quatuor æquales ſint quatuor rectis, vt ad propoſ. 32. demonſtrauimus, erunt duo A, & B, duobus rectis æquales. Quare AD, BC, b parallelæ ſunt. Eadem ratione erunt AB, DC, parallelæ. Erunt enim duo quoque anguli A, & D, duobus angulis B, & C, æquales, &c. Quod eſt propoſitum. Ex hoc etiam manifeſtum eſt, Rhomboidem eſſe parallelogrammum, cum eius anguli oppoſiti æquales ſint, per definitionem. Similiter quadratum, & altera parte longius. Sunt enim & eorum anguli oppoſiti æquales, cum ſint recti, ex eorum definitionibus.

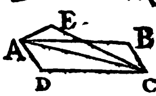


a 2. pronun.

b 28. primi.

HOC theorema conuertit ſecundam partem propoſitionis 34. vt conſtat. Tertia autem pars non poteſt conuerti. Nam & trapezium aliquod biſariam ſecari poteſt à diametro, & tamen non eſt parallelogrammum. Sit enim altera parte longius, vel Rhomboides ABCD, quod parallelogrammum eſſe oſtenſum eſt: in quo, ducta diametro AC, conſtituatur ſuper AC, triangulo ABC, æquale triangulum AEC, inuerſo ordine, ita vt latus CE, ſit æquale lateri AB, & AE, ipſi CB, vt in ſcholio propoſ. 22. docuimus: fiatq; trapezium AECD. Quoniam verò triangulum ABC, triangulo ADC, æquale eſt, c quod diameter AC, biſariam ſecet parallelogrammum DB: Erit & triangulum AEC, triangulo ADC, æquale: Ac proinde trapezium AECD, biſariam diuidatur à diametro AC.





c 34. primi.

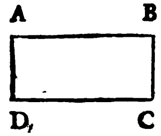
QVOD ſi quadrilaterum aliquod diuidatur biſariam ab vtraq; diametro, illud parallelogrammum erit, vt oſtendemus ad propoſ. 39. Quod quidem in nullo trapezio fieri poteſt.

Tertium Theorema huiuſmodi eſt.

OMNE quadrilaterum habens omnes angulos rectos, eſt parallelogrammum.

SINT

Digitized by Google

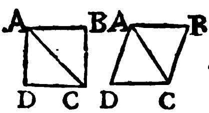


SINT in quadrilatero ABCD, omnes quatuor anguli recti. Dico ipſum eſſe parallelogrammum: hoc eſt, lineas AB, DC, eſſe parallelas: Itemque AD, BC. Quoniam enim duo anguli A, & B, æquales ſunt duobus rectis, cum ſint duo recti:

a 28.primi. a *erunt AD, BC, parallelæ. Eodem modo erunt AB, DC, parallelæ: atque adeo ABCD, parallelogrammum. quod eſt propoſitum.*

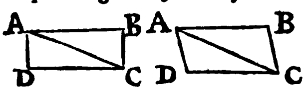
HINC rurſum conſtat, Quadratum, & altera parte longius, eſſe parallelogramma, cum eorum anguli omnes exiſtant recti, vt liquet ex eorum definitionibus.

HIS in hunc modum demonſtratis, Quadratum ſcilicet, Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, eſſe parallelogramma, facile oſtendemus, angulos Quadrati, & Rhombi, bifariam ſecari à diametro: Angulos verò figuræ, Altera parte longioris, & Rhomboidis, non bifariam, vt paulo ante monuimus. Sit enim Quadratum, vel Rhombus ABCD, in quo diameter AC.



Quoniam igitur duo latera BA, AC, trianguli BAC, æqualia ſunt duobus lateribus DA, AC, trianguli DAC, vtrumque vtrique, & baſis BC, baſi DC, (ſunt enim hæ

b 8.pri. *figuræ æquilateræ)* b *erunt anguli BAC, DAC, æquales. Quare angulus BAD, diuiditur bifariam. Eodem modo demonſtrabimus, reliquos angulos bifariam ſecari à diametro.*

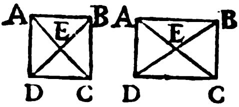


SIT rurſus Altera parte longius, vel Rhomboides ABCD, in quo diameter AC, ſitque maius latus AB. Quoniã igitur in triangulo ABC, latus AB, maius eſt latere BC, c *erit angulus BCA,*

c 18.pri.

d 29.primi. *maior angulo BAC. Eſt autem angulus BCA,* d *æqualis angulo DAC, alterno: quod BC, AD, parallelæ ſint. (Eſt enim ABCD, oſtenſum eſſe parallelogrammum.) Igitur & angulus DAC, maior erit angulo BAC. Atque propterea angulus BAD, inæqualiter diuiditur à diametro AC. Eadem eſt ratio aliorum angulorum. Quamobrem appoſitè Euclides in tertia parte huius propoſitionis dixit, ſolum parallelogramma bifariam à diametro ſecari, non autem & angulos.*

EODEM ferè pacto oſtendemus, duas diametros in Quadrato, & Altera parte longiore æquales eſſe; At verò in Rhombo, & Rhomboide inæquales, maiorem quidem eam, quæ angulos acutos, minorem verò eam, quæ obtuſos angulos diſpertit. Sit enim quadratum, vel altera parte longius ABCD, in quo diametri AC, BD, quas



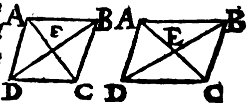
dico eſſe æquales. Cum enim duo latera AB, BC, trianguli ABC,

æqualia

Digitized by Google

æquales ſint duobus lateribus A B, A D; trianguli B A D: vtrumque vtrique; & angulus A B C, angulo B A D, quia vterque rectus: a erit baſis A C, baſi B D, æqualis: Ac proinde diametri in quadrato, & figura altera parte longiore æquales ſunt. a 4. pri.

SIT rurſus Rhombus, vel Rhomboides, A B C D, in quo diametri A C, B D; ſitq; angulus B A D, maior; A B C, minor. Non enim æquales ſunt, quia alias vterque eſſet rectus, cum ambo b æquales ſint duobus rectis; quod eſt abſurdum, & contra definitiones Rhombi, & Rhomboidis. Dico diametrum B D, maiorem eſſe diametro A C. b 29. primi.



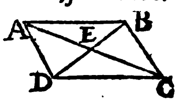
Quoniam enim duo latera A B, A D, trianguli B A D, æqualia ſunt duobus lateribus A B, B C, trianguli A B C, vtrumque vtrique, & angulus B A D, angulo A B C, maior exiſtit; c erit baſis B D, maior baſe A C. quod eſt propoſitum. Ex quo manifeſtum eſt, cur in propoſitione 33. Euclides aſſeruerit, eas tantum lineas, quæ coniungunt parallelas æquales ad eaſdem partes, æquales eſſe, vt ibidem annotauimus. Nam in Rhombo, & Rhomboide rectæ A C, B D, inæquales ſunt, licet coniungant parallelas æquales A B, D C: quia non ad eaſdem partes ipſas coniungunt, vt perſpicuum eſt. c 24. primi.

IN omni tamen parallelogrammo diametri ſe mutuo bifariam diuidunt. Cum enim duo anguli E A D, E D A, trianguli A E D, d æquales ſint alternis angulis E C B, E B C, trianguli B E C, vterque vtrique; & e latus A D, æquale lateri B C, oppoſito in parallelogrammo A B C D, quorum vtrumque æqualibus adiacet angulis; f Erit & A E, recta rectæ C E, & recta D E, rectæ B E, æqualis. Quare vtraque diameter bifariam diuiditur in puncto E. d 29. primi. e 34. primi. f 26. primi.

HVIVS autem, quod modo diximus, conuerſum etiam demonſtrabimus, videlicet.

OMNE quadrilaterum, in quo diametri ſe mutuo bifariam diuidunt, parallelogrammum eſt.

IN quadrilatero enim A B C D, diametri A C, B D, ſe mutuo bifariam diuidant in E. Dico A B C D, parallelogrammũ eſſe. Cum enim latera A E, E B, trianguli A E B, æqualia ſint lateribus C E, E D, triãguli C E D, & anguli contenti ad verticem E,



g æquales quoque; h erunt & baſes A B, C D, æquales, & angulus A B E, angulo alterno C D E, æqualis. i Quare rectæ A B, C D, parallelæ ſunt. Eadem ratione parallelæ oſtendentur A D, C B. Parallelogrammum ergo eſt A B C D. g 15. pri. h 4. pri. i 27. pri.

ITAQVE, ſi quis expedite parallelogrammum deſcribere velit, ducat duas lineas A C, B D, vtcunque ſe in E, interſecantes. Si namque tam E A, E C, inter ſe, quam E B, E D, inter ſe æquales abſcindet,

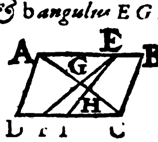
Digitized by Google

conſtituent ducta A B, B C, C D, D A, parallelogrammum, vt hic monſtratum eſt. Quod ſi anguli ad E, ſint recti, & omnes quatuor ... cta E A, E C, E B, E D; inter ſe æquales, conſtitutum parallelogrammum erit quadratum, propterea quod octo anguli ad A, B, C, D, ſu... ſemirecti, vt facile demonſtrabitur per 5. & 32. huius.

HVC quoque referri poteſt hoc theorema.

RECTA linea ſecans diametrum parallelogrammi bifariam quomodocunque, diuidit parallelogrammum bifariam quoque: & recta linea diuidens parallelogrammum bifariam quouis modo, ſecat quoque diametrum bifariam.

IN parallelogrammo A B C D, diametrum A C, bifariam ſec... recta E F, in puncto G. Dico parallelogrammum diuidi bifariam.
a 29. primi. *Quoniam enim angulus E A G,* a *æqualis eſt angulo alterno B C ...*
& b *angulus E G A, angulo F G C. Eſt autem & latus A G, late...*
b 15 pri.



C G, æquale, per hypotheſin, quæ ambo æqualibus
c 26 primi. *angulis adiacent;* c *erunt & latera E G, F G æqualia. Quare cum latera A G, G E, æqualia ſint lateribus C G, G F, & anguli quoque contenti æquales;*
d 4. pri. d *erunt triangula A G E, C G F, æqua-*
e 2. pronun. *lia. Addita igitur communi quantitate B C G E,* e *erit triangulum A B C, trapezio B C F E, æquale: Sed triangulum A B C,* f *dimi-*
f 34. primi. *dium eſt parallelogrammi A B C D. Igitur & trapezium dimidium erit eiuſdem parallelogrammi, ideoq; recta E F, parallelogrammum bifariam ſecat.*

SECET iam E F, parallelogrammum bifariam; Dico & diametrum A C, bifariam ſecari in G. Si enim diameter A C, non bifariam
g 10. primi. *diuiditur in G,* g *diuidatur bifariam in alio puncto, vt in H, per quod ducatur recta E H I. Erit ergo, vt iam demonſtrauimus, E I C B, trapezium dimidium parallelogrammi A B C D, atque adeo æquale trapezio E F C B, quod etiam dimidium ponitur eiuſdem parallelogrammi, pars toti, quod eſt abſurdum. Diuiditur igitur A C, bifariam in G, & non in alio puncto, quod erat propoſitum.*

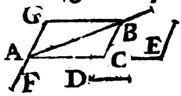
HINC facile colligitur, ſi in latere aliquo parallelogrammi cuiuſque punctum ſignetur, vel etiam intra parallelogrammum, vel extra, quod tamen non ſit in diametro, niſi ipſum ſecet diametrum bifariã; qua ratione ab illo puncto linea duci debeat, quæ parallelogrammum bifariam ſecet. Si enim diameter ducatur, & a puncto dato per medium punctum diametri recta ducatur, factum erit, quod proponitur. Vt ſi punctum ſit E, in latere A B, ducenda eſt recta E F, per G, punctum, in quo diameter A C, bifariam diuiditur; & ſic de aliis punctis

DEMONSTRAT quoque hic Peletarius problema non iniucundum, videlicet.

INTER

INTER duas lineas rectas infinitas angulum facientes, lineam rectam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum altera illarũ faciat angulum cuiuis angulo dato æqualem. Oportet autẽ hunc angulum datum, & eum, qui lineis datis continetur, minores eſſe duobus rectis.

DVÆ rectæ infinitæ A B, A C, contineant angulum B A C, ſitq; data recta finita quæcunque D, & angulus datus E, hac lege, vt duo anguli E, & B A C, minores ſint duobus rectis. Oportet igitur inter rectas A B, A C, collocare rectam æqualem quidem rectæ D; cum alterutra verò illarum, nimirum cum A C, facientem angulum æqualem angulo dato E. a Fiat angulus C A F, æqualis angulo E, & producta F A, ad G, b ſit A G, æqualis rectæ D; & per G, c ducatur G B, parallela ipſi A C, ſecans A B, in B: Deinde per B, ducatur B C, parallela ipſi A G, ſecans A C, in C. Dico rectam B C, collocatam inter rectas A B, A C, æqualem eſſe rectæ D, angulumq; B C A, angulo E. Cum enim parallelogrammum ſit per conſtructionem, A C B G, d erit recta B C, rectæ G A, æqualis: At G A, æqualis eſt, per conſtructionem, rectæ D. Igitur & B C, rectæ D, æqualis erit. Rurſus e quia angulus B C A, angulo alterno C A F, æqualis eſt; & eidem angulo C A F, æqualis eſt, per conſtructionem, angulus E; erunt anguli E, & B C A, æquales. Quod eſt propoſitum. Cæterum ex conſtructione manifeſtum eſſe cuilibet poteſt, cur duo anguli dati minores eſſe debeant duobus rectis. Nam alias non fieret triangulum A B C, ſi anguli B A C, & B C A, æquales eſſent duobus rectis, vel maiores, vt conſtat ex propoſ. 17. vel 32.



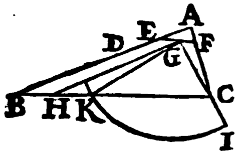
a 23. primi.
b 3. pri.
c 31. pri.
d 34. primi.
e 29. primi.

SCHOLIVM.

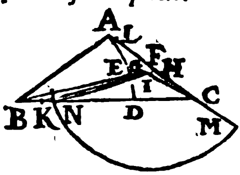
NON alienum erit à noſtro inſtituto, adiicere quædam hoc loco ad lineas intra triangulum conſtitutas pertinentia, quæ à Pappo Alexandrino lib. 3. Mathematicarum collectionũ demonſtrantur: quemadmodum facturos nos recepimus ad propoſ. 21. Primum igitur in omni triangulo, quod non ſit æquilaterum, vel Iſoſceles habens baſim vtrouis latere minorem, non ſolum à duobus punctis baſis conſtitui poſſunt duæ rectæ intra triangulum, quæ ſimul ſumptæ maiores ſint duobus lateribus ſimul ſumptis, vt à Proclo in triangulis rectangulis, vel obtuſangulis oſtenſum eſt ad propoſ. 21. ſed etiam æquales.

SIT enim primum triangulum A B C, habens latus A B, latere A C, maius, ſitq; B D, dimidium vtriuſque lateris A B, A C, ſimul ſumpti: Sumpto autem inter A, D, puncto E, vtcunq;, agatur E F, ipſi B C, parallela; & ex quouis puncto G, lateri A B, parallela ducatur G H, rectaq; iungatur G C. Et quoniam E A, A F, f maiores ſunt, quam E F: Item C F, F G, maiores, quam G C: erunt E A, A C, F G, ſimul maiores, quam E F, G C, ſimul: ablataq; communi F G, erunt E A, A C,

f 20. primi.



ſimul maiores, quam E G, G C, ſimu
ac proinde multo maiores, quam G C, ſo-
la. Producatur ergo G C, fiatq́; G I, ipſi
E A, A C, ſimul æqualis. Quia verò B E
maior eſt, quam vtraque E A, A C, ſi-
mul, quod B E, ſuperet B D, dimidium
vtriuſque B A, A C, ſimul, at E A, A C
ſimul deficiant à dimidio earundem, nimirum ab vtraque D A, A C
ſimul: erit quoque B E, maior, quam G I, quæ ipſis E A, A C, ſimu
a 34.pri eſt æqualis. Cum igitur a ipſi B E, æqualis ſit G H, in parallelogram-
mi. mo B E G H: erit quoque G H, maior, quam G I. Si igitur centro G,
& interuallo G I, circulus deſcribatur, ſecabit is rectam G H, ac pro-
pterea & ipſam C H, prius ſecabit in K. Connectatur G K. Dico
vtramque G H, G K, ſimul æqualem eſſe vtrique A B, A C, ſimul. Id
quod ex conſtructione perſpicuum eſt. Nam G H, ipſi B E, æqualis eſt,
& G I, hoc eſt, G K, ipſis E A, A C, ſimul. Atque hoc infinitis modis
fieri poteſt, prout punctum E, remotius à D, ſumptum fuerit, & pun-
ctum G, à puncto E: hoc eſt, prout tam A D, quam E F, infinitis in
punctis ſecari poteſt.



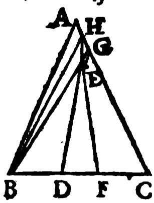
SIT deinde Iſoſceles A B C, habens
baſim B C, vtrouis latere maiorem. De-
ſcripto ex centro B, per A, arcu A D, ſecan-
te rectam B C, in D, ducatur vtcunque re-
cta B F, ſecans arcum in E, & latus A C,
in F: & in E F, per quoduis punctum G,
ipſi B C, parallela agatur G H, & per
quodcunque eius punctum I, ipſi B F, parallela ducatur I K, rectaq́;
iungatur I C: atque ipſi E G: æqualis abſcindatur A L. Erit igitur
B G, ipſis A B, A L, ſimul æqualis, at L C, minor quam B E, ſiue A B,
b 34.pri & ob id multo minor, quam B G. Et quia ipſi B G, b æqualis eſt I K,
mi. in parallelogrammo B G I K: erit quoque I K, ipſis A B, A L, ſimul
c 20.pri æqualis, maior autem, quam L C. Itaque c quia G F, F H, maiores
mi. ſunt, quam G H: & H C, H I, maiores, quam I C: erunt G F, F C, H I,
ſimul maiores, quam G H, I C: & ablata communi H I, erunt reliquæ
G F, F C, ſimul maiores, quam G I, I C, ſimul: ac proinde appoſita
communi B G, fient B F, F C, ſimul maiores, quam B G, G I, I C, ſi-
d 20.pri mul. Sed ipſis B F, F C, d maiores ſunt B A, A C, ſimul. Ergo multo
mi. maiores erunt B A, A C, ſimul, quam B G, G I, I C, ſimul. Cum ergo
B G, ipſis B A, A L, ſimul æqualis ſit, erit reliqua L C, maior, quam
reliqua G I, I C, ſimul, ac proinde multo maior, quam I C, ſola. Pona-
tur I M, (producta I C) ipſi L C, æqualis. Et quia I K, oſtenſa eſt
maior, quam L C, hoc eſt, quam I M: ſi ex centro I, per M, arcus circu-
li deſcribatur, ſecabit is rectam I K, ac proinde prius ipſam C K, ſe-
cabit in N. Connectatur I N. Dico vtramque I K, I N, ſimul æqua-
lem eſſe

Digitized by Google

lem eſſe vtrique A B, A C, ſimul. Id quod ex conſtructione patet. Eſt
namque I K, ipſis A B, A L, ſimul æqualis, & I N, hoc eſt, I M, ipſi
L C, æqualis. Atque hoc infinitis modis fieri poteſt: cum B F, infinitis
modis duci poſſit: & tam E F, quam G H, infinitis modis ſecari.

CONSTAT autem, ſi intra idem triangulum A B C, ducantur duæ rectæ, quæ rectas H G, G K, in priori triangulo, vel rectas K I,
I N, in poſteriori includant, eas maiores fore ſimul ſumptas lateribus
A B, A C, ſimul ſumptis: quippe quæ a maiores forent rectis H G, a 21. primi.
G K, in priori triangulo, vel rectis K I, I N, in poſteriori.

AT verò in triangulo æquilatero, vel Iſoſcele habente baſim vtroque latere minorem, non poſſe intus conſtitui duas lineas maiores, vel
æquales ſimul ſumptas duobus lateribus ſimul ſumptis, ſed quaſcunque interiores eſſe minores, ita oſtendi poteſt. In triangulo enim ABC,
cum duo latera A B, A C, æqualia, & baſis B C, non maior, ſed vel
æqualis, vel minor; ita vt angulus A, maior non

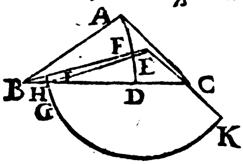


ſit, quam angulus B, vel C, b ſed vel æqualis, vel b 5. vel
minor: conſtituantur duæ rectæ D E, E F, vtcunque, 18. pri.
quas dico minores eſſe ſimul ſumptas duobus lateribus A B, A C, ſimul ſumptis. Producatur enim
D E, ſecans latus A C, in G, iungaturque recta G B.
Quoniam igitur c duo anguli A B C, & C, æquales c 5. pri.
ſunt, eſtque A B C, maior angulo G B C, erit quoque C, maior angulo G B C. Eſt d autem & angulus G D B, angulo d 16. primi.
C, maior, externus interno. Igitur multo maior erit angulus G D B,
angulo G B C; e ac proinde latus G B, latere G D, maius erit. Quia e 19. primi.
verò f angulus B G A, maior eſt angulo C, externus interno; angulusque C, vel æqualis eſt angulo A, vel maior, vt oſtendimus: erit quo- f 16. pri
que angulus B G A, angulo A, maior. Quare g latus A B, latere g 19. primi.
G B, maius erit: Sed recta G B, oſtenſa eſt maior, quam G D, ac proinde multo maior, quam D E. Igitur latus A B, multo etiam maius
erit, quam D E. Eadem ratione, ſi F E, producatur ſecans A C, in H,
iungaturque recta H B, oſtendemus latus A B, ac proinde & A C, maius eſſe, quam F E. Quocirca latera A B, A C, ſimul maiora ſunt duabus rectis D E, E F, ſimul ſumptis. Quod ſi F E, producta ſecaret latus A B, demonſtraremus eodem modo, latus A C, maius eſſe recta E F.

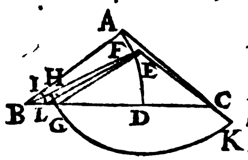
IAM verò, ſi admirabile videatur iis, qui Geometriæ ignari ſunt, in illis, quæ diximus, triangulis duci poſſe lineas interiores, quæ ſimul ſumptæ maiores ſint, vel æquales duobus lateribus ſimul ſumptis; admirabilius ſane erit, intra eadem illa triangula conſtitui poſſe duas lineas, quarum ſingulæ ſingulis lateribus maiores ſint, vel æquales. Sint ergo primum conſtituendæ ſingulæ lineæ ſingulis lateribus maiores in triangulo A B C, cuius latus A B, minus non ſit latere A C, at latus B C, vtroque latere A B, A C, maius. Deſcripto ex centro B, ar-

cu circuli A D, ſumatur quoduis punctum E, inter arcum A D, & latus A C, ducaturq; recta B E, ſecans arcum in F; ita vt B E, maior ſit, quam B F, hoc eſt, quam B A, iunganturq; E C. Quia verò a B E, E C, ſimul minores ſunt, quam A B, A C ſimul, eſtque B E, maior, quam A B, erit E C, multo minor, quam A C. Producta igitur E C, fiat E K, ipſi A C, æqualis, ac propterea minor, quam E B; deſcribaturque ex E, per K, arcus circuli, qui rectam E B, ſecabit, ac proinde & ipſam C B, prius ſecabit in G. Sumpto denique inter B, & G, quouis puncto H, iungatur recta E H, ſecans arcum in I: factumque erit, quod proponitur. Nam B E, maior eſt, quam B A, & E H, maior, quam E I, hoc eſt, quam E K, vel A C.

a 21. primi.



DEINDE ſint ſingulæ lineæ ſingulis lateribus æquales conſtituendæ intra idem triangulum: fiatq; eadem conſtructio, dempta linea E H, ſed arcus K G, ſecet rectam E B, in H. Et latus B A, latere A C. ponatur maius, eritq; B E, recta maior, quam A B, cum maior ſit, quam B F, quæ æqualis eſt ipſi A B. Sumpta igitur E I, æqualis ipſi A B, cadet punctum I, inter B, & H; quandoquidem E B, maior eſt, quam A B, & E H, minor, quam A B. Ex E, per I, deſcribatur arcus circuli ſecans B C in L, iunganturque rectæ E L, E G: factumque erit, quod proponitur. Nam E L, ipſi E I, hoc eſt, ipſi A B, æqualis eſt, & E G, ipſi E K, hoc eſt, ipſi A C.



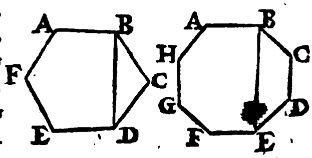
PRÆTER hæc demonſtrat Pappus, intra eadem, quæ diximus, triangula conſtitui poſſe duas rectas duobus lateribus maiores, & quæ habeant ad eadem latera proportionem datam, quæ tamen dupla proportione minor ſit: quod incredibile cuipiam videri poſſit. Quæ res hoc loco demonſtrari non poteſt, cum ex proportionibus pendeat.

EX PROCLO.

IN omni figura rectilinea latera habente numero paria, ſi quidem fuerit æquilatera, & æquiangula: erunt duo quælibet latera oppoſita, parallela inter ſeſe.

LATERA oppoſita dicuntur illa duo, quæ ex vtraq; parte latera habent æqualia numero: vt in hexagono A B C D E F, latera oppoſita erunt A B, E D: quoniam tam ad partes A, & E, duo ſunt latera, quam ad partes B, & D. In octogono verò A B C D E F G H, latera oppoſita erunt A B, F E, quia tam ad partes A, & F, tria ſunt latera, quam ad partes B, & E. Et ſic in aliis figuris æquilateris parium laterum

laterum, ex vtraque parte oppoſitorum laterum erunt tot latera, quot ſunt in dimidio numero laterum, minus vno. Vt in quadrangulo erit nullum, in hexagono erunt duo, in octogono tria, in decagono quatuor, in figura 12. laterum quinque, &c. Dico igitur qualibet latera oppoſita eſſe parallela; A B, nimirum ipſi E D, in hexagono; & A B, ipſi F E, in octogono, & ſic de cæteris. Connectantur enim duo extrema oppoſitorum laterum ad eaſdem partes linea recta, qualis eſt in hexagono B D, & in octogono B E. Et quoniam, vt ad 32 propoſ. demonſtrauimus, ſex anguli hexagoni æquales ſunt octo rectis, erunt tres anguli B, C, D, eiuſdem hexagoni æquales quatuor rectis, propterea quod omnes anguli ponuntur æquales; Sunt autem anguli B C D, C B D, C D B, trianguli B C D, a duobus rectis æquales. Reliqui igitur anguli A B D, E D B, duobus rectis æquales erunt; Quare b paralleLæ erunt A B, & E D. Ruſus



a 32. primi.
b 28. primi.

quia octo anguli octogoni æquales ſunt duodecim rectis, erunt quatuor eius anguli B, C, D, E, ſex rectis æquales: Sunt autem quatuor anguli quadrilateri B C D E, æquales quatuor rectis. Igitur duo reliqui anguli A B E, F E B, duobus erunt rectis æquales, c atque adeo A B, F E, parallelæ erunt. Eodem modo demonſtrabitur, in omnibus alijs figuris huiuſmodi, angulos duos ad lineam rectam extrema oppoſitorum laterum coniungentem exiſtentes, duobus eſſe rectis æquales. Nam in decagono aufert ea linea pentagonum, cuius anguli æquales ſunt ſex rectis: At quinque anguli decagoni æquales ſunt octo rectis. Ablatis igitur ſex, relinquuntur duo recti. In figura æquilatera, & æquiangula duodecim laterum eadem linea abſcindet hexagonum, cuius anguli ſunt octo rectis æquales: At ſex anguli totius figuræ æquales ſunt decem rectis. Demptis igitur octo, remanent duo recti, &c. c 28. primi.

QVAMVIS autem omnis figura æquiangula parium laterum habeat latera oppoſita parallela, vt oſtendimus; tamen ſola quadrilatera figura latera oppoſita habens parallela, ab Euclide, & alijs Geometris parallelogrammum dici conſueuit, proptereaq́; in definitionibus, Parallelogrammum diximus eſſe figuram quadrilateram, &c.

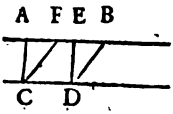
THEOR. 25. PROPOS. 35. XXXV.

PARALLELOGRAMMA ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.

INTER duas parallelas AB, CD, ſuper baſi CD, exiſtant duo parallelogramma CDEA, CDBF. (Dicuntur autem paral-

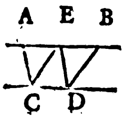
Digitized by Google

lelogramma in eiſdem eſſe parallelis, quando duo latera oppo
ta partes ſunt parallelarum, vt in exemplo propoſito cernitu
Dico ipſa parallelogramma inter ſe eſſe æqualia, non quoad a
gulos & latera, ſed quoad aream, ſeu capacitatem. Cadat enim
primo punctum F, inter A, & E. Quoniam igitur in parallelo



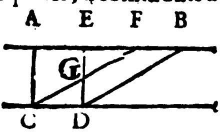
a 34. primi. grammo C D E A, recta A E, *a* æqualis eſt recta
C D, oppoſitæ; & eidem C D, æqualis eſt F B
in parallelogrammo C D B F, oppoſita; Erun
b 1. pronun. A E, *b* F B, inter ſe æquales. Dempta igitur com
muni F E, *c* remanebit A F, ipſi E B, æqualis
c 3. pronun. *d* Eſt autem & A C, ipſi E D, oppoſitæ æqualis in parallelogram
mo C D E A; *e* & angulus B E D, angulo F A C, externus interno.
d 34. primi. *f* Quare triangulum F A C, triangulo B E D, æquale erit. Addito
igitur communi trapezio C D E F, *g* fiet totum parallelogram
e 29. primi. mum C[illegible] E A, toti parallelogrammo C D B F, æquale. Quod eſt
propoſitum.

f 4. pri. CADAT ſecundo punctum F, in punctum E. Dico rurſus,
g 2. pronun. parallelogramma C D E A, C D B E, æqualia eſſe. Erunt enim, vt



h 4. pri. prius, rectæ A E, E B, æquales, nec non & anguli
B E D, E A C; atque adeo *h* triangula, E A C, B E D,
æqualia. Addito igitur communi triangulo C D E,
i 2. pronun. *i* fient parallelogramma C D E A, C D B E, æ-
qualia.

CADAT tertio punctum F, vltra E, ita vt recta C F, ſecet re-
ctam D E, in G. Quoniam igitur, vt prius, rectæ A E, F B, ſunt
k 2. pronun. æquales; ſi communis addatur E F; *k* erit tota A F, toti E B, æqua-



l 4. pri. lis, nec non & anguli B E D, F A C, æqua-
les erunt; atq; adeo *l* triangulum F A C,
triangulo B E D, æquale. Ablato ergo
m 3. pronun. communi triangulo E G F, *m* remane-
bit trapezium A E G C, trapezio FGDB,
æquale. Quocirca addito communi triangulo C D G, fiet totum
parallelogrammũ C D E A, toti parallelogrammo C D B F, æqua-
le. Parallelogramma igitur ſuper eadem baſi, & in eiſdem paral-
lelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

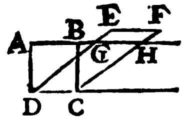
CONVERTEMVS facile hanc propoſitionem, hoc modo.

Parallelogramma æqualia ſuper eandem baſin, ad
eaſdemq; partes cõſtituta, erunt inter eaſdem parallelas.

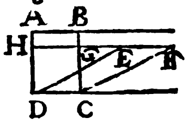
SINT duo parallelogramma æqualia A B C D, C D E F, ſuper eandem baſin C D, & ad eaſdem partes. Dico rectam A B, productam in directum iacere ipſi E F, & propterea ipſa parallelogramma

inter

inter eaſdem eſſe parallelas. Aliàs enim A B, producta vel cadet infra E F, vel ſupra. Cadat primò infra, qualis eſt A H. Erit igitur parallelogrammum C D G H, a æquale parallelogrammo A B C D; Ponitur autem eidem parallelogrammo A B C D, æquale parallelogrammũ C D E F. Quare parallelogramma C D E F, C D G H, æqualia erunt, totum & pars, quod eſt abſurdum. Non ergo cadet A B infra E F. a 35. primi.



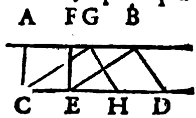
CADAT ſecundò A B, producta ſupra E F. Cadet igitur F E, protracta infra AB. Quare, vt prius, erunt parallelogramma A B C D, C D H G, æqualia, totum & pars, quod eſt abſurdum. Idem abſurdum conſequeretur, ſi C F, D E, producerentur vſque ad A B, protractã. Eademq; demonſtratio conueniet omnibus caſibus, qui occurrere poſſunt, hoc eſt, ſiue punctum E, ſit vltra B, ſiue non, vt perſpicuum eſt. Non ergo cadet A B, ſupra E F; ſed nec infra, vt demonſtratum eſt; ergo producta in directum iacet ipſi E F; ac proinde parallelogramma A B C D, C D E F, in eiſdem ſunt parallelis.



THEOR. 26. PROPOS. 36. xxxvj.

PARALLELOGRAMMA ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.

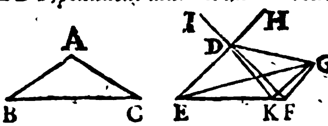
SINT duo parallelogramma A C E F, G H D B, ſuper æquales baſes C E, H D, inter eaſdem parallelas A B, C D. Dico ea eſſe æqualia. Connectantur enim extrema rectarum C E, G B, ad eaſdem partes lineis rectis C G, E B. Quoniam igitur recta C E, æqualis ponitur rectæ H D, & eidem H D, *b* æqualis eſt G B, in parallelogrammo G H D B, oppoſita; erunt C E, G B, *c* æquales inter ſe: Sunt autem & parallelæ, per hypotheſin. Quare & C G, E B, ipſas coniungentes, *d* parallelæ erunt, & æquales, ideoque C E B G, parallelogrammum erit. Itaque cùm parallelogramma A C E F, G C E B, ſint inter eaſdem parallelas, & ſuper eandem baſin C E, *e* erit parallelogrammum A C E F, parallelogrammo G C E B, æquale. Rurſus quia parallelogramma G C E B, G H D B, ſunt inter eaſdem parallelas, & ſuper eandem baſin G B, *f* erit quoque parallelogrammum G H D B, eidem parallelogrammo G C E B, æquale. Quare & parallelogramma A C E F, G H D B, *g* inter ſe æqualia erunt. Parallelogramma igitur ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, &c. Quod oſtendendum erat.



b 34. primi.
c 1. pron.
d 33. primi.
e 35 primi.
f 35. primi.
g 1. pronun.

Digitized by Google

a 13 pri- *duobus* a *rectis æquales. Igitur anguli E D G, E D F, angulis E D G,*
mi. *G D H, æquales erunt. Quare ablato communi angulo E D G,* b *re-*
b 3 pro- *manebit angulo E D F, æqualis angulus G D H: Eſt autem eidem*
nun. *angulo E D F,* c *æqualis angulus H D I. Igitur & anguli G D H,*
c 15 pri- *H D I, æquales erunt; atque adeò angulus G D H, dimidium erit to-*
mi. *tius anguli G D I. Rurſus quia latera D F, D G, ſunt æqualia in*
d 5. pri- *triangulo D F G;* d *erunt anguli D F G, D G F, æquales; qui cùm*
mi. *æquales* e *ſint externo angulo G D I, erit vterlibet eorum, nempe*
e 32. pri *D G F, dimidium anguli G D I: Oſtenſum eſt autem, angulũ G D H,*
mi. *dimidium quoque eſſe eiuſdem anguli G D I.* f *Quare anguli G D H,*
f 7 pro- *D G F, æquales erunt. Et quia ſunt alterni inter E H, F G;* g *erunt*
nun. *E H, F G, parallelæ. Quamobrem* h *triangula D E G, D E F, æqua-*
g 27. pri *lia erunt, cùm habeant eandem baſin D E, ſintq́ inter eaſdem pa-*
mi. *rallelas D E, F G. Quoniam verò triangulum D E G,* i *æquale eſt*
h 37. pri *triangulo A B C, propterea quòd latera D E, D G, æqualia ſunt lateri-*
mi. *bus A B, A C, & angulo A, æqualis angulus E D G; erit & triangu-*
i 4. pri- *lum A B C, triangulo D E F, æquale, quod eſt propoſitum.*
mi. *SINT deinde anguli A, & E D F, duobus rectis maiores. Dico*
triangulum A B C, quod maiorem habet angulum, minus eſſe trian-
k 23. pri *gulo D E F. Producatur enim E D, ad H, & F D, ad I;* k *fiatq́ an-*
mi. *gulus E D G, æqualis angulo A,* l *& recta D G, rectæ D F, ſeu A C,*
l 3. pri- *æqualis, ducanturq́ rectæ E G, G F. Quoniam igitur anguli A, &*
mi. *E D F, ponuntur maiores duobus rectis, erunt & anguli E D G, E D F,*

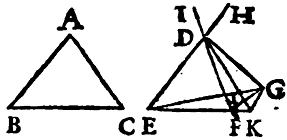


duobus rectis maiores: Sunt
autem anguli E D G, G D H,
m 13. pri *m æquales duobus rectis. Igitur*
mi. *anguli E D G, E D F, maiores*
ſunt angulis E D G, G D H.
Quare ablato communi E D G, remanebit angulus E D F, maior an-
n 15 pri- *gulo G D H. Quoniam verò* n *angulus E D F, angulo H D I, æqualis*
mi. *eſt, erit quoque H D I, maior quàm G D H; atque adeò G D H, minor,*
quàm dimidium anguli G D I. Rurſus quia latera D G, D F, æqualia
o 5. pri- *ſunt:* o *erunt anguli D F G, D G F, æquales: qui cùm ſint* p *æquales*
mi. *externo G D I, erit vterius eorum, nempe D G F, dimidium anguli*
p 32. pri *G D I: Oſtenſum eſt autem, angulum G D H, minorem eſſe dimidio*
mi. *eiuſdem G D I. Quare D G F, maior erit, quàm G D H. Abſcinda-*
q 23. pri *tur ex angulo D G F, angulus D G K,* q *æqualis angulo alterno G D H.*
mi. *Erit ergo G K,* r *parallela ipſi D E, ſecabitq́ G K, rectam E F. Du-*
r 27 pri *catur ex D, ad K, vbi G K, ſecat rectam E F, recta D K. Erit igitur*
mi. *triangulum D E G,* s *æquale triangulo D E K. Quoniam autem*
s 37. pri *triangulum D E G,* t *æquale eſt triangulo A B C, propterea quòd*
mi. *latera D E, D G, æqualia ſunt lateribus A B, A C, & angulo A,*
t 4. pri. *angulus E D G, æqualis; erit & triangulum A B C, triangulo D E K,*
v 9. pron *æquale. Cùm igitur D E K,* u *minus ſit triangulo D E F; erit quo-*
que

Digitized by Google

que ABC, triangulum triangulo DEF, minus. Quod eſt propoſitum.

SINT tertiò anguli A, & EDF, duobus rectis minores. Dico triangulum ABC, quod maiorem habet angulum, maius eſſe triangulo DEF. Producatur ED, ad H, & FD, ad I; a fiatq; angulus EDG, æqualis angulo A, b & recta DG, rectæ DE, ſeu AC; ducanturq; rectæ EG, FG. Quoniam igitur anguli A, & EDF, ponuntur minores duobus rectis, erunt quoque anguli EDG, EDF, duobus rectis minores. Sunt autem anguli c EDG, GDH, duobus rectis æquales. Igitur EDG, EDF, minores ſunt, quàm EDG, GDH; demptoq; communi EDG, remanebit EDF, minor, quàm GDH. Eſt autem EDF, d æqualis ipſi HDI. Quare & HDI, minor erit, quàm GDH; atque adeò GDH, maior eſt dimidio anguli GDI. Quoniam autem DGF, dimidium eſt eiuſdem anguli GDI, vt iam ſuprà oſtenſum fuit; erit GDH maior, quàm DGF. Fiat igitur angulus DGK, e æqualis angulo GDH, ducta recta GK, quæ ſecabit rectam EF, protractam in K; & ducatur recta DK. Erit ergo, vt prius, GK, f parallela ipſi DE; g triangulumq; DEG, triangulo DEK, æquale: Eſt autem iterum DEG, h æquale ipſi ABC. Igitur & ABC, æquale eſt ipſi DEK. Quocirca cùm DEK, i maius ſit, quàm DEF; erit & ABC, maius, quàm DEF. Quod demonſtrandum erat.



a 23. pri.
b 3. pri.
c 13. pri.
d 15. pri.
e 23. pri.
f 27. pri.
g 37. primi.
h 4. pri.
i 9. pron.

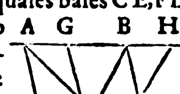
Ex his perſpicuum eſt, cur Euclides in propoſ. 24. ſolùm collegerit inæqualitatem baſium, non autem triangulorum, vt ibidem admonuimus.

THEOR. 28. PROPOS. 38.

38.

TRIANGVLA ſuper æqualibus baſibus conſtituta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia.

INTER parallelas AB, CD, & ſuper æquales baſes CE, FD, ſint conſtituta triangula ACE, BFD. Dico ipſa eſſe æqualia. k Ducatur enim EG, parallela ipſi AC, & DH, ipſi BF: Eruntque l parallelogramma ACEG, BFDH, æqualia. Cùm igitur horum m dimidia ſint triangula ACE, BED; n erunt hæc inter ſe æqualia. Triangula ergo ſuper æqualibus baſibus, &c. Quod erat oſtendendum.



k 31. pri.
l 36. pri.
m 34. primi.
n 7. pronun.

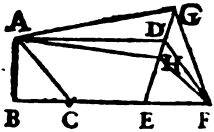
SCHOLIVM.

CONVERSA huius oſtendetur ab Euclide propoſ. 40.

COLLIGITVR autem ex hac propoſitione, ſi à quouis angulo trianguli dati linea recta ducatur diuidens latus oppoſitum bifariam,

xl. THEOR. 30. PROPOS. 40.

TRIANGVLA æqualia ſuper æqualibus baſibus, & ad eaſdem partes conſtituta, & in eiſdem ſunt parallelis.



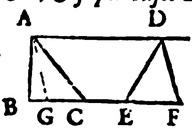
SINT duo triangula æqualia A B C, D E F, ſuper baſes æquales B C, E F (quæ in eadem recta linea collocentur) & ad eaſdem partes conſtituta. Dico ea eſſe in eiſdem parallelis, hoc eſt, rectam ex A, ad D, ductam parallelam eſſe rectæ B F. Si enim non eſt, cadet parallela ipſi B F, per A, ducta, vel ſupra A D, vel infra. Cadat primum ſupra, coeatq́; cum E D, producta in G, a 38. pri. & ducatur recta G F. Quoniam igitur parallelæ ſunt A G, B F, a erit triangulum E F G, triangulo A B C, æquale: Ponitur autem & b 1. pronun. triangulum D E F, eidem triangulo A B C, æquale. Igitur b triangula D E F, G E F, æqualia erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Quod ſi parallela ducta per A, cadat infra A D, qualis eſt A H; ducta recta H F, erunt eadem argumentatione triangula H E F, D E F, æqualia, pars & totum, quod eſt abſurdum. Eſt igitur A D, parallela ipſi B F. Quare triangula æqualia ſuper æqualibus baſibus, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

HÆC propoſitio conuertit vno modo propoſ. 38. Alio autem modo conuerti poteſt, quemadmodum propoſ. 36. conuertimus in eius ſcholio, nimirum.

TRIANGVLA æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non eandem habuerint baſin, ſuper æquales baſes erunt conſtituta.

SINT triangula æqualia A B C, D E F, inter parallelas A D, B F, & ſuper baſes B C, E F, quas dico eſſe æquales. Si enim non ſunt c 3. pri. *æquales, ſit B C, maior.* c *Abſciſſa ergo recta* d 38 pri. *C G, æquali ipſi E F, & ducta recta G A;* d *erit triangulum A G C, triangulo D E F, æquale: Ponitur autem & triangulum A B C, eidem triangulo D E F, æquale: Igitur triangula A G C,* e 1. pron. *A B C,* e *æqualia erunt, pars & totum, quod eſt abſurdum. Non ergo inæquales ſunt baſes B C, E F, ſed æquales. Quod eſt propoſitum.*



SEQVENS etiam theorema facili negotio demonſtrabitur.

SI duo triangula inter eaſdem parallelas habeant baſes

baſes inæquales, illud, cuius baſis maior eſt, maius erit. Et contrà, ſi duo triangula ſint inæqualia inter eaſdem parallelas, baſis maioris maior erit.

SINT enim in proxima figura inter parallelas A D, B F, triangula A B C, D E F, ſitq́; baſis B C, baſe E F, maior. Dico triangulum A B C, maius eſſe triangulo D E F. Ablata enim recta C G, a æquali ipſi E F, ductaq́; recta A G; b erunt triangula A G C, D E F, ſuper æquales baſes G C, E F, æqualia. Cùm ergo c triangulum A B C, triangulo A G C, maius ſit; erit idem triangulum A B C, maius quàm D E F. a 3. pri. b 38. primi. c 9. pronun.

SINT rurſus triangula A B C, D E F, inæqualia, & A B C, maius. Dico baſim B C, baſe E F, maiorem eſſe. Si enim dicatur æqualis, d erit triangulum A B C, triangulo D E F, æquale, quod eſt abſurdũ, cùm maius ponatur. Si verò credatur eſſe minor, erit triangulum D E F, maius triangulo A B C, vt proximè oſtendimus, quod multò magis eſt abſurdum, cùm A B C, ponatur maius, quàm D E F. Recta igitur B C, maior erit, quàm E F, cùm neque æqualis ſit oſtenſa, neq; minor. Quod eſt propoſitum. d 38. pri.

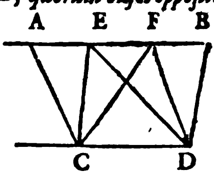
QVÆ porrò hactenus de parallelogrammis, triangulisq́; inter eaſdem parallelas conſtitutis demonſtrata ſunt, facilè quoq; demonſtrari poſſunt de trapezijs inter eaſdem parallelas deſcriptis, eodem fermè ordine, hoc modo.

I.

TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſitæ baſes inter ſe æquales ſint, ſunt inter ſe æqualia: Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, habent baſes oppoſitas æquales.

DICVNTVR trapezia in eiſdem eſſe parallelis, quando latera duo oppoſita parallela ſunt, parteſq́; ſunt earundem parallelarum.

INTER parallelas igitur A B, C D, ſuper eadem baſi C D, conſtituta ſint duo trapezia, A C D E, F C D B, quorum baſes oppoſitæ A E, F B, æquales ſint. Dico ipſa inter ſe eſſe æqualia. Ductis enim rectis E C, F D, e erunt tam triangula E C D, F C D, ſuper eadem baſi C D, & in eiſdem parallelis, inter ſe æqualia, f quàm triangula A C E, F D B, ſuper æqualibus baſibus A E, F B, & in eiſdem parallelis. e 37. primi. f 38. pri.



Si igitur æqualibus E C D, F C D, addantur æqualia A C E, F D B, g erunt tota trapezia A C D E, F C D B, inter ſe æqualia. g 2. pronun.

SINT iam trapezia A C D E, F C D B, æqualia. Dico baſes op-

a 37. pri- *poſitas AE, FB, æquales quoque eſſe. Erunt enim rurſus* a *triangula*
mi. *ECD, FCD, æqualia. Si igitur ex trapezijs æqualibus auferantur,*
b 3. pro- b *æqualia erunt reliqua triangula ACE, FDB. Quare, vt in hoc*
nun. *ſcholio oſtendimus, baſes AE, FB, æquales erunt.*

II.

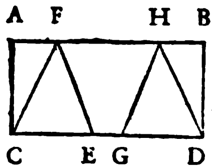
TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſitæ baſes ſint inæquales, inæqualia ſunt, maiusq́; eſt illud, cuius baſis maior eſt; Et trapezia inæqualia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, habent baſes oppoſitas inæquales, maiorque eſt illa, cuius trapezium maius eſt.

VT in eadem figura, ſi baſis AE, dicatur eſſe maior baſe FB; Di-
c 37. pri- *co trapezium ACDE, maius eſſe trapezio FCDB.* c *Erunt enim*
mi. *rurſus triangula ECD, FCD, æqualia: At triangulum ACE, tri-*
d 4. pro- *angulo FDB, maius, vt in hoc ſcholio demonſtrauimus.* d *Totum er-*
nun. *go trapezium ACDE, toto trapezio FCDB, maius erit.*

RVRSVS ſi trapezium ACDE, dicatur eſſe maius trapezio
e 37. pri. *FCDB; Dico baſin AE, baſe FB, maiorem eſſe.* e *Erunt enim rur-*
ſus triangula ECD, FCD, æqualia. Quare reliquum triangulum
f 5. pron. *ACE, reliquo triangulo FDB,* f *maius erit: ac proinde, vt in hoc ſcholio oſtenſum eſt, baſis AE, maior erit baſe FB. Quod oſtendendum erat.*

III.

TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, quorum oppoſitæ baſes ſint æquales, æqualia ſunt: Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, habent baſes oppoſitas æquales.



INTER parallelas AB, CD, ſuper æquales baſes CE, GD, conſtituta ſint duo trapezia ACEF, HGDB quorum baſes oppoſitæ AF, HB, æquales quoque ſint: Dico ipſa trapezia æqualia eſſe. Ductis enim rectis FC,
g 38. pri. *HD,* g *erunt tam triangula FGE, HGD, ſuper æquales baſes CE, GD, quàm ACF,*
h 2. pro- *BDH, ſuper æquales baſes AF, BH, inter ſe æqualia.* h *Tota ergo*
nun. *trapezia æqualia erunt.*

SINT iam trapezia ACEF, HGDB, æqualia ſuper baſes æquales CE, GD. Dico baſes oppoſitas AF, BH, æquales quoque eſſe.
i 38. pri. i *Erunt namque rurſus triangula FCE, HGD, ſuper æquales ba-*

ſes

ſis C F, G D, æqualia: quibus ablatis ex trapeziis æqualibus, reliqua triangula A C F, B D H, a æqualia erunt; ac proinde, vt paulò antè in hoc ſcholio oſtendimus, baſes A F, B H, æquales erunt. a 3. pronun.

IV.

TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, quorum oppoſitæ baſes ſint inæquales, inæqualia ſunt, maiusq́; eſt illud, cuius baſis maior eſt: Et trapezia inæqualia in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, habent oppoſitas baſes inæquales, maiorq́; eſt illa, cuius trapezium maius eſt.

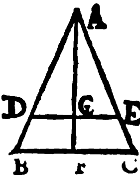
VT in eadem figura, ſi baſis A F, dicatur eſſe maior baſe H B, erit trapezium A C E F, trapezio H G D B, maius. b *Erunt enim rurſum triangula F C E, H G D, ſuper æquales baſes C E, G D, æqualia. At triangulum A C F, maius triangulo B D H, vt ſuprà oſtenſum eſt, quòd baſis A F, maior ponatur baſe B H.* c *Totum ergo trapezium A C E F, toto trapezio H G D B, maius erit.* b 38. pri. c 4. pronun.

RVRSVS ſi trapezium A C E F, maius ponatur trapezio H G D B, erit baſis A F, baſe B H, maior. d *Erunt enim rurſus triangula F C E, H G D, ſuper æquales baſes C E, G D, æqualia: quibus ablatis ex trapeziis inæqualibus, reliquum triangulum A C F, reliquo triangulo B D H,* e *maius erit; ac proinde, vt in hoc ſcholio oſtenſum fuit, baſis A F, baſe B H, maior erit. Quod erat oſtendendum.* d. 38. pri. e 5. pronun.

PORRO non videtur hîc omittendum theorema ſequens, per quod facili negotio lineam rectam quamcunque in quotuis partes æquales diuidemus: quod nos in ſcholio propoſ. 10 huius lib. facturos hoc loco recepimus. Quamuis enim idem demonſtrari poſſit, & quidem facilius, per proportiones linearum, vt lib. 6. oſtendemus, iucundum tamen eſt intelligere, nullo labore idem abſolui poſſe per propoſitiones hactenus demonſtratas, ſine proportionum adiumento. Theorema ergo eſt huiuſmodi.

SI in triangulo linea recta vni laterum parallela ducatur: Recta ex angulo oppoſito ducta, diuidensq́; alterutram parallelarum bifariam, diuidit quoque alteram bifariam.

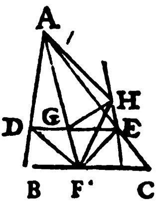
IN triangulo A B C, æquidiſtet D E, ipſi B C, & recta A F, ſecet alterutram B C, D E, bifariam in F, vel G. Dico alteram quoque bifariam ſecari. Sint enim primum anguli ad F, recti. Quo poſito, f *& anguli ad G, recti erunt. Si igitur B C, diuiditur bifariam, diuidetur bifariam quoque angulus A, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 26.* f 29. pri.



huius lib. demonſtrauimus; ac proinde recta AG, ad baſin DE, trianguli ADE, perpendicularis, diuidensq́; angulum A, biſariam, diuidet biſariam quoque baſin DE, vt ibidem oſtendimus, quod eſt propoſitum.

SI verò DE, ponatur diuidi biſariam, diuidetur, per idem ſcholium propoſ. 26. huius lib. angulus quoq; A, biſariam; ac proinde recta AF, ad baſin BC, perpendicularis, diuidensq́; angulum A, biſariam, baſin quoq; BC, biſariam ſecabit, quod eſt propoſitum.

SINT deinde anguli ad F, non recti, ſed AFC, obtuſus, & AFB, acutus. Quo poſito, erit & AGE, obtuſus, & AGD, acutus,
a 29. pri. a cùm hi illis ſint æquales, externi internis. Si igitur BC, diuiditur bi-
b 23. primi. ſariam, b conſtituatur acuto angulo AGD, æ-
qualis angulus AGH, c & recta GH, rectæ GD,
c 3. primi. æqualis, ducanturq́; rectæ AH, HF, FD, FE.
Quia igitur tam triangula tota ABF, ACF, ex
d 38. primi. ſcholio propoſ. 38. huius libri æqualia ſunt, quam
d triangula ablata DBF, ECF, ob æquales ba-
e 3. pronun. ſes BF, CF; e erunt quoq; reliqua triangula
ADF, AEF, æqualia. Rurſus quoniam duo

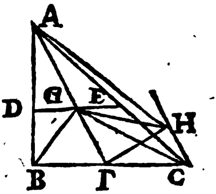


latera AG, GD, trianguli AGD, duobus lateribus AG, GH, æqualia ſunt, anguloſq́; comprehendunt æ-
f 4. pri. quales AGD, AGH, ex conſtructione, f erunt quoque triangula AGD, AGH, æqualia. Pari ratione, quia duo latera DG, GF, duobus lateribus HG, GF, æqualia ſunt, ex conſtructione, anguloſq́; continent æquales DGF, HGF, (cùm enim per cõſtructionem anguli AGD, AGH, æquales ſint, erunt quoq; reli-
g 13. pri. qui duorum rectorum DGF, HGF, æquales: g ſunt enim tam AGD, DGF, quàm AGH, HGF, duobus rectis æquales) erunt
h 4. pri. h quoque triangula DGF, HGF, æqualia: i ac proinde & tota
i 2. pronun. triangula ADF, AHE, æqualia erunt. Eſt autem eidem triangulo ADF, æquale oſtenſum triangulum AEF. Igitur & inter ſe k æ-
k 1. pronun. qualia erunt triangula AHF, AEF: l ac propterea inter duas eaſdem erunt parallelas, hoc eſt, ducta recta EH, erit baſi AF, commu-
l 39. primi. nis parallela. Igitur m & triangula HGF, EGF, inter eaſdem parallelas, & ſuper eadem baſi FG, æqualia inter ſe erunt. Eſt autem
m 37. primi. triangulum HGF, triangulo DGF, oſtenſum æquale. Igitur triangula quoque DGF, EGF, æqualia inter ſe erunt; proptereaq́; baſis quoque DG, baſi GE, æqualis erit, vt in hoc ſcholio demonſtratum eſt, quod eſt propoſitum.

n 23. primi. SI verò DE, ponatur biſariam diuidi, n conſtituatur angulo acuto AFB, æqualis angulus AFH, o & recta FH, rectæ FB, du-
o 3. pri. canturq́; rectæ AH, HG, GB, GC. Quoniam igitur tam triangula AGD,

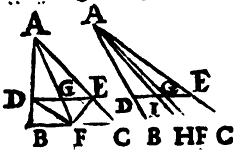
Digitized by Google

A G D, A G E, ex ſcholio propoſ. 38. huius lib. æqualia ſunt, a quàm a 38. pri-
triangula D G B, E G C, ob æquales baſes D G, E G; b erunt tota etiã mi.
triangula A G B, A G C, æqualia. Rurſus quia duo latera A F, F B, b 2. pro-
duobus lateribus A F, F H, æqualia ſunt, nun.
continentq́; angulos æquales A F B, A F H, c 4. pri.
ex conſtructione; c erunt triangula quoq́;
A F B, A F H, æqualia. Pari ratione, quia
duo latera G F, F B, duobus lateribus G F,
F H, æqualia ſunt, æqualesq́; continent an- d 4. pri.
gulos G F B, G F H, ex conſtructione; d e-
runt quoque æqualia triangula G F B, G F H:
quibus demptis ex æqualibus A F B, A F H,



e æqualia erunt reliqua triangula A G B, A G H: Eſt autem eidem e 3. pron.
triangulo A G B, oſtenſum æquale triangulum A G C. f Igitur & f 1. pron.
triangula A G C, A G H, inter ſe erunt æqualia. g Quare & inter g 39. pri.
eaſdem parallelas erunt, hoc eſt, ducta recta C H, ipſi A F, parallela
erit; ac proinde h æqualia inter ſe erunt triangula G H F, G F C. Fuit h 37. pri-
antẽ oſtenſum triangulum G H F, triangulo G B F. æquale. i Igitur mi.
& æqualia inter ſe erũt triangula G F C, G F B; ideoq́; vt in hoc ſcholio i 1. pro-
demonſtrauimus, & baſes F C, F B, æquales erunt. Quod eſt propoſitũ. nun.

ALITER. Diuiſa ſit primum B C,
bifariam in F. Dico & D E, bifariam
eſſe diuiſam in G. Si enim D G, G E, non
ſunt æquales, ſit maior D G, ducanturq́;
rectæ F D, F E. Erit igitur per ea, quæ in
hoc ſcholio demonſtrauimus, tam trian-



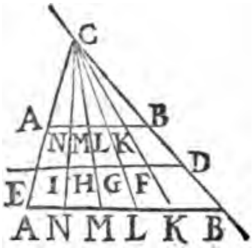
gulum A D G, triangulo A E G, quàm triangulum F D G, trian-
gulo F E G, maius. k Totum ergo triangulum A D F, toto triangulo k 4. pro-
A E F, maius erit: quibus ſi addantur triangula D B F, E C F, l quæ nun.
propter baſes æquales B F, C F, æqualia ſunt, m fiet totum triangu- l 38. pri.
lum A B F, toto triangulo A C F, maius; ac proinde, vt in hoc ſcho- m 4. pro-
lio monſtrauimus, baſis B F, baſe F C, maior erit: Sed & æqualis po- nun.
nitur. Quod eſt abſurdum. Biſariam ergo ſecta eſt D E, in G. Quod
eſt propoſitum.

SIT iam D E, ſecta bifariam in G. Dico & B C, diuidi bifariam n 10.
in F. Sin minus, n diuidatur B C, in H, bifariam, ducaturq́; recta primi.
A H, ſecans D E, in I. Quoniam igitur A H, ſecat B C, bifariam in
H, ſecabit eadem ipſam D E, quoque bifariam in I, vt proximè oſten-
dimus. Quod eſt abſurdum, cùm bifariam ſecta eſſe ponatur in G.
Sequeretur enim partem toto eſſe maiorem. Nam ſi D I, æqualis eſt
ipſi I E, cum I E, maior ſit, quàm G E, erit quoque D I, maior, quàm
G E, hoc eſt, quàm D G, quæ ipſi G E, æqualis ponitur. Diuiditur
ergo B C, bifariam in F. Quod erat demonſtrandum.

HOC oſtenſo theoremate, ad diuiſionem lineæ rectæ in quotuis
æquales partes iam veniamus.

Digitized by Google

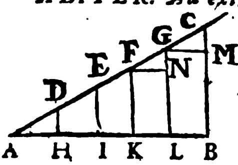
DATAM rectam lineam finitam in quotlibet partes æquales ſecare.



a 31.pri.
b 3.pri.

SIT datæ recta A B, ſecanda in quinque partes æquales. Per extremum punctum B, ducta recta B C, Vtcunq;, & aſſumpto in B C, puncto quocunque D, ſiue infra B, ſiue ſupra, a ducatur per D, ipſi A B, parallela D E, in qua b abſcindantur quinque partes inter ſe æquales D F, F G, G H, H I, I E, hac tamen lege, Vt exiſtente puncto D, infra B, recta D E, ex quinque partibus æqualibus compoſita maior ſit, quam data A B, minor Verò, exiſtente puncto D, ſupra B, Vt nimirum recta A C, per alterum extremum A, & per E, ducta cum B D, concurrere poſſit in puncto aliquo, Vt in C. A quo ſi per puncta F, G, H, I, rectæ ducantur, ſecta erit data recta A B, in quinq; partes æquales B K, K L, L M, M N, N A. Quoniam enim in triangulo C B L, recta D G, ipſi B L, eſt parallela, Vel in triangulo C D G, recta B L, ipſi D G: ſectaq; eſt D G, biſariam in F, ſecta quoque erit biſariam B L, in K, Vt in proximo theoremate demonſtrauimus. Eademq; ratione recta K M, in L, ſecta erit biſariam, quemadmodum & F H, in G, biſariam ſecta eſt. Sunt ergo tres partes B K, K L, L M, inter ſe æquales, ſicuti tres D F, F G, G H, atq; ita de cæteris.

ALITER. Ad extremum A, lineæ A B, ſecandæ in quinq; partes æquales, conſtituatur angulus rectilineus quicunq; A, & ex recta A C, c abſcindantur quinque partes quantacunque inter ſe æquales A D, D E, E F, F G, G C: ductaq; recta C B, d agantur eiparallelæ G L, F K, E I, D H. Dico rectam A B, ſectam eſſe in quinque partes æquales.



c 3.pri.
d 31.pri.

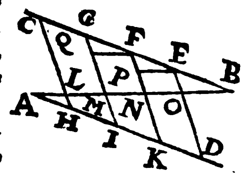
e 31.pri. *e Ductis enim per G, F, ipſi*
f 30.pri. *A B, parallelis G M, F N, f quæ inter ſe etiam parallelæ erunt, &*
g 34.pri mi. *g ipſis B L, L K, æquales in parallelogrammis G B, F L; h erunt tam anguli F G N, G C M, externus & internus in parallelis G L,*
h 29.pri mi. *C B, quàm anguli C G M, G F N, externus & internus in parallelis G M, F N, æquales inter ſe. Quoniam igitur duo anguli C, G, trianguli C G M, duobus angulis G, F, trianguli G F N, æquales ſunt, Vterque Vtrique, lateraq; illis adiacentia C G, G F, æqualia per con-*
i 26.pri. *ſtructionem, i erunt quoq; latera G M, F N, æqualia: quæ cùm oſtenſa ſint æqualia rectis B L, L K, erunt quoquè B L, L K, inter ſe æquales. Eademq; ratione oſtendemus K L, K I, æquales eſſe, nec*

non

Digitized by Google

nes I K, H I, & H I, A H; ac propterea recta A B, in quinq; æquales partes diuiſa erit. Quod eſt propoſitum.

ALITER. Ad extrema puncta A, B, lineæ A B, in quinq; partes æquales diuidendæ conſtituantur duo æquales anguli in diuerſas partes A B C, B A D. Et in vtraque linea B C, A D, a quæ ob alternos angulos æquales A, B, parallelæ inter ſe ſunt, b ſumantur quæ- a 27. pri. tuor partes inter ſe omnino æquales, tot nimirum, vna minus, in b 3. pri. quot partes linea ſecanda eſt, cuiuſmodi ſunt B E, E F, F G, G C; A H, H I, I K, K D, iunganturq; rectæ C H; G I, F K, E D, c quæ inter ſe erunt parallelæ, cùm coniungant extrema parallelarum æqualium. Dico rectam A B, in quinque partes æquales ſectam eſſe. d Ductis enim per E, F, ipſi A B, parallelis E P, F Q,



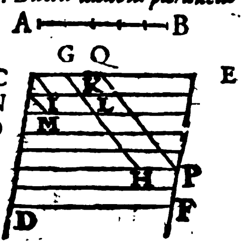
c 33. pri.

d 31. pri.

e quæ inter ſe quoque parallelæ erunt, f & ipſis N O, M N, æquales e 30. pri. in parallelogrammis E N, F M: g erunt tam anguli E F P, F G Q, f 34. pri. externus & internus in parallelis F K, G I, quàm anguli G F Q, g 29. pri. F E P, externus & internus in parallelis Q F, P E, inter ſe æquales. Itaque quoniam duo anguli G, F, trianguli F G Q, duobus angulis F, E, trianguli E F P, æquales ſunt, vterque vtrique, lateraq; illis adiacentia F G, E F, æqualia per conſtructionem, h erunt quoque h 26. pri. latera F Q, E P, inter ſe æqualia: quæ cùm oſtenſa ſint æqualia rectis M N, N O, erunt etiam M N, N O, inter ſe æquales. Eademq; ratione æquales inter ſe erunt O B, N O, M N, L M, A L, proptereaq; recta A B, in quinque æquales partes diuiſa erit. Quod eſt propoſitum.

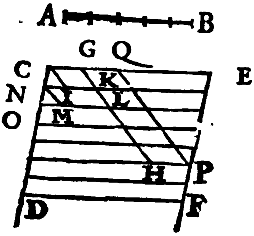
PRAXIS hæc breuius ita demonſtrabitur. i Quoniam rectæ i 33. pri. E D, F K, G I, G H, parallelæ ſunt, quòd coniungant extrema æqualium & parallelarum; ſecabitur recta B L, in quatuor partes æquales, nec non & recta A O, vt in præcedenti praxi oſtendimus. Omnes ergo quinque partes A L, L M, M N, N O, O B, æquales erunt.

ALITER. Paretur inſtrumentum diuiſionibus linearum in partes æquales accommodatum, hoc modo. Ductis duabus parallelis ſatis magno ſpatio inter ſe diſtantibus C D, E F, k ſumantur in vtraque partes omnino inter ſe æquales quotcunq;, tot videlicet in vna, quot in altera, & modicæ quantitatis, punctaq; reſpondentia lineis rectis iungantur, l quæ parallelæ inter ſe erunt, cùm coniungant extrema parallelarum æqualium. Si igitur beneficio circini recta A B, in quinque diuidenda partes



k 3. pri.

l 33. pri.



æquales, transferatur ex quouis puncto G, vſq; ad punctũ H, ita vt quinque ſpatia parallelarum inter G, & H, includantur, diuiſa erit ducta G H, ab illis parallelis in quinque partes æquales, quibus partibus ſi in data A B, a *ſumantur partes æquales, diuiſa quoque erit A B, in quinque æquales partes.* (a 3.pri.) *Sectam autem eſſe G H, in quinque partes æquales, ita demonſtrabitur. Ductis ex C, N, ipſi G H, parallelis C I, N M,* b *quæ inter ſe quoq; parallelæ erunt;* c *& ipſis G K, K L, æquales in parallelogrammis G I, K M; erunt* d *tam anguli C N I, N O M, externus & internus in parallelis N K, O L, quàm anguli O N M, N C I, externus & internus in parallelis N M, C I, æquales inter ſe. Igitur cùm duo anguli N, C, trianguli C N I, duobus angulis O, N, trianguli N O M, æquales ſint, vterque vtrique, lateráque illis adiacentia C N, N O, æqualia, ex conſtructione,* e *erunt quoque latera C I, N M, inter ſe æqualia: quæ cùm oſtenſa ſint æqualia rectis G K, K L, erunt quoq; G K, K L, inter ſe æquales. Eademq; ratione omnes partes rectæ G H, oſtendentur æquales: ac proinde recta G H, in quinque partes æquales erit diuiſa.*

b 30.pri. c 34.primi. d 29.primi. e 26.primi.

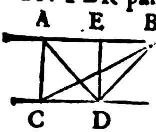
PRAXIS etiam hæc breuius demonſtrabitur, ſi hoc modo fiat. Sumptis quinque interuallis rectæ E F, ab E, vſque ad P, transferatur recta A B, beneficio circini ex P, ad aliquod punctum rectæ C E, vt ad Q. Erit enim hac ratione ducta recta P Q, diuiſa à parallelis in quinque partes æquales, vt in ſecunda praxi demonſtratum eſt. Quare ſi partes rectæ P Q, quæ datæ rectæ A B, æqualis eſt, ex conſtructione, transferantur in datam rectam A B, diuiſa quoq; erit A B, in quinque partes æquales. Quod eſt propoſitum.

xlj.

THEOR. 31. PROPOS. 41.

SI parallelogrammum cum triangulo eandem baſin habuerit, in eiſdemque fuerit parallelis, duplum erit parallelogrammum ipſius trianguli.

INTER parallelas AB, CD, & ſuper baſin CD, conſtituantur parallelogrammum A C D E, & triangulum B C D. Dico parallelogrammum eſſe duplum triangnli B C D. Ducta enim diametro A D, in parallelogrammo, erunt *f* triangula A C D, B C D, æqualia; At parallelogrammũ A C D E, duplum eſt trianguli A C D; *g* quòd triangula A C D, A D E, æqualia quoque inter ſe ſint. Igitur & trianguli B C D, *h* duplum erit idem parallelogrammum A C D E. Quamobrem, ſi paral-

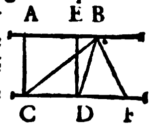


f 37.pri. g 34.primi. h 6.pronun.

ſi parallelogrammum cum triangulo, &c. Quod erat demonſtrandum.

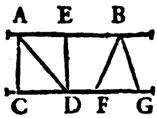
SCHOLIVM.

HINC ſequitur, ſi triangulum duplam habuerit baſin, fuerítque in eiſdem parallelis cum parallelogrammo, triangulum parallelogrammo æquale fore. Nam ſi baſis C D, producatur ad F, vt ſit D F, æqualis ipſi C D, ducatúrque recta F B, erit triangulum B C F, duplum trianguli B C D, a *quod triangula B C D, B D F, æqualia ſunt: Eſt autem & parallelogrammum A C D E,* b *duplum eiuſdem trianguli B C D.* c *Igitur æqualia erunt triangulum B C F, & parallelogrammum A C D E.*



a 38. *primi.* b 41. *primi.* c 6. *pronun.*

IDEM hoc theorema Euclidis demonſtrari poteſt eodem modo, ſi parallelogrammum, & triangulum æquales habuerint baſes, & non eandem, fuerintque in eiſdem parallelis, vt cernis in parallelogrammo A C D E, & triangulo B F G, quorum baſes C D, F G, æquales ſunt. Ducta enim diametro A D, in parallelogrammo, d *erunt triangula A C D, B F G, æqualia. Cum igitur parallelogrammum A C D E, duplum ſit trianguli A C D:* e *quod diameter A D, ſecet parallelogrammum A C D E, biſariam:* f *erit quoque idem trianguli B F G, duplum. Eadem ratione ſi baſis F G, duplicaretur, & recta ad B, duceretur, fieret triangulum parallelogrammo æquale, quoniam triangulum hoc eſſet duplum etiam trianguli B F G, &c.*

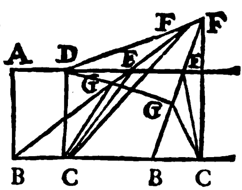


d 38. *primi.* e 34. *primi.* f 6. *pronun.*

CONVERSVM huius theorematis duplex eſt, hoc modo.

SI trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemque habuerint baſin, vel æquales, & ad eaſdem partes conſtituta; Erunt ipſa in eiſdem parallelis. Et ſi parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eiſdemque parallelis: erunt baſes æquales, ſi non ſit eadem.

SIT parallelogrammum A B C D, duplum trianguli E B C, ſiue eandem habeant baſin, ſiue æquales. Dico parallelam A D, productam cadere in E, punctum. Nam alias cadet aut ſupra E, aut infra. Vnde, vt in 39. vel 40. propoſ. oſtendetur pars æqualis toti, vt & figura indicat. g *Nam erit quoque parallelogrammum A B C D, trianguli B F C, vel B G C, duplum.* h *Quare triangula E B C, F B C, vel triangula E B C, G B C, æqualia erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum.*



g 41. *primi.* h 6. *pronun.*

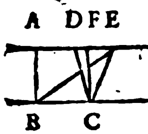
Digitized by Google



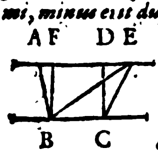
SIT deinde parallelogrammum ABCD, duplum trianguli EFG, in eiſdemq́; parallelis. Dico baſes BC, FG, eſſe æquales. Nam ſi altera, nempe BC, ſit maior, abſciſſa æquali CH,
a 31. primi. *& a ducta HI, parallela ipſi AB, demonſtrabimus parallelogramma ABCD, IHCD, eſſe æqualia, totum & partem; (quia vtrumque duplum eſt trianguli EFG; illud quidem per hypotheſin, hoc verò per 41. propoſ.) Quod eſt abſurdum. Idem oſtendemus, ſi baſis FG, maior dicatur. Si enim abſcindatur ipſi BC, æqualis FH, ducaturq́; recta HE, erunt triangula EFH, EFG, æqualia, pars & totum; (Nam vtrumque dimidium eſt parallelogrammi ABCD; illud quidem per propoſ. 41. hoc verò per hypotheſin.) Quod eſt abſurdum.*

EX PROCLO.

SI triangulum, & trapezium ſuper eadem baſi, & in eiſdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij ſit baſis trianguli; erit trapezium minus duplo trianguli: Si verò minor linea parallela trapezij baſis ſit trianguli, erit trapezium maius duplo trianguli.



INTER lineas parallelas AE, BC, ſint conſtituta trapezium ABCD, & triangulum EBC, ſuper baſim BC eandem, quæ ſit tamen maior, quã altera linea AD, parallela in trapezio dato. Dico trapezium ABCD, minus eſſe duplo trianguli EBC. Cum enim AD, minor ponatur quam BC, ſumatur AF,
b 33. primi. *æqualis ipſi BC, & ducatur recta CE,* b *quæ erit parallela ipſi AB; atq; adeo parallelogrammum erit ABCF,* c *quod duplum eſt trian-*
c 41. primi. *guli EBC. Quare trapezium ABCD, cum ſit pars parallelogrammi, minus erit duplo eiuſdem trianguli EBC. quod eſt propoſitum.*



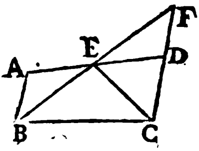
SINT rurſus trapezium, & triangulum, vt prius, ſed baſis BC, ſit minor, quam reliqua linea parallela AD, in trapezio dato. Dico trapezium ABCD, maius eſſe duplo trianguli EBC. Cum enim AD, maior ſit, quàm BC, abſcindatur DF,
d 33. primi. *æqualis ipſi BC, & ducatur recta BF,* d *quæ erit parallela ipſi CD; atq; adeo parallelogrammum erit BCDF:* e *quod duplum eſt trian-*
e 41. primi. *guli EBC. Quare totum trapezium ABCD, quod ſuperat parallelogrammum BCDF, maius erit duplo eiuſdem trianguli EBC, quod eſt propoſitum.*

IDEM concludetur, ſi trapezium, & triangulum conſtituta fuerint ſuper æquales baſes, ita tamen vt nunc quidem baſis trapezij ſit maior latere oppoſito parallelo, nunc verò minor.

TRAPE-

Digitized by Google

TRAPEZIVM habens duo latera oppoſita parallela, duplum eſt trianguli, quod baſin habet vnum latus trapezij coniungens duas parallelas, verticem verò in medio puncto lateris oppoſiti.

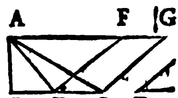


SIT trapezium ABCD, cuius duo latera oppoſita AB, DC, ſint parallela, & ſuper baſin BC, conſtituatur triangulum EBC, verticem E, habens in medio puncto E, lateris AD. Dico trapezium ABCD, duplum eſſe trianguli EBC. Producatur enim vnum latus trianguli ad verticem, nempe BE, donec coeat cum CD, protracto in F. Et quia parallelæ ſunt AB, CF, a *erunt anguli alterni BAE, FDE, æquales:* b *Sunt autem & anguli AEB, DEF, æquales, quippe qui ad verticem E; & latus AE, trianguli ABE, lateri DE, trianguli DEF, æquale, per hypotheſin.* c *Igitur & reliqua latera AB, BE, reliquis lateribus, DF, FE, æqualia erunt, vtrumque vtrique, & reliqui anguli ABE, DFE, æquales: atque idcirco triangula ABE, DFE, ex coroll. propoſ. 26. huius lib. æqualia erunt. Quare addito communi triangulo CDE,* d *erunt triangulo CEF, æqualia triangula ſimul ABE, CDE.* e *Eſt autem & triangulum BCE, eidem triangulo CEF, æquale, quod baſes BE, EF, oſtenſæ ſint æquales, & ipſa triangula inter eaſdem ſint parallelas, ſi per C, duceretur parallela ipſi BF.* f *Igitur triangulum CBE, æquale erit triangulis ABE, CDE; & propterea CBE, triangulum dimidium erit trapezij ABCD, quod eſt propoſitum.*

a 29. primi.
b 15. primi.
c 26. primi
d 1. pronun.
e 38. primi.
f 1. pronun.

PROBL. 11. PROPOS. 42. xlij.

DATO triangulo æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo.



DATVM triangulum ſit ABC, & datus angulus rectilineus D. Oportet igitur conſtituere parallelogrammũ æquale triangulo ABC, habens angulum æqualem angulo D. Diuidatur latus vnum trianguli, nempe BC, *g* bifariam in E, & *h* fiat angulus CEF, æqualis angulo D, prout libet, hoc eſt, ſiue angulus CEF, vergat ad partes C, ſiue ad partes B, prout magis videbitur expedire. Ducatur item per A, *i* recta AF, parallela ipſi BC, quæ ſecet EF, in F. Rurſus per C, vel B, ducatur ipſi EF, parallela CG, occurrens rectæ AF, productæ in G. Eritque in angulo CEF, qui dato angulo rectilineo D, factus eſt æqualis, conſtitutum parallelogrammum CEFG, quod dico eſſe æquale triangulo ABC. Ducta enim recta EA; quo-

g 10. primi.
h 23. primi.
i 31. primi.

a 41.pri EA; quoniam parallelogrammum CEFG, *a* duplum eſt trian-
mi. guli AEC;& triangulum ABC,duplum eiuſdem trianguli AEC;
b 38.pri *b* quod triangula AEC, ABE, ſuper æquales baſes EC, BE, &
mi. in eiſdem parallelis, ſint æqualia. Erunt parallelogrammum
c 6.pro- CEFG, & triangulum ABC, *c* æqualia inter ſe. Cum igitur an-
nun. gulus CEF, factus ſit æqualis angulo D, conſtat propoſitum.
Quocirca dato triangulo æquale parallelogrammum conſtitui-
mus in dato angulo rectilineo. Quod erat faciendum.

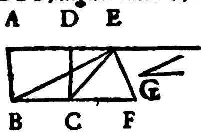
SCHOLIVM.

PRAXIS huius problematis facilima eſt ex ipſa conſtructione.

SVBIVNGIT autem hoc loco Peletarius ſubſequens problema, quod huius propoſ. conuerſum eſt.

DATO parallelogrammo æquale triangulum conſtituere, in dato angulo rectilineo.

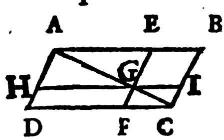
SIT datum parallelogrammum ABCD, & datus angulus G. Fiat angulus CBE, angulo G, æqualis, ſecetq́ recta BE, rectam AD productam in E. Extendatur quoque BC, ad F, ſitq́ CF, æqualis rectæ BC, & iungatur EF. Dico triangulum BEF, habens angulum EBF, angulo dato G, æqualem, æquale eſſe parallelogrammo ABCD.



d 41.pri. *Ducta enim recta CE,* d *erit parallelogrammũ ABCD, duplum trianguli BCE. Item triangulum BEF, eiuſdem trianguli BCE, du-*
e 38.pri *plum;* e *quod æqualia ſint triangula EBC,*
mi. *ECF. Quare* f *æqualia inter ſe erunt paral-*
f 6.pro- *lelogrammum ABCD, & triangulum BEF. Quod eſt propoſitum.*
nun. *PRAXIS quoque huius problematis Peletarij ex ipſa constructione perfacilis eſt.*

xliij. THEOR. 32. PROPOS. 43.

IN omni parallelogrammo complementa eorum, quæ circa diametrum ſunt parallelogrammorum, inter ſe ſunt æqualia.



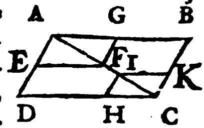
IN parallelogrammo ABCD, ſint circa diametrum AC, parallelogramma AEGH, CFGI, & complementa DFGH, EBIG, vt in 36. defin. diximus. Dico complementa hæc inter ſe
g 34.pri
mi. eſſe æqualia. Cum *g* enim triangula ABC, CDA, æqualia ſint;
h 1.pro- Itemque triangula AEG, GHA; ſi hæc ab illis demantur, *h* re-
nun. manebunt trapezia CBEG, CDHG, æqualia: *i* Sunt autem &
i 34 pri. triangula CGI, CGF, æqualia. Quare ſi detrahantur ex tra-
peziis,

Digitized by Google

periis, a remanebunt æqualia complementa D F G H, E B I G. a 3. pro-
In omni igitur parallelogrammo, complementa, &c. Quod oſten- num.
dendum erat.

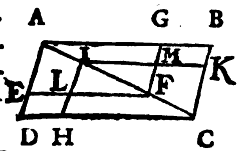
SCHOLIVM.

EODEM modo hoc theorema demonſtratur à Proclo, etiamſi duo parallelogramma circa diametrum non coniunguntur in puncto G, ſed vel vnum ab altero ſit ſemotum, vel ambo ſe mutuo interſecent. Sit enim prius vnum ab altero diſtans, ita vt complementa ſint figuræ quinquangulæ.



Vt in parallelogrammo A B C D, circa diametrum A C, conſiſtant parallelogramma A E F G, C H I K. Dico complementa D E F I H, B K I F G, eſſe æqualia. Cum enim b *triangula A B C, C D A, æqualia inter ſe ſint: Item triangula A E F, G H I, æqualia triangulis A G F, C K I:* c *erunt reliqua complementa D E F I H, B K I F G, æqualia. Quod eſt propoſitum.* b 34. pri 18. pri. c 3. pronun.

SECENT ſe iam mutuo parallelogramma A E F G, C H I K, circa diametrum conſiſtentia, ita vt communem partem habeant I L F M. Dico adhuc complementa D E L H, B G M K, eſſe æqualia. Cum enim d *æqualia ſint triangula A B C, C D A: Item triangula A F G, A F E:* e *erunt reliqua quadrilatera B C F G, D C F E, æqualia: Sunt* f *autem rurſus æqualia triangula I F M, I F L. Igitur ſi hæc addantur dictis quadrilateris,* g *erunt figuræ B C I M G, D C I L E, æquales. Cum igitur &* h *æqualia ſint triangula C I K, C I H:* i *erunt reliqua complementa B G M K, D E L H, etiam æqualia. Quod eſt propoſitum.*

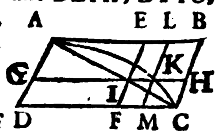


d 34. primi. e 3. pronun. f 34. primi. g 2. pronun. h 34. primi. i 3. pronun.

CONVERSVM quoque huius theorematis cum Peletario demonſtrabimus, hoc modo.

SI parallelogrammum diuiſum fuerit in quatuor parallelogramma, ita vt ex illis duo aduerſa ſint æqualia: conſiſtent reliqua duo circa diametrum.

DVCTIS duabus rectis E F, G H, quæ ſint parallelæ rectis B C, C D, ſeque ſecent in I, diuiſum ſit parallelogrammum A B C D, in quatuor parallelogramma, quorum aduerſa duo B E I H, D F I G, ſint æqualia. Dico reliqua duo A E I G, C F I H, circa diametrum conſiſtere, hoc eſt, diametrum à puncto C, ad punctum A, ductam tranſire per punctum I. Si enim non tranſit, ſecet diameter C K A, rectam G H, in K, ſi fieri poteſt, & per K, k *ducatur L M, parallela ipſi B C.* l *Erunt igitur comple-*



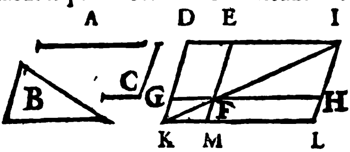
k 31. primi. l 43. pri.

a 9.pro- *complementa B H K L, D G K M, æqualia: Eſt autem D G K M;*
num. *maius quam D G I F. Quare & maius erit B H K L, quam D G I F.*
b 1.pro- *Cum ergo D G I F, æquale ponatur ipſi B E I H; b erit etiam B H K L,*
num. *maius quam B E I H, pars quam totum. Quod eſt abſurdum. Non ergo diameter A C, rectam G H, in K, ſecat, ſed per punctum I, tranſit. Quod eſt propoſitum.*

xliiij. PROBL. 12. PROPOS. 44.

AD datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

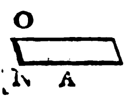
DATA recta linea ſit A, datum triangulum B, & datus angulus rectilineus C. Oportet igitur conſtituere parallelogrammum æquale triangulo B, angulum habens æqualem angulo C, & vnũ
c 42.pri mi. latus æquale rectæ A. Conſtituatur triangulo B, *c* æquale parallelogrammum D E F G, habens angulum E F G, angulo C, æqualem, producaturque G F, ad H, vt F H, ſit æqualis rectæ A, & per H,



d 31.pri mi. *d* ducatur H I, parallela ipſi F E, occurrens D E, productæ in I. Extendatur deinde ex I, per F,
e 31.pri. diameter I F, occurrens rectæ D G, productæ in K; & *e* per K, ducatur K L, parallela ipſi G H, ſecans I H, protractam in L, producaturque E F, ad M. Dico parallelogrammum L M F H, eſſe id, quod quæritur. Habet enim latus F H, æquale datæ rectæ A, &
f 15.pri. angulum H F M, angulo dato C, æqualem, *f* cum angulus H F M, æqualis ſit angulo E F G, qui factus eſt æqualis angulo C: Deni-
g 43.pri mi. que parallelogrammum L M F H, æquale eſt triangulo B, *g* cum æquale ſit complemento D E F G, quod factum eſt æquale triangulo B. Ad datam igitur rectam lineam dato triangulo, &c. Quod erat faciendum.

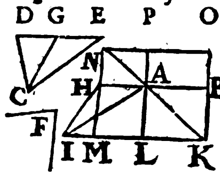
SCHOLIVM.

QVOD ſi quis optet, lineam ipſam A, datam, eſſe vnum latus parallelogrammi, non difficile erit transferre parallelogrammum F M L H, ad rectam A, ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 31. huius lib. documus. Si enim in N, extremitate rectæ A, fiat angulus æqualis angulo M F H, & ſumatur recta N O, æqualis rectæ F M, compleaturq; parallelogrammum, ceu in dicto ſcholio traditum fuit, effectum erit, quod quæritur.



SED fortaſſis magis ex ſententia Euclidis problema hoc conficiemus, ſi ſuper ipſam rectam datam conſtruamus parallelogrammum, non autem ſuper æqualem, cuiuſmodi fuit recta F H, &c. Sit ergo rurſus data

ſit data recta A B, datum triangulum C D E, & datus angulus F, oporteatque ſuper rectam A B, conſtituere parallelogrammum æquale triangulo C D E, in dato angulo F, quod ita efficiemus. Secto vno latere trianguli, vt D E, biſariam in G, ductaque recta C G, ſecante ex ſcholio propoſ. 38. huius lib. triangulum C D E, biſariam, producatur recta A B, verſus eam partem, vbi parallelogrammum conſtruendum debet habere angulum dato angulo F, æqualem, vt hic verſus A, fiatque A H, æqualis ipſi E G, dimidio lateris D E. Deinde in A, a conſtituatur angulus H A I, angulo E, æqualis, deorſum quidem, ſi parallelogrammum verſus ſuperiorem partem ſit conſtruendum, ſurſum verò, ſi verſus inferiorem. Poſita autem recta A I, æquali ipſi E C, iungatur recta H I. Et quia duo latera H A, A I, duobus lateribus G E, E C, æqualia ſunt, vtrumque vtrique, anguloſq́; continent æquales, b erunt triangula A H I, E G C, æqualia. Poſt hæc, c ducta per I, ipſi H B, parallela I K, d conſtituatur in A, verſus hanc parallelam angulus H A L, angulo dato F, æqualis, ſecetq́; A L, rectam I K, in L. e Ducta quoque per H, ipſi A L, parallela H M, ſecante I K, in M, f erit parallelogrammum A H M L, trianguli A H I, duplum: Eſt autem & triangulum C D E, trianguli E G C, duplum, quòd æqualia oſtenſa ſint triangula E G C, D G C. Igitur cum æqualia ſint demonſtrata triangula A H I, E G C, g erunt æqualia parallelogrammũ A H M L, & triangulum C D E. Iam verò ſumpta recta L K, datæ rectæ A B, æquali, ducatur recta K A, producaturq́; donec cum M H, producta coeat in N, & per N, agatur ipſi H B, parallela N O, donec in O, coeat cum K B, protracta, ac tandem L A, producatur vſque ad P, in recta N O. Dico parallelogrammum A B O P, eſſe id, quod quæritur. Eſt enim conſtitutum ſuper datam rectam A B, habetq́; angulum B A P, dato angulo F, æqualem, h cum æqualis ſit angulo H A L, qui angulo F, factus eſt æqualis. Deinde æquale eſt dato triangulo C D E, i cum æquale ſit parallelogrammo A H M L, quod triangulo CDE, oſtenſum fuit æquale.



a 23. primi.
b 4 pri.
c 31. primi.
d 23 primi.
e 31 pri.
f 4. pri.
g 7 pronun.
h 15. primi.
i 43. primi.

PRAXIS verò huius problematis à conſtructione ipſa non differt, niſi quod recta H I, duci non debet, neque recta C G. Hæ enim propter demonſtrationem tantum ductæ ſunt.

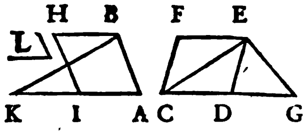
ADDIT hic aliud problema Peletarius, hoc modo.

AD datam rectam lineam, dato parallelogrammo conſtituere æquale triangulum in dato angulo rectilineo.

SIT data recta A B; datum parallelogrammum C D E F, & datus angulus L. Producatur C D, ad G, vt D G, æqualis ſit ipſi C D,

& iun-

Digitized by Google



& iungatur G E, recta: Eritque triãgulum C E G, parallelogrammo C D E F, æquale, vt demonſtrauimus ſcholio propoſ. 41. a Fiat iam ſuper data recta A B, parallelogrammum A B H I, æquale triangulo C E G, hoc eſt, parallelogrammo C D E F, habens angulum A, angulo L, æqualem; & producatur A I, ad K, vt ſit I K. æqualis ipſi A I, iungaturque recta B K. Dico triangulum A B K, conſtitutum ſuper datam rectam A B, habensq́; angulum A, æqualem dato angulo L; æquale eſſe dato parallelogrammo C D E E. Cum enim triangulum A B K, æquale ſit parallelogrammo A B H I, ex ſcholio propoſ. 41. quod æquale eſt conſtructum parallelogrammo C D E F, conſtat propoſitum.

a 44. primi.

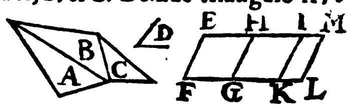
PRAXIS huiuſce problematis à conſtructione non differt; difficilisq́; non eſt, ſi adhibeatur præcedens praxis, qua triangulo E C G, parallelogrammum A B H I, ſuper data recta A B, in dato angulo A, conſtruatur.

PROBL. 13. PROPOS. 45.

AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum conſtituere, in dato angulo rectilineo.

QVAMVIS Euclides proponat hoc problema abſolutè, non aſtringendo nos ad certam aliquam rectam lineam datam, vt in præcedenti propoſ. 44. fecerat; tamen quia in ſequentibus frequenter vſurpata in data recta linea, placuit ipſum proponere vna cum data recta linea. Sit ergo recta data E F; rectilineum A B C, & datus angulus D. Oportet igitur conſtruere ad datam rectam E F, parallelogrammum æquale rectilineo A B C, quod habeat angulum æqualem angulo D. Reſoluatur rectilineum in triangula A, B, & C. Deinde triangulo A, b æquale parallelogrammum conſtituatur E F G H, ſuper rectam E F, habens angulum F, angulo D, æqualem. Item ſuper rectã G H, parallelogrammum G H I K, æquale triangulo B, habens angulum G, æqualem angulo D. Item ſuper rectam I K, parallelogrammum I K L M, æquale triangulo C, habens angulum K, æqualem angulo D; Et ſic deinceps procedatur, ſi plura fuerint triangula in dato rectilineo: factumque erit, quod iubetur. Nam tria parallelogramma conſtructa, quæ quidem æqualia ſunt rectilineo dato A B C, conficiunt totum vnum parallelogrammum, quod ſic demonſtratur. Duo anguli E F G, H G K, c inter ſe ſunt æquales;

b 44. primi.



c 1. pronun.

Digitized by Google

æquales, cum vterque æqualis ſit angulo D. Addito igitur communi angulo F G H, erunt duo anguli E F G, F G H, *a* qui duobus rectis æquiualent, *b* æquales duobus angulis H G K, F G H, ideoq; hi anguli duobus etiam rectis æquales erunt. *c* Quare F G, G K, vnam rectam lineam efficient. Eadem ratione oſtendemus, E H, H I, vnam rectam lineam efficere, propterea quod duo anguli E H G, H I K, æquales inter ſe ſunt, (*d* cum ſint æquales oppoſitis angulis æqualibus E F G, H G K.) *e* & duo anguli H I K, I H G, duobus ſunt rectis æquales, &c. Cum igitur E I, F K, ſint parallelæ. *f* Itemq; E F, I K, quod vtraque parallela ſit rectæ H G; Parallelogrammum erit E F K I. Eodem modo demonſtrabitur, parallelogrammũ I K L M, adiunctum parallelogrammo E F K I, conſtituere totum vnum parallelogrammum E F L M. Ad datam ergo rectam lineam E F, dato rectilineo A B C, conſtituimus æquale parallelogrammum E F L M, habens angulum F, æqualem angulo D, dato. Quod erat efficiendum.

a 29. *primi.* b 2. *pronun.* c 14. *pri.* d 34. *primi.* e 29. *primi.* f 30. *pri.*

SCHOLIVM.

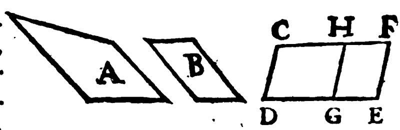
PARI ratione, propoſitis quotcunque rectilineis, conſtituemus illis parallelogrammum æquale, ſi omnia reſoluantur in triangula, quibus æqualia parallelogramma exhibeantur, ſingulis ſingula, per propoſ. 44. Veluti factum eſt in hoc problemate. Nam cum omnia hæc parallelogramma efficiant vnum parallelogrammum, vti hic demonſtratum fuit, conſtitutum erit parallelogrammum æquale rectilineis propoſitis. Vt ſi quis intelligat duo rectilinea propoſita A B, & C; Atque A B, reſoluatur in triangula A, & B, ſingulisq; triangulis, A, B, C, ſingula parallelogramma E G, G I, I L, ſuper rectas E F, H G, I K, iuxta artem huius problematis, æqualia conſtituantur, ex propoſ. 44. erit conſtructum parallelogrammum totum E F L M, æquale duobus rectilineis A B, & C. Et ſic de pluribus.

PRAXIS autem huius problematis ex praxi præcedentis propoſ. ſæpius repetita petenda eſt.

HVC referri poterit problema vtiliſſimum ex Peletario, quod nos tamen alia ratione, & breuiori demonſtrabimus in hunc modum.

DATIS duobus rectilineis inæqualibus, exceſſum maioris ſupra minus inquirere.

SINT data rectilinea A, & B, ſitque A, maius. Oportet igitur indagare, qua magnitudine rectilineum A,



ſuperet rectilineum B. g *Fiat parallelogrammum C D E F, in quocunque angulo D, æquale maiori rectilineo A. Et ſuper rectam C D, paral-* g 45. *pri. mi.*

Digitized by Google

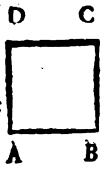
lelogrammum C D G H, in eodem angulo D, æquale rectilineo minori B. Quoniam igitur parallelogrammum C D E F, ſuperat parallelogrammum C D G H, parallelogrammo E F H G, ſuperabit quoque figura A, figuram B, eodem parallelogrammo E F H G. Quod eſt propoſitum.

xlv. PROBL. 14. PROPOS. 46.

A DATA recta linea quadratum deſcribere.

SIT data recta A B, ſuper quam oporteat quadratum deſcribere. Ex A, & B, *a* educantur A D B C, perpendiculares ad A B, ſintque ipſi A B, æquales, & connectatur recta C D. Dico A B C D, eſſe quadratum. Cum enim anguli A, & B, ſint recti, *b* erunt A D, B C, parallelæ: Sunt autem & æquales, quod vtraque æqualis ſit ipſi A B. Igitur *c* & A B, D C, parallelæ ſunt & æquales: & ideo parallelogrammum eſt A B C D, in quo, cum A D, D C, C B, æquales ſint ipſi A B, omnes quatuor lineæ æquales exiſtunt: Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cum C, & D, *d* æquales ſint oppoſitis rectis A, & B. Quadratum igitur eſt A B C D, ex definitione; Ac proinde à data recta linea quadratum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

a 11. primi. *b 28. primi.* *c 33 primi.* *d 34. primi.*



EX PROCLO.

LINEARVM æqualium æqualia ſunt quadrata: & quadratorum æqualium æquales ſunt lineæ.

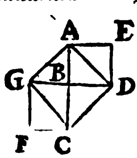


SINT primum rectæ A B, C D, æquales. Dico eorum quadrata A B E F, C D G H, æqualia quoque eſſe. Ductis enim diametris B F, D H, erunt duo latera B A, A F, trianguli B A F, duobus lateribus D C, C H, trianguli D C H, æqualia, vtrumque vtrique, cum ex definitione quadrati rectæ A F, C H, æquales ſint rectis A B, C D. Sunt autem & anguli A, & C, æquales, nempe recti. e *Igitur triangula B A F, D C H, æqualia erunt. Quæ* f *cum ſint dimidia quadratorum, erunt & quadrata tota æqualia. Quod eſt propoſitum.*

e 4. pri. *f 34. primi.*

SINT deinde quadrata A B D E, B C F G, æqualia. Dico lineas quoque ipſorum A B, B C, æquales eſſe. Coniungantur enim quadrata ad angulum B, vt rectæ A B, B C, in directum conſtituantur. Et quoniam anguli A B G, A B D, ſunt recti, g *erunt & rectæ G B, B D, in directum conſtitutæ. Ducantur diametri A D, C G, iunganturque rectæ A G, C D. Quoniam igitur quadrata A B D E, B C F G æqualia ſunt erunt & triangula A B D, B C G, eorum dimidia, æqualia. Addito ergo communi*

g 14. pri.



Digitized by Google

continui triangulo B C D, fiet totum triangulum A C D, toti triangulo
G D C, æquale. Quare triangula A C D, G D C, cum eandem ha-
beant baſin C D, ad eaſdemque ſint partes, a in eiſdem ſunt paralle- a 39.primi.
lis: ideoque parallelæ ſunt A G, C D. Et quoniam, vt in ſcholio propoſ.
34. oſtendimus, diameter in quadrato ſecat angulos quadrati biſa-
riam, erunt anguli D A C, G C A, alterni ſemirecti, ideoque æquales.
Quamobrem, b & parallelæ ſunt A D, C G. Igitur parallelogram- b 27.primi.
mum eſt A D C G: ac propterea c rectæ A D, C G, æquales. Quo-
niam ergo in triangulis A B D, B C G, latera A D, C G, æqualia c 34.primi.
ſunt, & anguli quibus ea latera adiacent, inter ſe etiam æquales,
cum ſint ſemirecti, vt in ſcholio propoſ. 34. oſtenſum fuit: erunt d re- d 26.primi.
liqua latera æqualia, nempe A B, ipſi B C, &c. Quod eſt propoſitum.

SCHOLIVM.

POSSENT hæc omnia multo breuius probari per ſuperpoſitionem quadrati vnius ſuper aliud. Nam ſi lineæ ſint æquales, ſi vna alteri ſuperponatur, congruent ipſæ inter ſe. Cum ergo & anguli ſint æquales, nempe recti, conuenient quoque ipſi inter ſe, ideoque totum quadratum toti quadrato congruet. Quod ſi quadrata ſint æqualia, congruent ipſa inter ſe, propter æqualitatem angulorum. Igitur & lineæ: alias vnum quadratum alio maius eſſet.

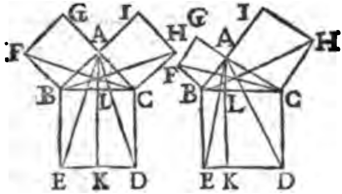
PRAXIS autem huius problematis perfacilis eſt. Si namque ad datam rectam A B, in altero extremorum, vt in A, erigatur perpendicularis A D, ipſi datæ rectæ A B, æqualis, & ex B, & D, ad interuallum eiuſdem A B, duo arcus deſcribantur ſeſe in C, interſecantes, iunganturq́ue rectæ B C, D C, conſtructum erit quadratum. Nam A B C D, cum ex conſtructione ſit figura æqualium laterum, atque adeo latera oppoſita habeat æqualia, parallelogrammum erit, vt
ad initium ſcholij propoſ. 34. demonſtrauimus. Exiſtente ergo an- e 29.primi.
gulo A, recto, e erunt & B, D, recti, nec non f & oppoſitus angu-
lus C, &c. f 34.pri.

THEOR. 33. PROPOS. 47. xlvj.

IN rectangulis triangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur, æquale eſt eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur, quadratis.

IN triangulo A B C, angulus B A C, ſit rectus, g deſcribanturque ſuper A B, A C, B C, quadrata A B F G, A C H I, B C D B. Di- g 46.primi.
co quadratum B C D B, deſcriptum ſuper latus B C, quod angulo recto opponitur, æquale eſſe duobus quadratis A B F G, A C H I, quæ ſuper alia duo latera ſunt deſcripta, ſiue hæc duo latera æqua-
lia ſint, ſiue inæqualia. Ducatur enim recta A K, h parallela ipſi h 31.pri.

BE, vel ipſi CD, ſecans BC, in L, & iungantur rectæ AD, AE,
a 14.primi. CF, BH. Et quia duo anguli BAC, BAG, ſunt recti, *a* erunt re-
ctæ GA, AC, vna linea recta; eodemque modo IA, AB, vna re-
cta linea erunt. Rurſus quia anguli ABF, CBE, ſunt æquales,
b 1.pronun. cum ſint recti, ſi addatur communis angulus ABC, *b* fiet totus



angulus CBF, toti angulo
ABE, æqualis; ſimiliterque
totus angulus BCH, toti
angulo ACD. Quoniam igi-
tur duo latera AB, BE, trian-
guli ABE, æqualia ſunt duo-
bus lateribus FB, BC, trian-
guli FBC, vtrumque vtri-
que, vt conſtat ex definitione quadrati: Sunt autem & anguli
ABE, FBC, contenti hiſce lateribus æquales, vt oſtendimus;
c 4.pri. *c* Erunt triangula ABE, FBC, æqualia. Eſt autem quadratum,
d 41.primi. ſeu parallelogrammum ABFG, *d* duplum trianguli FBC, cum
ſint inter parallelas FB, CG, & ſuper eandem baſin BF: Et paral-
lelogrammum BEKL, duplum trianguli ABE, quòd ſint inter
e 6.pronun. parallelas BE, AK, & ſuper eandem baſin BE. Quare *e* æqualia
erunt quadratum ABFG, & parallelogrammum BEKL. Eadem
ratione oſtendetur, æqualia eſſe quadratum ACHI, & parallelo-
f 4.pri. grammum CDKL. *f* Erunt enim rurſus triangula ACD, HCB,
æqualia, ideoq; eorum dupla, parallelogrammũ videlicet CDKL,
& quadratũ ACHI, æqualia erũt. Quamobrem totum quadratũ
BCDE, quod componitur ex duobus parallelogrammis BEKL,
CDKL; æquale eſt duobus quadratis ABFG, ACHI. In rectan-
gulis ergo triangulis, quadratũ, &c. Quod demonſtrandum erat.

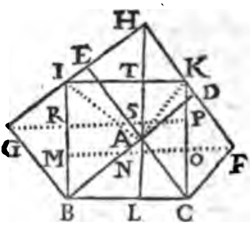
SCHOLIVM.

*FACILE ex theoremate iſto quiuis intelliget, in triangulo am-
blygonio quadratum lateris obtuſo angulo oppoſiti maius eſſe duobus
quadratis ſimul aliorum duorum laterum: In quouis autem trian-
gulo quadratum lateris vni acutorum angulorum oppoſiti minus eſ-
ſe duobus quadratis ſimul aliorum duorum laterum. Nam ſi angu-
lus coarctaretur donec fieret rectus, manentibus iiſdem lateribus eum
ambientibus, euaderet latus oppoſitum minus: Si autem acutus an-
gulus dilataretur, donec fieret rectus, manentibus iiſdem lateribus
eum ambientibus, fieret latus oppoſitum maius, vt patet. Cum ergo
quadratum lateris angulo recto oppoſiti æquale ſit hic oſtenſum duo-
bus quadratis ſimul aliorum duorum laterum; perſpicuum eſt, qua-
dratum lateris obtuſo angulo oppoſiti eſſe maius duobus quadratis ſi-
mul aliorum duorum laterum: quadratum verò lateris angulo acuto
oppoſiti eſſe minus duobus quadratis ſimul duorum laterum reliquo-
rum.*

Digitized by Google

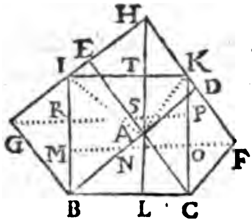
rum. Quanto autem illud maius ſit, & quanto hoc minus, demonſtrabit Euclides lib. 2. propoſ. 12. & 13.

QVONIAM verò theorema hoc pulcherrimum eſt, vtilitatesq; habet inſignes, operæpretium iudicaui tentare, num illud aliis viis demonſtrari poſſit, variata aliquantulum conſtructione; quod Peletarius ſine proportionibus fieri poſſe negauit. Sit ergo rurſus triangulum A B C, cuius angulus B A C, rectus ſit, productisq; lateribus B A, C A, ad partes anguli recti. fiant A D, A E, ipſis A C, A B, æquales; & per C, D, B, E, ipſis A B, A C, parallelæ agantur coëuntes in F, G. Et quia in parallelogrammis C D, B E, a tum latera D F, F C, oppoſitis lateribus A C, A D, quàm latera E G, G B, lateribus oppoſitis A B, A E, æqualia ſunt, erit vtrumque parallelogrammum æquilaterum: Sed & anguli omnes recti ſunt. b Nam F, G, oppoſitis rectis D A C, E A B, æquales ſunt, ideoque recti: Anguli autem C, D, B, E, recti ſunt, quod vterius C, D, cum recto D A C, & vterius, B. E. cum recto E A B, c æqualis ſit duobus rectis. Quadrata ergo ſunt C D, B E, laterum A C, A B. Productis etiam lateribus F D, G E, donec conueniant in H, erigantur in B, C, ad B C, perpendiculares B I, C K, ſecantes G H, F H, in I, K, iungaturq; recta I K. Et quia, ſi à rectis angulis I B C, A B G, auferatur communis angulus A B I, reliqui A B C, G B I, æquales ſunt; ſunt autem & recti anguli B A C, B G I, æquales; erunt duo anguli A, B, trianguli, A B C, duobus angulis G, B, trianguli G B I, æquales, vterque vtrique: Sunt autem & latera A B, G B, illis adiacentia æqualia, ob quadratum B E. d Igitur & tam latera B C, B I, quàm A C, G I, æqualia erunt, & reliqui anguli C, I, æquales. Non aliter in triangulis A B C, F K C, æqualia erunt tum latera B C, C K, quàm A B, F K, & anguli B, K: propterea quod duo anguli A, C, trianguli A B C, duobus angulis F, C, trianguli F K C, æquales ſunt: (cum A, F, recti ſint, & duo anguli C, reliqui duorum rectorum, dempto communi A C K) & latera A C, C F, illis adiacentia æqualia, ob quadratum C D. Quare rectæ B I, C K, inter ſe etiam æquales erunt. f Cum ergo quoque ſint parallelæ, g erunt etiam B C, I K, æquales, & parallelæ. Quadratum igitur eſt B C K I, lateris B C, cum quatuor eius latera ſint æqualia, & omnes anguli recti, quod anguli I, K, oppoſitis rectis C, B, æquales ſint. Dico ergo, quadratum C I, duobus quadratis B E, C D, æquale eſſe. Ducta enim ex H, per A, recta H T A L, ipſis B I, C K, parallela erit. Nam quia G E, h ipſi B A, æqualis eſt, & E H, ipſi A D, hoc eſt, ipſi G I, quæ ipſi A C, ſiue A D, oſtenſa fuit æqualis, erit &, addita communi E I, tota H I, toti G E, hoc eſt, ipſi A B, æqualis. Cum ergo H I, A B, ſint etiam parallelæ,



a 34. primi.
b 34. primi.
c 29. primi.
d 26. primi.
e 1. pronun.
f 28. primi.
g 33. primi.
h 34. primi.

Digitized by Google



a33.primi. lelæ, a erunt quoque B I, A H, parallelæ & æquales. Eodemq́; modo A H, ipſi C K parallela oſtendetur, & æqualis. Quoniam igitur b35.primi. b tam quadratum B E, parallelogrammo B H, ſuper eandem baſim A B, quàm parallelogrammum B T, eidem parallelogrammo B H, ſuper eandem baſin B I, æquale eſt, c1.pronun. c erit quoque quadratum B E, parallelogrammo B T, æquale. d35.pri. Sic etiam quia tam d quadratum C D, parallelogrammo C H, ſuper eandem baſin A C, quam parallelogrammum C T, eidem parallelogrammo C H, ſuper eandem e1.pronun. baſin C K, æquale eſt, e erit quoque quadratum C D, parallelogrammo C T, æquale. Totum ergo quadratum B C K I, ex duobus parallelogrammis B T, C T, compoſitum, duobus quadratis B E, C D, æquale eſt. Quod erat demonſtrandum.

ALITER. Loco rectæ H T A L, iungantur duæ rectæ A I, A K, & per A, ipſis B I, C K, parallela ducatur T A L. Quoniam ergo f41.pri. f tam quadratum B E, (oſtendemus enim vt prius, B K, B E, C D, quadrata eſſe laterum B C, A B, A C.) trianguli A B I, ſuper eandem baſin A B, quam parallelogrammum B T, eiuſdem trianguli g6.pronun. A B I, ſuper eandem baſin B I, duplum eſt, g erit quadratum B E, parallelogrammo B T, æquale. Pari ratione, quia h tam quadratum h41.primi. C D, trianguli A C K, ſuper eandem baſin A C, quam parallelogrammum C T, eiuſdem trianguli A C K, ſuper eandem baſin C K, i6.pronun. duplum eſt, i erit quoque quadratum C D, parallelogrammo C T, æquale. Quam ob rem, vt prius, totum quadratum B C K I, ex parallelogrammis duobus B T, C T, conflatum, duobus quadratis B E, C D, æquale eſt. Quod erat oſtendendum.

ALITER. Loco rectarum H T A L, A I, A K, ducantur per F, G, ipſis B C, I K, parallelæ F M, G P, ſecantes A B, C K, in N, O, & B I, C E, in R, S. Eritque B R, ipſi K O, æqualis. Quoniam enim k29.primi. k anguli O, R, recti ſunt, & O K F, R B G, æquales, quod vterque angulo A B C, ſupra oſtenſus ſit æqualis; erunt duo anguli O, K, trianguli F K O, duobus angulis R, B, trianguli G B R, æquales, vterque vtrique: Sunt autem & latera F K, B G, illis adiacentia æqualia, l26.primi. quod vtrumque ſupra ſit oſtenſum ipſi B C, æquale. l Igitur & latera K O, B R, æqualia erunt. Itaque quoniam m tam parallelogramma m33.primi. B C F N, B C O M, ſuper eandem baſin B C, quam parallelogramma B C S G, B C P R, ſuper eandem baſin B C, æqualia ſunt, eſtque parallelogrammum B C P R, parallelogrammo I K O M, æquale, ob rectas B R, K O, oſtenſas æquales; (Nam hinc fit, vt ſi vnum alteri ſuperponatur, ſibi mutuo congruant, propter laterum, angulorumq́; æqualitatem) erunt ambo parallelogramma B C F N, B C S G,

toti qua-

Digitized by Google

rati quadrato B C K I, ex duobus parallelogrammis B C O M, I K O M, compoſito æqualia. a Cum ergo tam quadratum C D, parallelogrammo B C F N, ſuper eandem baſin C F, quàm quadratum B E, parallelogrammo B C S G, ſuper eandem baſin B G, æquale ſit; erunt quoque ambo quadrata C D, B E, eidem quadrato B C K I, æqualia. Quod demonſtrandum erat.

a 35. primi.

ATQVE in hunc modum aliæ demonſtrationes excogitari poterunt. Video demonſtrationem Euclidis ſimpliciorem eſſe, & magis expeditam, ſed non iniucundum tamen eſt intelligere, varijs demonſtrationibus eandem veritatem poſſe confirmari.

INVENTIO porro admirabilis, atque pulcherrimi huius theorematis ad Pythagoram refertur, qui, vt ſcribit Vitruuius lib. 9. hoſtias Muſis immolauit, quòd ſe in tam præclaro inuento adiuuerint. Sunt qui putent, eum immolaſſe centum boues: ſi tamen Proclo credendum eſt, vnum tantummodo obtulit. Fortaſſe autem Pythagoras, vt nonnulli volunt, ex numeris occaſionem ſumpſit, vt theorema hoc inueſtigaret. Cum enim hos tres numeros 3. 4. 5. diligenter eſſet contemplatus, vidiſſetque quadratum numerum maioris æqualem eſſe quadratis numeris reliquorum, compoſuit triangulum ſcalenum, cuius maximum latus diuiſum erat in 5. partes æquales, minimum in 3. eiuſdem magnitudinis, & reliquum in 4. Quo facto, conſiderauit angulum ſub his duobus lateribus contentum, inuenitque eum eſſe rectum. Idq; in quamplurimis alijs numeris, vt in 6. 8. 10. & 9. 12. 15. &c. obſeruauit. Quare inquirendum eſſe iudicauit, num in omni triangulo rectangulo quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, reliquorum laterum quadratis æquale eſſet, quandoquidem omnia triangula, quorum latera habebant magnitudinem ſecundum dictos numeros, continebant vnum angulum rectum: Atque ita tandem mirabile hoc theorema maxima animi voluptate adinuenit, firmaque ratione demonſtrauit. Quod tamen Euclides mirandum in modum amplificauit lib. 6. propoſ. 31. Vbi demonſtrauit, non ſolum quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, æquale eſſe quadratis reliquorum duorum laterum; Verum etiam figuram quamlibet rectilineam ſuper latus recto angulo oppoſitum conſtructam, ſiue ea ſit triangulum, ſiue quadrangulum, &c. æqualem eſſe duabus figuris, quæ ſuper reliqua latera deſcribuntur, dummodo priori ſint ſimiles, ſimiliterq́; deſcriptæ, vt ibidem oſtendemus.

CÆTERVM quoniam mentionem fecimus trium numerorum, quorum maximi quadratum æquale eſt quadratis reliquorum, non abs re fuerit, paucis explicare, quonam pacto huiuſmodi numeri inueniantur. Habitis igitur his tribus numeris 3. 4. 5. ſi duplicentur, habebuntur alij tres, 6. 8. 10. ſi iidem triplicentur, exurgent alij tres 9. 12. 15. & ſi quadruplicentur, inuenientur hi tres 12. 16. 20. Atque ita reperientur quotcunq; alij, ſi primi illi tres per quemcunque mul-

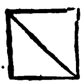
tiplicentur numerum. Traduntur tamen à Proclo duæ regulæ, quibus inueniuntur prædicti numeri, nulla habita ratione illorum trium. Prima aſcribatur Pythagoræ, & eſt huiuſmodi. Sumatur pro minimo quicunque numerus impar, vt 5. ex quo ita alios reperies. Ex quadrato numeri accepti, vt hic ex 25. reiice vnitatem. Nam reliqui numeri dimidiũ, videlicet 12. erit alter numerus, cui ſi addatur vnitas, exurget tertius numerus 13. Huius igitur quadratum æquale eſt quadratis aliorum. Quod ſi numerus impar acceptus fuiſſet 3. eſſent reliqui duo inuenti per hanc regulam 4. & 5. Secunda regula tribuitur Platoni, quæ talis eſt. Accipiatur numerus quicunque par, nempe 6. Ex huius dimidij quadrato, nimirum 9. detrahe vnum, eidemq; adde vnum, habebisq; reliquos duos numeros 8. & 10. primus autem eſt 6. nimirum numerus par acceptus. Hac regula ſi accipiatur par 10. reperientur alij duo 24. & 26.

COLLIGVNTVR ex celeberrimo hoc Pythagoræ inuento plurima ſcitu non iniucunda tam theoremata, quam problemata, è quibus viſum eſt ea duntaxat in medium proferre, quæ vtilitatem magnam rebus Geometricis allatura creduntur, initium hinc ſumentes.

I.

SI in quadrato quouis diameter ducatur, quadratum à diametro deſcriptum duplum erit prædicti quadrati.

A B



D C

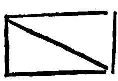
IN quadrato ABCD, ducatur diameter AC. Dico quadratum diametri AC, duplum eſſe quadrati ABCD. Cum enim in triangulo ABC, angulus B, rectus ſit, a *erit quadratum lateris AC, æquale duobus quadratis laterum AB, BC. Cum igitur quadrata linearum AB, BC, æqualia ſint, quòd lineæ AB, BC, ſint æquales, erit quadratum diametri AC, duplum cuiuslibet illorum, vt quadrati lineæ AB, hoc eſt, quadrati ABCD. Quod eſt propoſitum.*

a 47. *primi.*

II.

QVADRATVM diametri figuræ altera parte longioris æquale eſt duobus quadratis laterũ inæqualium.

A B



D C

IN altera parte longiori ABCD, ducatur diameter AC; & quia in triangulo ABC, angulus B, eſt rectus, b *erit quadratum lateris AC, æquale duobus quadratis laterum inæqualium AB, BC. Quod eſt propoſitum.*

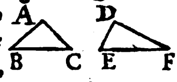
b 47. *primi.*

III.

SI fuerint duo triangula rectangula, quorum latera rectis angulis oppoſita ſint æqualia, erunt duo quadrata reliquo-

reliquorum duorum laterum vnius trianguli æqualia duobus quadratis reliquorum duorum laterum alterius.

TRIANGVLORVM ABC, DEF, anguli A, & D, ſint recti, laterá que oppoſita BC, EF, æqualia. Dico duo quadrata laterum AB, AC, ſimul ſumpta æqualia eſſe duobus quadratis laterum DE, DF, ſimul ſumptis. Nam quadrata linearum BC, EF, æqualia inter ſe ſunt, cùm & ipſæ lineæ inter ſe ponantur æquales. Quadrato autem

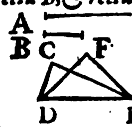


lineæ BC, a æqualia ſunt quadrata linearum AB, AC. Et qua- a 47. primi.
drato lineæ EF, æqualia ſunt quadrata linearum AB, AC; Et qua-
drato lineæ EF, æqualia ſunt quadrata linearum DE, DF. b Qua- b 1. pronun.
drata ergo rectarum AB, AC, quadratis rectarum DE, DF, æqualia ſunt. Quod eſt propoſitum.

IV.

DVOBVS quadratis inæqualibus propoſitis, inuenire alia duo quadrata, quæ & æqualia ſint inter ſe, & ſimul ſumpta æqualia duobus inæqualibus propoſitis ſimul ſumptis.

SINT A, & B, latera duorum quadratorum inæqualium. Fiat angulus rectus DCE, ſitq; DC, recta æqualis rectæ B, & recta CE, rectæ A. Ducta deinde recta DE, coniungente duo puncta D, E, conſtituantur ſuper ipſam duo an-



guli ſemirecti DEF, EDF, c coeantq; rectæ c 13. pronun.
DF, EF, in F. Quoniã igitur in triangulo FDE,
anguli FDE, FED, æquales ſunt; d erunt & d 6 pri.
latera DF, EF, æqualia, ideoq; & quadrata eorundem laterum æqualia. Dico iam, eadem quadrata linearum DF, EF, æqualia eſſe quadratis linearum A, & B, hoc eſt, quadratis linearum CE, & CD. Nam cùm in triangulo DEF, anguli FDE, FED, faciant v- e 32. primi.
num rectum; e erit reliquus angulus F, rectus. f Quamobrem e-
runt quadrata linearum DF, EF, æqualia quadrato lineæ DE: f 47. primi.
g Sed eidem quadrato lineæ DE, æqualia ſunt quoque quadrata li-
nearum CD, CE. Igitur quadrata linearum DF, EF, h æqualia g 47. primi.
ſunt quadratis linearum DC, EC. Quod eſt propoſitum.

V. h 1. pronun.

PROPOSITIS duabus lineis inæqualibus, inuenire id, quo plus poteſt maior, quàm minor.

POTENTIA lineæ rectæ dicitur eius quadratum. Tantum enim quæuis recta linea poſſe dicitur, quantum eſt eius quadratum. Sint ergo duæ lineæ inæquales A, & B, oporteatq; cognoſcere, quanto

Digitized by Google

maius ſit quadratum maioris lineæ A, quàm minoris B. Ex quauis

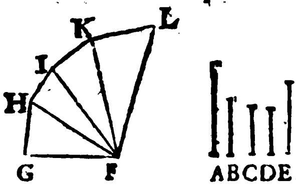


linea recta C D, ſumatur C E, æqualis rectæ A, & E F, æqualis rectæ B. Deinde centro E, & interuallo E C, ſemicirculus deſcribatur C G D; & ex F, ducatur F G, perpendicularis ad C D. Dico quadratum rectæ A, hoc eſt rectæ C E, ſibi æqualis, maius eſſe, quàm quadratum rectæ B, hoc eſt, rectæ E F, ſibi æ-
a47. primi. *qualis, quadrato rectæ F G. Ducta enim recta E G, a erit eius quadratum æquale quadratis rectarum E F, F G, hoc eſt, quadratum rectæ E C, illi æquale, ſuperabit quadratum rectæ E F, quadrato rectæ F G. Quod eſt propoſitum.*

VI.

PROPOSITIS quotcunque quadratis, ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis æquale.

SINT latera quinque quadratorum A, B, C, D, E. Oporteatq; inuenire quadratum æquale omnibus illis quinque. Fiat angulus re-



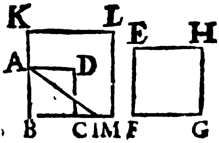
ctus F G H, ſitq; recta F G, æqualis rectæ A, & recta G H, rectæ B. Ducta deinde recta H F, fiat angulus rectus F H I, ſitq; H I, æqualis rectæ C. Ducta rurſus recta I F, fiat angulus rectus F I K, ſitq; I K, æqualis rectæ D. Ducta denique recta K F, fiat angulus rectus F K L, ſitq; K L, æqualis rectæ E, ducaturq; recta F L. Dico quadratum rectæ F L, æquale eſſe quinq; qua-
b47. primi. *dratis propoſitis. Quadratum enim rectæ F H, b æquale eſt quadratis rectarum F G, G H, hoc eſt, quadratis rectarum A, & B. Rurſus qua-*
c47. primi. *dratum rectæ F I, c æquale eſt quadratis rectarum F H, H I, & idcirco quadratis rectarum A, B, & C. Item quadratum rectæ F K,*
d47. primi. *d æquale eſt quadratis rectarum F I, I K, ideoq; quadratis rectarum A, B, C, & D. Denique quadratum rectæ F L, e æquale eſt quadratis*
e47. primi. *rectarum F K, K L, ac propterea quadratis rectarum A, B, C, D, & E. Quod eſt propoſitum.*

VII.

PROPOSITIS duobus quadratis quibuſcunque, alteri illorum adiungere figuram, quæ reliquo quadrato ſit æqualis, ita vt tota figura compoſita ſit etiam quadrata.

SINT duo quadrata A B C D, E F G H, propoſitumq; ſit quadrato A B C D, apponere figuram, quæ ſit æqualis quadrato E F G H, &c. Sumatur recta B I, æqualis rectæ F G, lateri quadrati E F G H. Ducta au-

Digitized by Google

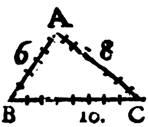


Ducta autem recta A I, & producta recta B A, ad partes A, accipiatur B K, æqualis rectæ A I, perficiaturq́; quadratũ B K L M. Dico figuram A D C M L K, quadrato A B C D, adiunctam, æqualem eſſe quadrato E F G H. Quoniam enim quadratum rectæ A I, hoc eſt, quadratum B K L M, a *æquale eſt quadratis rectarum A B, B I, hoc eſt, quadratis A B C D, E F G H: ſi auferatur commune quadratum A B C D,* b *remanebit figura A D C M L K æqualis quadrato E F G H. Quod eſt propoſitum.* a 47 primi. b 3. pronun.

VIII.

COGNITIS duobus lateribus quibuſcunque trianguli rectanguli, in cognitionem reliqui lateris peruenire.

SIT angulus A, rectus in triangulo A B C, ſintq́; primùm cognita latera A B, A C, circa angulum rectum, quorum A B, ponatur 6. palmorum, & A C, 8. Quoniam igitur quadrata rectarum A B, A C, nempe quadrati palmi 36. & 64. c *æqualia ſunt quadrato rectæ B C; ſi illa coniungantur ſimul, efficietur hoc quadratorum palmorum 100. Latus ergo B C, continebit 10. palmos. Tantum enim eſt latus, ſeu radix quadrati 100. palmorum, vt perſpicuum eſt apud Arithmeticos. Sint deinde cognita latera A B, B C, ſitq́; A B, 6 palmorum, & B C, 10. Quoniam igitur quadrata rectarum A B, A C,* d *æqualia ſunt quadrato rectæ B C; ſi quadratum rectæ A B, quod continet palmos 36. detrahatur ex quadrato rectæ B C, quod eſt palmorum 100. remanebit quadratum rectæ A C, 64 palmorum. Latus ergo A C, continebit 8. palmos. Tantum enim eſt radix quadrati, ſeu radix 64. palmorum. Quod eſt propoſitum. Cæterùm non ſemper hac arte inuenientur numeri rationales, quia non omnis numerus habet latus, radicémve quadratum, vt notum eſt apud Arithmeticos. Vnde latus inuentum ſæpenumero exprimi nequit, niſi per radicem ſurdam, quam vocant: Sed de his alias.* c 47 primi. d 47 primi.

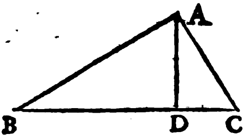


IX.

SI ex angulo à duobus lateribus inæqualibus triangulo comprehenſo ad baſin perpendicularis ducatur cadens intra triangulum, ſecabitur baſis in partes inæquales, maiórque pars iuxta maius latus erit. Et contrà, ſi baſis à perpendiculari ſecetur non bifariam, erunt duo latera inæqualia, maiúſque illud erit, quod maiori baſis ſegmento adiacet.

CADAT

Digitized by Google



CADAT primum in triangulo ABC, cuius latus AB, maius ſit latere AC, perpendicularis AD, ad ABC, demiſſa intra triangulum, quod tum demū continget, quando vterque angulus B, C, acutus eſt, vt ex coroll. 2. propoſ. 17. conſtat. Dico ſegmentum BD, eſſe maius ſegmento CD. Quoniam enim a *tam quadratum ex AB, quadratis ex AD, BD, quàm quadratum ex AC, quadratis ex AD, CD, æquale eſt: Eſt autem quadratum ex AB, maius quadrato ex AC, quod latus AB, latere AC, ponatur maius; erunt quoque duo quadrata ex AD, BD, maiora duobus quadratis ex AD, CD: Et ablato communi quadrato rectæ AD, reliquum quadratum ex BD, reliquo quadrato ex CD, maius erit. Quare & recta BD, maior erit, quàm recta CD, quod eſt primum.*

a 47. primi.

FACIAT deinde perpendicularis AD, ſegmentum BD, maius ſegmento CD. Dico latus AB, maius eſſe latere AC. Erit enim quadratum ex BD, quadrato ex CD, maius: Additoq́; quadrato communi ex AD; duo quadrata ex BD, AD, duobus quadratis ex CD, AD, maiora erunt. Cùm ergo b *tam quadratum ex AB, quadratis ex BD, AD, quàm quadratum ex AC, quadratis ex CD, AD æquale ſit; erit quoque quadratum ex AB, quadrato ex AC, maius; proptereaq́; & latus AB, latere AC, maius erit. Quod eſt propoſitum.*

b 47. primi.

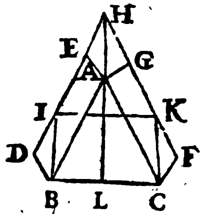
ATQVE in hunc modum plurima alia ex inuento hoc Pythagoræ colligi poſſunt, quæ conſulto, ne lectori moleſti ſimus, hic omittenda cenſuimus, & in alium locum differenda.

THEOREMATE porrò hoc Pythagoreo multò vniuerſalius eſt illud, quod à Pappo demonſtratur in omni triangulo, ſiue illud rectangulum ſit, ſiue non, & de quibuſcunque parallelogrammis ſuper latera trianguli conſtructis tam rectangulis, quàm non rectangulis, etiamſi non ſint inter ſe æquiangula. Quod nos in formam theorematis redigentes, clarius hoc modo propoſuimus, & meo iudicio generalius adhuc, quàm Pappus.

IN omni triangulo, parallelogramma quæcunq; ſuper duobus lateribus deſcripta, æqualia ſunt parallelogrammo ſuper reliquo latere conſtituto, cuius alterum latus æquale ſit, & parallelum rectæ ductæ ab angulo, quem duo illa latera comprehendunt, ad punctum, in quo conueniunt latera parallelogrammorum lateribus trianguli oppoſita, ſi ad partes anguli illius producantur.

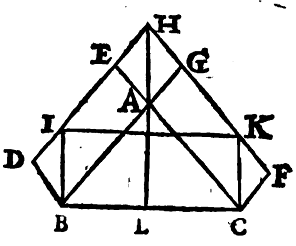
SIT triangulum quodcunque ABC, conſtituanturq́; ſuper latera

tera AB, AC, parallelogramma quæcunque ABDE, ACFG, quorum latera DE, FG, quæ lateribus AB, AC, aſſumptis in triangulo opponuntur, producta ad partes anguli A, dictis lateribus AB, AC, comprehenſi, conueniant in H, ducaturq; recta AH. Dico parallelogramma AD, AF, æqualia eſſe parallelogrammo ſuper latus BC, deſcripto, cuius alterum latus æquale ſit, & parallelum rectæ AH. Producta enim HA, ſecet BC, in L, & per B, C, agantur BI, CK, parallelæ ipſi AH, iungaturq; recta IK. Quoniam igitur parallelogramma ſunt BI, HA, CKHA; a erit vtraq; BI, CK, ipſi AH, æqualis; atque adeò & inter ſe æquales erunt BI, CK; b quæ cùm ſint etiam parallelæ, quòd eidem AH, parallelæ ſint; c erunt quoque BC, IK, parallelæ, & æquales. Quare parallelogrammum eſt BCKI, ſuper latus BC, habens alterum latus BI, rectæ AH, æquale, & parallelum: Cui quidem æqualia oſtendenda ſunt parallelogramma AD, AF. d Quia ergo æqualia ſunt parallelogramma AD, ABIH, quòd eandem habeant baſin AB, in eiſdemq; ſint parallelis AB, HD; e Eſt autem ABIH, parallelogrammo IL, æquale, quòd illud cum hoc etiam eandem habeat baſin BI, in eiſdemq; ſit parallelis BI, LH: Erit quoque AD, eidem IL, æquale. Non aliter oſtendemus, AF, ipſi KL, eſſe æquale: Quare parallelogramma AD, AF, parallelogrammo BK, æqualia ſunt. Quod eſt propoſitum.



a 34. primi.
b 30. primi.
c 33. pri.
d 35. pri.
e 35. pri.

PAPPVS conſtruit figuram aliter. Nam ſumit rectas AE, AE, & AB, AG, in directum poſitas, ita vt parallelogramma AD, AF, ſint æquiangula, habentia angulos AED, AGF angulo BAC, f internos externo æquales, vt hæc eius figura indicat. Sed nos vniuerſalius rem propoſuimus, vt manifeſtum eſt.



f 29. pri.

THEOR. 34. PROPOS. 47. xlvij.

SI quadratum, quod ab vno laterum trianguli deſcribitur, æquale ſit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus deſcribuntur, quadratis: Angulus comprehenſus ſub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus eſt.

DETVR triangulum ABC, ſitq; quadratum lateris AC, æquale quadratis reliquorum laterum BA, BC. Dico angulum ABC,

Digitized by Google

A B C, eſſe rectum. Ducatur namque B D, perpendicularis ad B A, & æqualis rectæ B C, connectaturq; recta A D. Quoniã igitur *a* 47. pri- in triangulo A B D, angulus A B D, rectus eſt; *a* erit quadratum mi. rectæ A D, æquale quadratis rectarum B A, B D: Eſt autem quadratum rectæ B D, quadrato rectæ B C, æquale, ob linearum æqualitatem. Quare quadratum rectæ A D, quadratis rectarum B A, B C, æquale erit. Cùm ergo quadratum rectæ A C, eiſdem quadratis rectarum B A, B C, æquale ponatur; *b* erunt quadra- *b* 1. pro- ta rectarum A D, A C, inter ſe æqualia, ac propterea & rectæ ipſæ num. A D, A C, æquales. Quoniã igitur latera B A, B D, trianguli A B D, æqualia ſunt lateribus B A, B C, trianguli A B C; & baſis A D, *c* 8. pri. oſtenſa eſt æqualis baſi A C; *c* erunt anguli A B D, A B C, æquales: Eſt autem angulus A B D, ex constructione rectus. Igitur & angulus A B C, rectus erit. Si igitur quadratum, quod ab vno laterum trianguli deſcribitur, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

CONVERSVM eſt autem theorema hoc præcedentis theorematis Pythagorici, vt perſpicuum eſt.

TRIANGVLORVM COMparationes.

NOVEM modis duo triangula inter ſe comparauit Euclides hoc libro. Primum quando duo latera duobus lateribus æqualia ſunt, vtrumque vtrique, con- *d* 4. pri. tinentque angulum angulo æqualem, *d* collegit æqualitatem baſium, reliquorum angulorum, atq; adeò totorum triangulorum.

DEINDE, quando duo latera duobus lateribus æ- *e* 8. pri. qualia ſunt, vtrumq; vtrique, baſisq; baſi æqualis, *e* intulit æqualitatem angulorum illis lateribus comprehenſorum. Vbi nos concluſimus etiam æqualitatem reliquorum angulorum, totaq; triangula probauimus eſſe æqualia.

TERTIO, cùm duo latera duobus lateribus ſunt æqualia, vtrumque vtrique, comprehendunt autem an- *f* 24. pri. gulos inæquales, *f* oſtendit baſin maiori angulo oppoſitam eſſe maiorem baſe minori angulo oppoſita.

QVAR-

QVARTO, cùm duo latera duobus lateribus æqualia ſunt, vtrumq; vtrique, at baſes inæquales, *a* demonſtrauit angulum maiori baſi oppoſitum eſſe maiorem angulo minori baſi oppoſito. a 25 primi.

QVINTO, quando duo anguli duobus angulis æquales ſunt, vterque vtrique, & vnum latus vni lateri æquale, ſiue quod æqualibus angulis adiacet, ſiue quod vni æqualium angulorum opponitur, *b* probauit reliqua latera vnius reliquis lateribus alterius eſſe æqualia, & reliquum angulum reliquo angulo. Vbi nos docuimus ſequi etiam, tota triangula eſſe æqualia. b 26. primi.

SEXTO, *c* demonſtrauit, duo triangula ſuper eandem baſin, & inter eaſdem parallelas conſtituta, eſſe æqualia. c 37. pri.

SEPTIMO *d* oſtendit, duo triangula ſuper æquales baſes, & inter eaſdem parallelas conſtituta, æqualia eſſe. d 38. pri.

OCTAVO *e* docuit, duo triangula æqualia ſuper eandem baſin, & verſus eandem partem conſtituta, eſſe inter eaſdem parallelas. e 39. pri.

NONO denique *f* probauit, duo triangula æqualia ſuper æquales baſes in eadem linea, in eandemque partem conſtituta, eſſe inter eaſdem parallelas. f 40. pri.

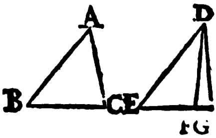
ATQVE his modis argumentandi in duobus triangulis propoſitis vniuerſa ferè Geometria niti videtur, vt propterea diligenter memoria mandandi ſint. Quemadmodum autem à propoſ. 26. in ſcholio propoſ. 31. excluſimus duas comparationes, quãdo nimirum duo anguli duobus angulis æquales ſunt, & vnũ latus vni lateri æquale, non quidem quòd æqualibus adiacet angulis, vel quòd vni æqualium angulorum opponitur in vtroque triangulo: ſed quòd in vno quidem angulis æqualibus adiacet, in altero verò vni æqualium angulorum opponitur: vel quòd in vno opponitur vni æqualium angulorum, in altero verò alteri æqualium angulorum: Quemadmodum, inquam, duas haſce comparationes excluſimus, quòd ex iis non ſequatur reliquorum laterum æqualitas, vt in ſcholio propoſ. 31. demonſtrauimus: Ita

quo-

Digitized by Google

quoque à propoſ.4. excludendæ ſunt tres comparationes, ex quibus nullo modo inferri poteſt baſium æqualitas.

PRIMVM *enim quando duo latera duobus lateribus æqualia ſunt, vtrumque vtrique, & vnus angulus vni angulo, qui vni æqualium laterũ opponitur, baſes æquales eſſe nequeunt; niſi quando angulus in vtroque triangulo alteri lateri æquali oppoſitus, vel eſt minor recto, vel non minor recto.*



SIT *enim Iſoſceles D F G, habens latera D F, D G, æqualia, & producta baſe F G, vſque ad E, iungatur recta E D, & triangulo D E G, æquale triangulum conſtruatur A B C, cuius latera A B, A C, lateribus D E, D G, æqualia ſint, & baſis B C, baſi E G. Sunt igitur duo latera A B, A C, duobus lateribus D E, D F, æqualia, vtrũq; vtriq;, anguliq; B, E, æqualib. lateribus A C, D F, oppoſiti æquales; & tamen baſis B C, maior eſt baſe E F; quod B C, ipſi E G, æqualis ſit. Ratio eſt, quòd angulus C, acutus eſt, at*

a 5. pri. *D F E, obtuſus. Nam cùm* a *anguli D F G, & G, æquales ſint,*

b 17. primi. b *& ſimul ſumpti minores duobus rectis; erit vterque minor recto, ac proinde D F E, recto maior; quandoquidem* c *duo an-*

c 13. pri. *guli ad F, æquales ſunt duobus rectis. Quòd ſi duo latera A B, A C, duobus lateribus D E, D G, ſint æqualia, angulusq; B, angulo E, & vterque angulus C, G, vel minor recto, vel non minor; tum demum ſequitur, baſes B C, E G, æquales eſſe, &c. Nam ſi baſis B C, minor eſſet, quàm E G; ſi A B, ipſi D E, ſuperponeretur, congrueret quidem B C, ipſi E G, propter æqualitatem angulorum B, E, ſed punctum C, citra G, caderet, vt in F. Quia igitur latera D F, D G, æqualia ſunt, quod D F, idem ſit, quod*

d 5. pri. *A C, ipſi D G, æquale;* d *erunt anguli D F G, & G, æquales, ac*

e 17. pri. *propterea vterque minor recto: quòd* e *ambo minores ſint duo-*

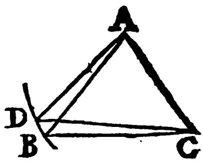
f 13. pri. *bus rectis. Cùm igitur* f *duo anguli ad F, ſint duobus rectis æquales, erit D F E, hoc eſt, C, quia D F E, non differt, recto maior. Non ergo vterque angulus C, & G, minor eſt, aut non minor recto, ſed G, quidem acutus, & C, obtuſus, quod eſt contra hypotheſin. Eodem modo, ſi baſis B C, dicatur eſſe maior baſe E F; poſitis lateribus A B, A C, æqualibus ipſis D E, D F, & angulo B, æ-*

quali

Digitized by Google

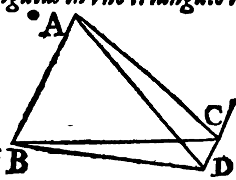
quali ipſi F, & vtroque angulo G, & F, vel minore recto, vel non minore) cadet punctum C, vltra F, vt in G; eritq́ rurſus angulus quidem C, hoc eſt, G, acutus, & D F E, obtuſus, quod eſt contra hypotheſin.

DEINDE, *quando duo latera duobus lateribus æqualia ſunt, vtrumque vtrique, & vnus angulus vni angulo, ita vt vnus vni æqualium laterum, & alter alteri opponatur, nihil etiam colligi poteſt. Nam ſit triangulum A B C, cuius latus A B, maius ſit latere A C. Erit* a *ergo angulus* a 18.*pri.*



A C B, maior angulo A B C. Fiat angulus A C D, angulo A B C, æqualis: cadetq́ C D, ſupra C B. Deſcribatur quoque ex A, per B, arcus circuli ſecans C D, in D, iungaturq́ recta A D. Sunt igitur duo latera A B, A C, duobus lateribus A D, A C, æqualia, vtrumque vtrique, & angulus A B C, lateri A C, oppoſitus, æqualis angulo A C D, lateri A D, oppoſito. Et tamen baſes B C, D C, æquales non ſunt. Si enim æquales eſſent, eſſent tam duæ rectæ A B, A D, quàm duæ C B, C D, æquales, b *quod eſt abſurdum. vel etiam* b 7.*pri.*
anguli B A C, D A C, c *æquales eſſent, pars & totum. quod eſt* c 8.*pri.*
abſurdum.

POSTREMO, *quando duo latera duobus lateribus æqualia ſunt, vtrumque vtrique, & angulus in vno triangulo illis lateribus comprehenſus, æqualis angulo, qui in altero triangulo opponitur vni illorum laterum, nihil etiam poteſt inferri. Sit namque triangulum A B C, cuius vtrumque latus A C, C B, maius ſit latere AB, & B C, maius, quàm A C. Erit* d *ergo angulus B A C, maior angulo* d 18.*pri.*



A B C. Si igitur fiat angulus A B D, angulo B A C, æqualis, cadet B D, infra B C. Deſcribatur quoque arcus circuli ex A, per C, qui infra B C, cadet, ſecabitq́ B D, in D. Iuncta igitur recta A D, erunt duo latera A B, A C, duobus lateribus A B, A D, æqualia; vtrumque vtrique, anguluſq́ B A C, illis lateribus A B, A C, comprehenſus, æqualis angulo A B D, qui lateri A D, oppo-

Digitized by Google

nitur: Et tamen baſes B C, B D, *æquales non ſunt. Aliàs tam*
a 7.pri. *rectæ* A C, A D, *quàm* B C, B D, *æquales eſſent*, a *quod eſt*
b 8.pri. *abſurdum. Vel etiam,* b *anguli* B A C, B A D, *æquales eſſent, totum & pars, quod eſt abſurdum.*

RECTE *igitur Euclides propoſ. 4. præcepit angulum illis lateribus comprehenſum in vno triangulo debere eſſe æqualem angulo alterius trianguli, qui illis quoque lateribus comprehenditur: quandoquidem ſine hac conditione nihil colligere licet, vt demonſtrauimus.*

FINIS ELEMENTI PRIMI.

EVCLI-

Digitized by Google

EVCLIDIS ELEMENTVM SECVNDVM.

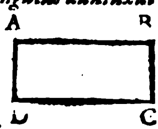
DEFINITIONES.

I.

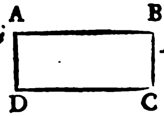
OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur ſub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendunt angulum.

AGIT Euclides ſecundo hoc libro de potentijs linearum rectarum, inquirendo, quanta ſint & quadrata partium cuiuſuis lineæ rectæ diuiſæ, & parallelogramma rectangula ſub partibus eiuſdem lineæ diuiſæ comprehenſa, tam inter ſe, quàm comparata cum quadrato totius lineæ, &c. Quod vt commodè exequatur, explicat priùs duabus definitionibus duo ad ea, quæ demonſtranda ſunt, rectè intelligenda maximè neceſſaria.

PRIORI definitione exponit, ſub quibus rectis lineis contineri dicatur parallelogrammum quodcunque rectangulum: Et quid ſit, parallelogrammum contineri ſub duabus lineis rectis. Quod vt intelligatur, explicandum primum eſt, Parallelogrammum illud dici rectangulum, cuius omnes anguli ſunt recti. Cuius quidem duo tantùm ſunt genera. Quadratum, & Altera parte longius. In his enim omnes anguli ſunt recti, vt perſpicuum eſt ex eorum definitionibus. In omni porrò parallelogrammo, ſi vnus angulus duntaxat detur rectus, erunt & reliqui tres neceſſariò recti. Sit enim in parallelogrammo A B C D, angulus A, rectus. Dico reliquos tres angulos B, C, D, rectos quoque eſſe. Nam cùm parallela ſint A D, B C, a erunt anguli A, & B, interni duobus



a 29. pri rectis ſunt.

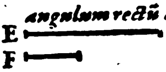


a 34. primi.

B rectis æquales: At angulus A, rectus eſt, ex hypotheſi. Igitur & B, rectus erit. Quoniam verò a quilibet ſuo oppoſito eſt æqualis, vt angulus A, angulo C, & angulus B, angulo D; erunt & anguli C, & D, recti.

DICIT itaq; Euclides, quodlibet parallelogrammum rectangulum contineri ſub duabus rectis lineis, quæ vnum eius angulum rectum continent. Vt parallelogrammum rectangulum A B C D, contineri dicitur ſub duabus lineis rectis A B, A D, vel ſub A D, D C, vel ſub D C, C B, vel deniq; ſub A B, B C: quoniam quælibet huiuſmodi duæ lineæ exprimunt totam parallelogrammi magnitudinem, vna quidem vt A B, vel D C, eius longitudinem, altera verò, vt A D, vel B C, eius latitudinem. Vnde expreſſis duabus lineis, quæ angulum rectum continent in parallelogrammo rectangulo, ſtatim tota eius quantitas concipitur, intelligiturq; longitudo nimirum, atq; latitudo. Accedit etiam, quod ex motu imaginario vnius lineæ in alteram huiuſmodi parallelogrammum conficitur. Si namq; animo concipiatur recta A B, deorſum ſecundum rectam A D, moueri in tranſuerſum, ita vt ſemper angulum rectum cum A D, conſtituat, donec punctum A, ad punctum D, & punctum B, ad punctum C, perueniat, deſcriptum erit totum parallelogrammum A B C D. Idem fiet, ſi A D, ponatur moueri in tranſuerſum ſecundum rectam A B, &c. Quamobrem iure optimo ſub talibus duabus lineis rectis contineri dicitur parallelogrammum rectangulum.

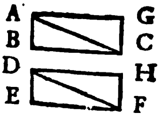
ITAQVE parallelogrammum rectangulum, quod ſub duabus rectis lineis contineri dicitur, erit illud, cuius duo latera circa vnum angulum rectũ æqualia ſunt duabus illis rectis lineis, vtrumq; vtrique. Vt parallelogrammum rectangulum ſub rectis E, & F, contentum, erit idem, quod parallelogrammum A B C D: quoniam latus A B, æquale eſt rectæ E, & latus A D, rectæ F.



PERSPICVVM autem eſt ex dictis, parallelogrammum rectangulum contentum ſub duabus lineis æqualibus eſſe quadratum. Cùm enim quælibet illarum linearum æqualium æqualis ſit linea oppoſita, erunt omnia quatuor parallelogrammi rectanguli latera æqualia. Quare ex definitione quadrati, quadratum erit.

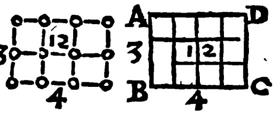
ITEM manifeſtum eſt, ſi duæ rectæ lineæ alijs duabus rectis lineis æquales fuerint, vtraque vtrique, rectangulum parallelogrammum ſub prioribus duabus comprehenſum, æquale eſſe ei, quod ſub duabus poſterioribus comprehenditur, parallelogrammo rectangulo: quoniam & anguli, & latera vnius æqualia ſunt & angulis, & lateribus alterius. Quod tamen facilè hac etiam ratione demonſtrari poteſt. Sint rectæ A B, B C, æquales rectis D E, E F, vtraq; vtriq;. Dico parallelogrammum rectangulum A B C G, contentum ſub A B, B C, æquale

eſſe



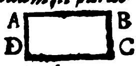
eſſe parallelogrammo rectangulo D E F H, contento ſub D E, E F. Ductis etenim diametris A C, D F, cum latera A B, B C, trianguli A B C, æqualia ſint lateribus D E, E F, trianguli D E F, & anguli B, & E, æquales, nempe recti; a erunt triangula ABC, DEF, æqualia. Eadẽ ratione æqualia erũt triangula AGC, DHF. Quare tota parallelogramma ABCG, D E F H, æqualia erunt. a 4. pri.

HABET autem comprehenſio hæc phrallelogrammi rectanguli ſub duabus rectis lineis angulum rectum continentibus, magnã affinitatem cum multiplicatione vnius numeri in alterum. Sicut enim ex multiplicatione 3. in 4. producitur numerus 12. qui in formam parallelogrammi conſtituitur, vnde & contineri dicitur ſub 3. & 4. Ita quoque parallelogrammum A B C D, comprehenſum ſub duabus rectis AB, B C, quarum illa ſit 3. palmorum, hæc autem 4. conſtat 12. palmis quadratis, qui quidẽ ex ductu lineæ A B, 3. palmorum in lineam B C, 4. palmorum producuntur, vt figura indicat,



notumq́ eſt Arithmeticis, atq; Geometris, demonſtraturq́ à Ioanne Regiomont. lib. 1. de triangulis, propoſ. 16. Hinc fit, vt nonnulli dicant, parallelogrammum rectangulum gigni ex ductu duarum linearum circa angulum rectum vnius in alteram. Vt proximè antecedens parallelogrammũ ex ductu lineæ A B, in lineam B C, vel (quod idem eſt) ex ductu lineæ B C, in lineam A B. Idem enim parallelogrammum procreatur, ſiue minor linea in maiorem, ſiue maior in minorem ducatur: quemadmodum etiam idem producitur numerus, ſiue minor numerus in maiorem, ſiue maior in minorem ducatur, vt ab Euclide demonſtratur lib. 7. propoſ. 16. Tam enim ex multiplicatione 3. in 4. quàm ex 4. in 3. producitur hic numerus 12.

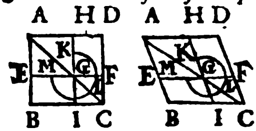
OBITER quoq; monendus mihi lector videtur, Euclidem in hoc ſecundo libro, & in alijs, qui ſequuntur, parallelogrammum rectangulum appellare ſimpliciter rectangulum; quod etiam cæteri Geometræ obſeruant, ita vt nomine rectanguli perpetuò intelligendum ſit parallelogrammũ rectangulum. Rurſus, ne toties eadem literæ repetantur, ſolent Geometræ exprimere parallelogrammum tam rectangulum, quàm non rectangulum duabus duntaxat literis, quæ per diametrum opponuntur. Vt appoſitum parallelogrammum appellant A C, vel B D.



II.

IN omni parallelogrammo ſpatio, vnumquodlibet eorum, quæ circa diametrum illius ſunt, parallelogrammorum, cum duobus complementis, Gnomon vocetur.

IN parallelogrammo A B C D, ſiue rectangulum illud ſit, ſiue non, ducatur diameter A C, ex cuius puncto quolibet G, ducantur rectæ E F, H I, parallelæ lateribus parallelogrammi, ita vt parallelogrammum diuiſum ſit in quatuor parallelogramma, quorũ duo E H, I F, dicuntur eſſe circa diametrum, alia verò duo B G, G D, complementa, vt manifeſtum eſt ex vltima definitione primi lib. Itaq; figura compoſita ex parallelogrammo vtrolibet circa diametrũ, vt ex I F, vna cum duobus complementis B G, G D, qualis eſt figura E B C D H G E, quam complectitur circumferentia K L M, dicitur Gnomon. Eadem ratione figura F D A B I G F, compoſita ex parallelogrammo E H, circa diametrum, & duobus complementis B G, G D, Gnomon appellabitur.



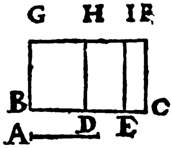
SED iam ad propoſitiones ſecundi huius lib. veniamus, in quibus ſanè operæpretium fuerit, multum laboris in eis exquiſitè intelligendis ponere, propter multiplicem earum vſum cùm in rebus Geometricis, tum in humanis commercijs. Nam ex nonnullis harum propoſitionum demonſtrantur regulæ illæ admirabiles Algebræ, quibus vix credo in diſciplinis humanis præſtantius aliquid reperiri, quippe cùm miracula quædam numerorum (vt ita dicam) eruant tam abſtruſa, ac recondita, vt facultas illa omnem captum humanum ſuperare videatur, tanta nihilominus facilitate, atq; voluptate, vt facilius videatur eſſe nihil. Ex alijs deinde propoſitionibus huius lib. eliciuntur demonſtrationes, quibus inter ſe adduntur, ſubtrahuntur, multiplicantur, atq; diuiduntur numeri ſurdi (quos dicunt) hoc eſt, qui nullo modo exprimi poſſunt; cuiuſmodi ſunt radices numerorum non quadratorũ, aut non cubicorum, quæ neq; per Diuinam potentiam in numeris poſſunt exhiberi, quòd hæc res contradictionem implicet, vt Philoſophi atque Theologi loquuntur. Quo quid admirabilius? Quis enim credat, per demonſtrationem ſciri poſſe, quid producatur ex radice quadrata numeri 8. ad radicem quadratam num. 18. adiecta, cùm vtraq; radix incognita ſit, & nulla ratione exprimi queat, quòd illa paulò minor ſit, quàm 3. hæc verò paulò maior quàm 4? Et tamen ſumma, quæ ex vtraq; fit, colligitur ex vi propoſitionis 4. huius lib. radix quadrata numeri 50. quæ paulò maior eſt, quàm 7. Præterea ex propoſ. 12. & 13. eiuſdem huius lib. area, & quantitas cuiuſuis trianguli exquiſitiſſimè cognoſcitur, ex qua cognitione rurſus dimenſio omnium magnitudinum fluit, atq; dimanat. Poſtremò vltima propoſ. huius lib. omnem figuram rectilineam licet irregularem, vel etiam plures, ad quadratum æquale mira facilitate reducit. Vt verè aureus dici mereatur hic liber, cum mole quidem ſit perexiguus, vtilitates verò contineat propè infinitas.

THEOR.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, ſeceturq; ipſarum altera in quotcunque ſegmenta: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, æquale eſt eis, quæ ſub inſecta, & quolibet ſegmentorum comprehenduntur, rectangulis.

SINT duæ rectæ A, & B C, quarum B C; ſecetur quomodocunque in quotlibet ſegmenta B D, D E, E C. Dico rectangulum ſub A, & B C, comprehenſum æquale eſſe omnibus rectangulis ſimul ſumptis, quæ ſub linea indiuiſa A, & quolibet ſegmento comprehenduntur, nempe rectangulo ſub A, & B D; Item ſub A, & D E; Item ſub A, & E C, comprehenſo.



Rectangulum enim B F, comprehendatur ſub A, & B C, hoc eſt, recta G B, æqualis ſit rectæ A. Quod quidem fiet, ſi erigantur ad B C, duæ perpendiculares B G, C F, æquales rectæ A, ducaturq; recta F G. Nam rectæ B G, C F, *a* parallelæ erunt, ob rectos angulos B, C: Sed & *b* æquales inter ſe ſunt, quod vtraque rectæ A, æqualis ponatur. *c* Igitur erunt quoque G F, B C, parallelæ, & æquales inter ſe: ac proinde rectangulum erit B F, contentum ſub A, ſiue G B, & B C, ex defin. 1. huius lib. Deinde ex D, & E, ducantur rectæ D H, E I, parallelæ ipſi B G, vel C F. Itaque D H, E I, cùm parallelæ ſint ipſi B G, *d* inter ſe quoque parallelæ erunt. Rurſus eædem, cùm ex conſtructione parallelogramma ſint B H, B I, *e* æquales erunt rectæ B G, ac propterea rectæ A. Quoniam igitur recta B G, æqualis eſt rectæ A, erit rectangulum B H, comprehenſum ſub inſecta linea A, & ſegmento B D. Eadem ratione erit rectangulum D I, comprehenſum ſub A, & ſegmento D E. Item rectangulum E F, ſub A, & ſegmento E C. Quare cùm rectangula B H, D I, E F, æqualia ſint toti rectangulo B F; perſpicuum eſt, rectangulum comprehenſum ſub A, & B C, æquale eſſe rectangulis omnibus, quæ ſub A, & ſegmentis B D, D E, E C, comprehenduntur. Si ergo fuerint duæ rectæ lineæ, ſeceturque ipſarum altera, &c. Quod erat oſtendendum.

a 28. pri.
b 1. pron.
c 33. pri.
d 30. pri.
e 34. pri.

SCHOLIVM.

QVONIAM lib. 9. propoſ. 14. decem priora theoremata ſecundi huius libri, quæ Euclides lineis accommodat, in numeris etiam demonſtrabimus, ſi diuidantur, vt lineæ; non abs re fuerit, breuiter numeris applicare ea, quæ pluribus verbis de lineis hic demonſtrantur,

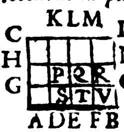
Digitized by Google

tur, præſertim cùm multiplicatio numeri vnius in alterum reſpondeat ductui vnius lineæ in alteram, vt ſuprà diximus. Itaq; propoſitis duobus numeris quibuſcunq;, vt 6. & 10. diuidatur poſterior in tres partes 5. 3. & 2. Dico 60. numerum productum ex 6. in 10. æqualem eſſe tribus numeris 30. 18. & 12. qui ex multiplicatione 6. in 5. & 3. & 2. gignuntur: id quod perſpicuum eſt.

DEMONSTRAT hoc loco Federicus Commandinus duo alia theoremata, quæ iam ſequuntur.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, ſecenturque ambæ in quotcunque ſegmenta: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, æquale eſt eis, quæ ſub ſingulis ſegmentis vnius, & quolibet ſegmentorum alterius continentur rectangulis.

SINT duæ rectæ AB, AC, rectum angulum A, continentes, quæ ſecentur in partes AD, DE, EF, FB; AG, GH, HC. Dico rectangulum ſub rectis AB, AC, comprehenſum æquale eſſe rectangulis, quæ ſub AD, AG; AD, GH; AD, HC: DE, AG; DE, GH; DE, HC: EF, AG; EF, GH; EF, HC: FB, AG; FB, GH; FB, HC, continentur.



Compleatur rectangulum AI, ducanturq; DK, EL, FM, parallelæ ipſi AC, vel BI. Item HN, GO, parallelæ ipſi AB, vel CI; quæ ſecent priores in P, Q, R, S, T, V. Quoniam igitur rectangulum AS, continetur ſub AD, AG; & GP, ſub AD, GH; & HK, ſub AD, HC; (a quòd rectæ GS, HP, ipſi AD, ſint æquales:) Item rectangula DT, SQ, PL, continentur ſub DE, AG; DE, GH; DE, HC; (b quòd DS, SP, PK, ipſis AG, GH, HC, æquales ſint, & ST, PQ, ipſi DE.) Et eadem ratione rectangula EV, TR, QM, continentur ſub EF, AG; EF, GH; EF, HC: Necnon rectangula FO, VN, RI, ſub FB, AG; FB, GH, FB, HC: perſpicuum eſt, rectangulum ſub AB, AC, æquale eſſe rectangulis ſub ſingulis partibus AD, DE, EF, FB, & quolibet ſegmentorum AG, GH, HC, comprehenſis. Quod eſt propoſitum.

a 34. pri.

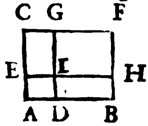
b 34. primi.

SI ſint duæ rectæ lineæ, ſecenturq; ambæ vtcunque: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, vna cum rectangulo ſub vna parte vnius, & vna parte alterius comprehenſo, æquale eſt eis, quæ ſub totis lineis, & dictis partibus mutuò continentur, rectangulis, vna cum rectangulo ſub reliquis partibus comprehenſo.

SINT duæ rectæ AB, AC, angulum continentes rectum A, quæ ſecentur vtcunque in D, & E. Dico rectangulum comprehenſum ſub

AB, AC,

A B, A C, vna cum rectangulo comprehenſo ſub partibus A D, E C, æquale eſſe rectangulis coetentis ſub A B, E C; A C, A D; vna cum rectangulo ſub D B, A E, comprehenſo. Compleatur enim rectangulum A F, agaturq́; per D, recta D G, ipſi A C, vel B F, parallela; nec non per E, recta E H, ſecans D G, in I, parallela ipſi A B, vel C F. Quoniam igitur rectangulum A F, æquale eſt rectangulis E F, D H, A I; ſi addatur commune E G, erunt rectangula A F, E G, nempe ſub totis A B, A C, & partibus A D, E C, comprehenſa, æqualia rectangulis E F, A G, D H, ſub A B, E C; A C, A D; D B, A E, comprehenſis æqualia. Quod eſt propoſitum.



IN numeris etiam hæc eadem perſpicua ſunt. Propoſitis enim duobus hiſce numeris 10. & 8. quorum prior in tres partes, 2. 3. 5. poſterior verò in duas, 3. 5. diuidatur; perſpicuum eſt, 80. numerum productum ex 10. in 8. æqualem eſſe ſex numeris 6. 10. 9. 15, 15. 25. qui producuntur ex ſingulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 3. 5. efficiuntq́; ſimul additi 80. vt volebat theorema 1. Federici.

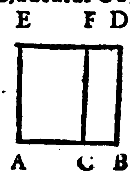
RVRSVS, ſi iidem numeri ſecentur vtcunque, prior quidem in 3. 7. poſterior autem in 2. 6. manifeſtum quoque eſt 80. numerum productum ex 10. in 8. vna cum 18. numero producto ex 3. in 6. æqualem eſſe tribus numeris 60. 24. 14. qui producuntur ex 10. in 6. & ex 8. in 3. & ex reliqua parte 7. in reliquam partem 2. cum vtrobique efficiantur 98. vt theorema 2. Federici optabat.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

SI recta linea ſecta ſit vtcunque: Rectangula, quæ ſub tota, & quolibet ſegmentorum comprehenduntur, æqualia ſunt ei, quod à tota fit, quadrato.

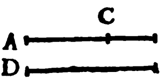
RECTA linea A B, diuidatur vtcunque in C, duas in partes. Dico duo rectangula comprehenſa ſub tota, A B, & ſegmentis A C, C B, ſimul ſumpta, æqualia eſſe quadrato totius lineæ A B. Deſcribatur enim A D, quadratum lineæ A B, & ex C, ducatur C F, parallela rectæ A E, vel B D, quæ a æqualis erit rectæ A E, hoc eſt, rectæ A B, cui æqualis eſt recta A E, ex definitione quadrati. Quoniam igitur recta A E, æqualis eſt rectæ A B, erit rectangulum A F, comprehenſum ſub tota A B, & ſegmento A C. Similiter erit rectangulum C D, comprehenſum ſub tota A B, & ſegmento C B. Quare cum rectangula A F, C D, æqualia ſint quadrato A D, perſpicuum eſt, rectangula comprehenſa ſub A B, & ſegmentis A C, C B, æqualia eſſe quadrato lineæ A B. Si igitur recta linea ſecta ſit vtcunque, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 34. primi.



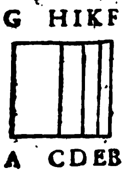
Digitized by Google

ALITER. Sumatur recta D, æqualis rectæ A B. Quoniam

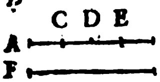


igitur A B, diuiſa eſt in C, erit rectangulum comprehenſum ſub inſecta D, & recta A B,
21. ſex. hoc eſt quadratum rectæ A B, æquale duobus rectangulis, quæ comprehenduntur ſub D, inſecta, hoc eſt, ſub A B, & ſingulis ſegmentis A C, C B. Quod eſt propoſitum.

SCHOLIVM.



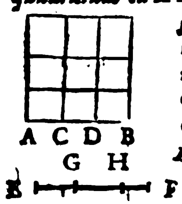
QVANQVAM Euclides ſecundum hoc theorema proponat de linea recta diuiſa in duas tantummodo partes vtcunque, idem tamen eiſdem medijs demonſtrabitur, ſi linea diuidatur in quotcunque partes, vt ex his figuris manifeſtum eſt. In numeris verò idem perſpicitur hoc modo. Numerus 10. diuiſus ſit in duas partes 7. & 3. Dico numeros 70. & 30. qui producuntur ex multiplicatione 10. in 7. & 3. æquales eſſe 100. quadrato ipſius numeri 10. vt manifeſtum eſt. Simili modo ſi numerus 10. diuidatur in plures partes 3. 2. 4. & 1. erunt numeri 30. 20. 40. & 10. geniti ex 10. in 3. 2. 4. & 1. æquales 100. quadrato ipſius numeri 10.



SIMILI modo demonſtrat hoc loco Federicus Commandinus hoc theorema.

SI linea recta ſecetur in quotcunq; ſegmenta: Quadratum, quod à tota fit, æquale eſt eis, quæ ſub ſingulis ſegmentis, & quolibet ſegmento comprehenduntur, rectangulis.

SIT recta A B, diuiſa in partes quotcunque A C, C D, D B. Dico quadratum ex A B, deſcriptum, æquale eſſe rectangulis, quæ ſub ſingulis partibus A C, C D, D B, & quolibet ſegmentorum A C, C D, D B, comprehenduntur; hoc eſt, rectangulis ſub A C, A C; A C, C D; A C, D B: C D, A C; C D, C D; C D; D B: D B, A C; D B, C D; D B, D B, comprehenſis. Sumpta enim recta E F, quæ æqualis ſit ipſi A B, diuiſaq; in partes E G, G H, H F, partibus A C, C D, D B, æquales. Erit ex ijs, quæ ad propoſ. 1. huius libri demonſtrauimus, rectangulum ſub A B, E F, hoc eſt, quadratum ipſius A B, æquale rectangulis ſub A C, E G; A C, G H; A C, H F: C D, E G; C D, G H; C D, H F: D B, E G; D B, G H; D B, H F. Cum igitur partes A C, C D, D B, partibus E G, G H, H F, ſint æquales; erit quoque quadratum ex A B, æquale rectangulis ſub A C, A C; A C, C D; A C, D B: C D, A C; C D, C D; C D, D B: D B, A C; D B, C D; D B, D B. Quod eſt propoſitum.



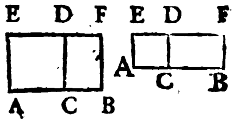
IN nu-

Digitized by Google

IN numeris idem eſt manifeſtum. Si enim numerus 10. diuidatur in 2. 3. 5. erit 100. quadratus totius æqualis his nouem numeris 4. 6. 10. 6. 9. 15. 10. 15. 25. qui ex ſingulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 2. 3. 5. procreantur, vt perſpicuum eſt.

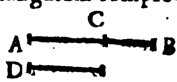
THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

SI recta linea ſecta ſit vtcunque: Rectangulum ſub tota, & vno ſegmentorum comprehenſum, æquale eſt & illi, quod ſub ſegmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prædicto ſegmento deſcribitur, quadrato.



LINEA recta A B, diuiſa ſit vtcunque in puncto C. Dico rectangulum comprehenſum ſub tota A B, & vtrouis ſegmento, vt A C, (ſiue hoc ſegmentum maius ſit, ſiue minus) æquale eſſe rectangulo ſub ſegmentis A C, C B, comprehenſo, & quadrato prioris ſegmenti aſſumpti A C. Conſtituatur enim quadratum dicti ſegmenti A C, quod ſit A D: & ex B, educatur B F, parallela ipſi A E, donec coeat cum E D, protracta in F. Quoniam igitur A E, recta rectæ A C, æqualis eſt, ex quadrati definitione; erit rectangulum A F, comprehenſum ſub tota A B, & ſegmento A C. Rurſus, quia recta C D, eadem ratione æqualis eſt rectæ A C; erit rectangulum C F, comprehenſum ſub ſegmentis A C, & C B. Cum igitur rectangulum A F, æquale ſit quadrato A D, & rectangulo C F; liquido conſtat, rectangulum ſub A B, tota, & ſegmento A C, comprehenſum eſſe æquale rectangulo comprehenſo ſub ſegmentis A C, C B, & quadrato prædicti ſegmenti A C. Itaque ſi recta linea ſecta ſit vtcunque, &c. Quod erat oſtendendum.

ALITER. Accipiatur recta D, æqualis ſegmento A C. Quoniam igitur recta A B, diuiſa eſt in C, erit rectangulum comprehenſum ſub D, & A B, hoc eſt, ſub A B, & A C, æquale rectangulo ſub D, & C B, hoc eſt, ſub A C, C B, & rectangulo ſub D, & A C, hoc eſt, quadrato ſegmenti A C. Quod eſt propoſitum. 1. ſec.



SCHOLIVM.

VT hoc theorema numeris accommodetur, ſit numerus 10. diuiſus in 7. & 3. Dico numerum 70. productum ex 10. in 7. æqualem eſſe numero 21. qui ex 7. in 3. producitur, vna cum 49. quadrato prioris partis 7. Id quod res ipſa indicat. Pari ratione erit numerus 30. procreatus

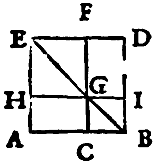
ex 10.

Digitized by Google

ex 10. in 3. æqualis numero 21. producto ex 3. in 7. ſimul cum 9. quadrato prædicti numeri 3.

iiij. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea ſecta ſit vtcunque: Quadratum, quod à tota deſcribitur, æquale eſt & illis, quæ à ſegmentis deſcribuntur, quadratis, & ei, quod bis ſub ſegmentis comprehenditur, rectangulo.



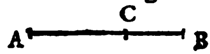
RECTA linea AB, diuiſa ſit vtcunque in C. Dico quadratum totius rectæ AB, æquale eſſe quadratis ſegmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenſo bis ſub ſegmentis AC, CB. Deſcribatur enim ſuper AB, quadratum AD, ducaturque diameter BE. Deinde ex C, agatur CF, parallela rectæ BD, ſecans diametrum in G, puncto, per quod rurſus ducatur HI, parallela rectæ AB. Eritque quadratum AD, diuiſum in quatuor parallelogramma. Quoniam igitur trianguli ABE, duo latera AB, AE, æqualia ſunt; *a* erunt duo anguli ABE, AEB, æquales: Atqui *b* tres anguli ABE, AEB, BAE, trianguli ABE, duobus rectis ſunt æquales, & BAE, rectus eſt. Reliqui ergo duo anguli ABE, AEB, ſemirecti erunt. Eadem ratione oſtendes angulos DBE, DEB, ſemirectos eſſe. Quod etiam conſtat ex ijs, quæ ad 34. propoſ. lib. 1. demonſtrauimus. Nam, vt ibi oſtenſum eſt, diameter BE, diuidit angulos rectos ABD, AED, biſariam. Quia ergo anguli quoque tres trianguli EFG, *c* æquales ſunt duobus rectis, & angulus EFG, rectus eſt, *d* cum ſit æqualis recto D, externus interno; nec non FEG, oſtenſus ſemirectus; erit & reliquus EGF, ſemirectus; ideoque æqualis angulo FEG. Quare *e* æqualia erunt latera EF, FG: quæ cum ſint *f* æqualia oppoſitis lateribus GH, HE, erit parallelogrammum FH, quadratum, cum omnia eius latera ſint æqualia, & omnes anguli recti; propterea quod exiſtente vno angulo recto, nempe FEH, vel F, in parallelogrammo FH, omnes quatuor recti ſunt, vt ad defin. 1. huius lib. monſtrauimus. Eadem ratione quadratum erit CI. Quamobrem CI, FH, quadrata ſunt ſegmentorum AC, CB, quod latus HG, *g* æquale ſit rectæ AC. Rectangula quoque AG, DG, comprehenſa erunt ſub ſegmentis AC, CB, proptereaque quod CG, GI, æquales ſunt rectæ CB, ob quadratum CI; & FG, æqualis rectæ GH, ob quadratum FH, hoc eſt, *h* rectæ AC. Quocirca cum quadratum AD, æquale ſit quadratis CI, FH, & rectangulis AG, DG; conſtat quadratum AD, totius lineæ AB, æquale eſſe quadratis ſegmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenſo ſub eiſdem ſegmentis AC, CB, bis ſum-

a 5. primi.
b 32. primi.
c 32. primi.
d 29. primi.
e 6. primi.
f 34. primi.
g 34. primi.
h 34. primi.

Digitized by Google

bis ſumpto. Igitur ſi recta linea ſecta ſit vtcunque, quadratum, quod a tota deſcribitur, &c. Quod demonſtrandum erat.

ALITER. Quoniam recta A B, diuiſa eſt in C, *a* erit quadra- a 2. *ſec.*
tum totius A B, æquale rectangulis, quæ ſub tota A B, & ſegmentis A C, C B, comprehenduntur: Rectangulum autem ſub A B, A C, comprehen-

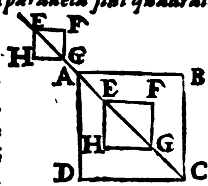


ſum, *b* æquale eſt rectangulo comprehenſo b 3. *ſec.*
ſub A C, C B, & quadrato ſegmenti A C: Item rectangulum ſub A B, C B, comprehenſum, æquale eſt rectangulo ſub C B, A C, comprehenſo, & quadrato ſegmenti C B. Igitur quadratum rectæ A B, æquale etiam eſt quadratis ſegmentorum A C, C B, & rectangulis ſub A C, C B, & ſub C B, A C. Quod eſt propoſitum.

COROLLARIVM I.

HINC manifeſtum eſt, parallelogramma circa diametrum quadrati eſſe quadrata.

CONSTAT hoc ex priori huius theorematis demonſtratione, in qua oſtenſum eſt, rectangula C I, F H, quæ ſunt circa diametrum B E, eſſe quadrata. In omnibus enim aliis quadratis eadem erit demonſtratio. Eſt tamen corollarium iſtud intelligendum de illis parallelogrammis circa diametrum quadrati, quæ communem aliquem angulum habent cum toto quadrato, cuiuſmodi ſunt dicta parallelogramma C I, F H. Illud enim angulum habet A B D, communem cum quadrato, hoc verò angulum A E D. Idem nihilominus verum eſt de quibuſcunque parallelogrammis circa diametrum quadrati, etiam protractam, quamuis non habeant cum quadrato angulum aliquem communem, dummodo eorum latera parallela ſint quadrati lateribus. Circa enim diametrum A C, quadrati B D, conſiſtat parallelogrammum F H, ſiue intra quadratum, ſiue extra, quod tamen habeat latera lateribus quadrati B D, parallela. Dico F H, eſſe quadratum. Cum enim parallela ſint A B, E F, c *erunt anguli* c 29. *pri*
B A C, F E G, æquales, internus, & externus;



atque eadem ratione anguli B C A, F G E, æquales erunt: Sunt autem anguli B A C, B C A, ſemirecti, vt oſtenſum iam fuit. Igitur & anguli F E G, F G E, ſemirecti erunt: d *proptereaq; latera E F, F G,* d 6. *pri.*
illis oppoſita, æqualia, e *& angulus F, rectus. Quare cum E F, F G,* e 32. *pri*
latera f *æqualia ſint oppoſitis lateribus G H, H E, æquilaterum erit* *mi.*
parallelogrammum F H: Sed & rectangulum eſt, ex iis, quæ ad de- f 34. *pri*
fin. 1. huius lib. oſtendimus, propterea quod angulus vnus F, rectus *mi.*
eſt demonſtratus. Igitur F H, quadratum erit. Quod eſt propoſitum.

COROLLARIVM II.

SEQVITVR etiam ex demonſtratione huius propoſit. 4. diame-

trum

Digitized by Google

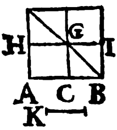
trum cuiuſuis quadrati diuidere eius angulos bifariam. Probatum enim fuit, angulos A E B, D E B, eſſe ſemirectos, &c. Id quod etiam ad propoſ. 34. lib. 1. demouſtrauimus.

SCHOLIVM.

IN numeris ita theorema hoc quartum exercebitur. Sit numerus 20. *diuiſus vtcunque in* 7. *&* 3. *Vides igitur* 100. *quadratum totius numeri æquale eſſe* 49. *&* 9. *quadratis partium* 7. *&* 3. *vna cum numero* 21. *qui ex* 7. *in* 3. *procreatur, bis ſumpto. Nam* 49. 9. 21. *&* 21. *efficiunt* 100.

PERFACILE autem erit ex hoc theoremate 4. *demonſtrare hoc aliud theorema.*

SI linea recta fuerit dupla lineæ rectæ, quadratum ex illa deſcriptum, quadruplum eſt quadrati ex hac deſcripti. Et ſi quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum eſt lateris huius.



SIT enim primum linea A B, dupla lineæ K. Dico quadratum rectæ A B, quadruplum eſſe quadrati rectæ K. Nam diuiſa A B, bifariam in C, ſi fiat conſtructio, vt in 4, *hoc theoremate, erunt quatuor parallelogramma A G, C I, I F, F H, quadrata; atque inter ſe æqualia, cum omnia eorum latera ſint æqualia, omnesq; anguli recti, vt facile demonſtrari poteſt ex propoſ.* 34. *lib.* 1. *Quare cum quadratum A D, æquale ſit quatuor quadratis A G, C I, I F, F H, erit quadratum lineæ A B, quadruplum quadrati lineæ A C, hoc eſt, lineæ K, quæ æqualis eſt ipſi A C. Eſt enim vtraque dimidium lineæ A B.*

a 4. *ſec.* *BREVIVS.* a *Quadratum rectæ A B, æquale eſt quadratis rectarum A C, C B, & rectangulo ſub rectis lineis A C, C B, bis comprehenſo. Cum igitur quadrata rectarum æqualium A C, C B, æqualia ſint; & rectangulum ſub æqualibus A C, C B, quadratum quoque ſit, atque æquale quadrato rectæ A C; Conſtat quadratum rectæ A B, quadruplum eſſe quadrati rectæ A C; cum æquale ſit quatuor quadratis, quorum vnumquodque quadrato rectæ A C, æquale eſt.*

SIT deinde quadratum rectæ A B, quadruplum quadrati rectæ K. Dico latus A B, duplum eſſe lateris K. Nam diuiſa recta A B, bifariam in C, vt A B, dupla ſit ipſius A C; erit, vt iam demonſtratum eſt, quadratum rectæ A B, quadruplum quadrati rectæ A C. Ponitur autem & quadruplum quadrati rectæ K. Igitur æqualia ſunt quadrata rectarum K, & A C, & ipſæ propterea rectæ K, & A C, æquales: Eſt autem A B, ex conſtructione ipſius A C, dupla. Dupla igitur etiam erit ipſius K. Hæc tamen omnia aliter demonſtrabimus ad propoſ. 20. *lib.* 6.

CÆTE-

CÆTERVM ex hac propoſ. 4. colligi poteſt modus inueniendi numerum quadratum, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoque numerum conſtituat. Si namq; ex dato numero auferatur 1. erit quadratus numerus ex reliqui numeri dimidio in ſe multiplicato productus, is qui quæritur. Vt ſi datus ſit numerus 15. inueniendusq; numerus quadratus, cum quo datus numerus 15. faciat numerum item quadratum; detrahemus 1. ex 15. & reliqui numeri 14. dimidium 7. accipiemus. Nam numerus quadratus 49. ex eo dimidio in ſe multiplicato productus erit is, cum quo datus numerus 15. conſtituit 64. quadratum numerum, cuius latus eſt 8. nempe numerus vna vnitate maior, quam 7. latus quadrati inuenti. Ratio huius rei hæc eſt. Quoniam quadratum AD, rectæ AB, a æquale eſt duobus quadratis FH, CI, partium AC, CB, vna cum rectangulo bis comprehenſo ſub AC, CB; ſi gnomonem HBF, qui cum quadrato FH, conſtituit totum quadratum AD, ponamus 15. quantus nimirum eſt datus numerus: quadratum autem CI, ſtatuamus 1. atque adeo latus quoq; eius CB, 1. erit vtrumuis rectangulorum AG, DG, 7. ac proinde ſegmentum AC, 7. vt nimirum ex AC, in CB, quæ eſt 1. fiant 7. Quadratum ergo FH, erit 49. Totum autem latus AB, erit 8 nempe vna vnitate maius, quam AC, latus quadrati FH. Hæc ergo eſt cauſa, cur ex dato numero, hoc eſt, ex gnomone HBF, detrahamus 1. & reliqui numeri dimidium ſtatuamus latus quadrati FH, quæſiti.

a 4. ſec.

VT autem numeri fracti vitentur, datus numerus debet eſſe impar, vt nimirum ablata 1. reliquus numerus diuidi poſſit bifariam. Regula nihilominus vera eſt, quicunque numerus datus ſit.

IDEM efficiemus, ſi ex dato numero quemuis quadratum numerum demamus, & reſidui dimidium per latus quadrati ablati partiamur. Quotiens enim erit latus quadrati quæſiti. Vt ſi detur numerus 45. pro gnomone HBF, auferemus numerum quadratum 9. pro quadrato CI, cuius latus eſt 3. Reſidui 36. dimidium eſt 18. pro AG, quod diuiſum per 3. hoc eſt per CG, latus quadrati ablati CI, facit Quotientem 6. pro latere GH, cuius quadratum FH, nimirum 36. additum ad gnomonem HBF, nimirum ad 45. efficit quadratum numerum 81. Vt autem fractiones euitentur, dandus erit numerus, ita vt, ablato quadrato numero aliquo, reſiduus numerus habeat dimidium numerum, quem latus quadrati ablati numeret.

VICISSIM reperiemus numerum quadratum, à quo datus quiuis numerus ſubtractus relinquat numerum quoque quadratum. Nam ſi ex numero dato dematur 1. & reliqui numeri dimidio adijciatur 1. conficietur latus quadrati quæſiti. Vt ſi rurſum datus ſit numerus 15. Detracta 1. erit reliqui numeri 14. dimidium 7. cui addita 1. fiet latus quadrati quæſiti 8. Si enim ex eius quadrato 64. detrahas 15. remanet quadratus numerus 49. cuius latus eſt 7. quod perpetuo eſt vna vnitate minus, quam latus quadrati inuenti. Ratio etiam

huius

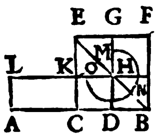
Digitized by Google

huius regula facilius eſt ex eadem figura huius propoſ. 4. Nam ſi gnomonem H B F, qui ex quadrato A D, ſubtractus reliquum facit quadratum F H, ponamus 15. quantus nimirum eſt numerus datus. Quadratum verò C I, ſtatuamus 1. atq; adeo & latus eius G B, 1. erit vtrumlibet rectangulorum A G, D G, 7. ac proinde & ſegmentum A C, 7. vt ſupra dictum eſt, & tota linea A B, 8. &c.

V. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI recta linea ſecetur in æqualia, & non æqualia: Rectangulum ſub inæqualibus ſegmentis totius comprehenſum, vna cum quadrato, quod ab intermedia ſectionum, æquale eſt ei, quod à dimidia deſcribitur, quadrato.

DIVIDATVR recta A B, bifariam in C, & per inæqualia in D, vt ſectionum intermedia ſit recta C D, qua nimirum dimidia C B, minus ſegmentum D B, ſuperat, vel qua maius ſegmentum A D, dimidium A C, excedit. Dico rectangulum ſub ſegmentis inæqualibus A D, D B, comprehenſum, vna cum quadrato rectæ C D, quæ inter duas eſt ſectiones, æquale eſſe quadrato dimidiæ C B. Deſcribatur enim C F, quadratum ſuper dimidia C B, & ducta diametro B E, ducatur ex D, recta D G, parallela rectæ B F, ſecans diametrum B E, in H, puncto, per quod ducatur rectæ B C, parallela I K: Item ex A, rectæ C E, parallela A L, ſecans I K, productam in L.



Erunt igitur per corollarium 1. præcedentis propoſ. D I, K G, quadrata, ideoque D H, recta rectæ D B, æqualis: *a* Eſt autem & K H, ipſi C D, æqualis. Quare rectangulum A H, comprehendetur ſub A D, D B; & K G, erit quadratum rectæ C D. Probandum itaque eſt, rectangulum A H, vna cum quadrato K G, æquale eſſe quadrato C F. Quoniam ergo *b* complementa C H, F H, æqualia ſunt; ſi addatur commune quadratũ D I, erit parallelogrammum D F, parallelogrammo C I, æquale: *c* Eſt autem & A K, eidem C I, æquale, quod & baſes A C, C B, æquales ſint. Igitur D F, A K, æqualia etiam inter ſe erunt: quibus ſi commune apponatur C H, erit gnomon M N O, rectangulo A H, æqualis. Quocirca cum gnomon M N O, & quadratum K G, æqualia ſint quadrato C F; erit & rectangulum A H, vna cum quadrato K G, æquale eidem quadrato C F. Si recta ergo linea ſecetur in æqualia, & non æqualia, &c. Quod oſtendendum erat.

a 34. *primi.* b 43. *primi.* c 36. *primi.*

SCHOLIVM.

ALITER hoc theorema cum Franciſco Maurolyco demonſtrabimus,

Digitized by Google

bimus, eo modo, quo idem in numeris demonſtratur à Barlaam monacho. quod etiam cum eodem Maurolyco in ſequentibus propoſitionibus vſque ad 11. excluſiue faciemus. Demonſtrationes autem has numeris accommodatas reperies ad propoſ. 14. lib.



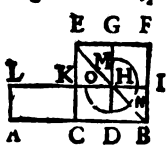
9. Ita ergo propoſitum exequemur. Quia quadratum ex C B, a æquale eſt quadratis ex C D, D B, vna cum rectangulo bis ſub D B, C D; Rectangulo autem ſub D B, C D, vna cum quadrato ex D B, b æquale eſt rectangulum ſub D B, C B; Erit quadratum ex C B, æquale reliquo quadrato ex C D, vna cum reliquo rectangulo ſub D B, C D, & rectangulo ſub D B, C B, vel ſub D B, A C. Atqui rectangulis ſub D B, A C, & ſub D B, C D, c æquale eſt rectangulum ſub D B, & tota A D. Igitur quadratum ex C B, æquale erit quadrato ex C D, vna cum rectangulo ſub D B, A D; hoc eſt, rectangulum ſub A D, D B, vna cum quadrato ex C D, æquale erit quadrato ex C B. Quod erat demonſtrandum.

a 4. ſec.
b 3. ſec.
c 1. ſec.

IDEM in numeris eſt manifeſtum. Diuidatur enim numerus 10. æqualiter in 5. & 5. Item inæqualiter in 7. & 3. ita vt medius numerus inter ſectiones ſit 2. quo videlicet dimidius numerus 5. ſuperat minorem partem 3. &c. Vides igitur, numerum 21. ex 7. in 3. productum, vna cum 4. quadrato intermedij numeri 2. æqualem eſſe 25. quadrato dimidij numeri 5.

EX hac etiam propoſ. 5. inueniemus alio modo numerum quadratum, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoque conficiat numerum. Nam ſi dato numero adiiciatur 1. & à compoſiti numeri dimidio detrahatur 1. reliquum fiet latus quadrati quæſiti. Vt ſi datus numerus ſit 15. Addita 1. fit 16. à cuius dimidio 8. ſi dematur 1. manet 7. latus quadrati 49. cum quo datus numerus 15. componit numerum quadratum 64. cuius latus eſt 8. quod perpetuo eſt vna vnitate maior latere 7. quadrati inuenti. Ratio huius regulæ ex demonſtratione propoſ. 5. difficilis non eſt. Cum enim rectangulum A H, cum quadrato K G, d æquale ſit quadrato C F; ſi rectangulum A H, ponatur 15. ſicut numerus datus; at vero quadratum D I, ſtatuatur 1. ac proinde latus D B, quoque 1. erit recta A D, 15. vt nimirum ex A D. in D B, gignatur 15. rectangulum videlicet A H. Addita ergo 1. erit tota linea A B. 16. a cuius dimidio 8. dempta 1. relinquetur C D, 7. latus nimirum quadrati K G.

d 5. ſec.



HIC quoque, ſi fracti numeri vitandi ſint, debet numerus datus eſſe impar, vt videlicet, addita 1. diuidi poſſit biſariam.

E contrario reperiemus numerum quadratum, a quo ſi datus quiuis numerus ſubtrahatur, reliquus fiat numerus quoque quadratus. Nam ſi ad datum numerum adiiciatur 1. erit dimidium compoſiti numeri latus quadrati quæſiti. Vt ſi rurſum numerus 15 datus ſit.

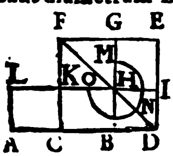
Digitized by Google

Addita 1. erit compoſiti numeri dimidium 8. latus quadrati 64. quæſiti. Si enim demas datum numerum 15. reliquus fiet quadratus numerus 49. cuius latus 7. perpetuo minus eſt vna vnitate, quam latus quadrati inuenti. Ratio huius rei perſpicua quoque eſt ex eadem figura huius propoſ. 5. Nam ſi rectangulum A H, quod ex quadrato C F, ablatum relinquit quadratum K G, ſtatuatur 15. ſicut datus numerus; & quadratum D I, ponatur 1. atque adeo & D B, eius latus 1. erit tota A B. 16. & eius dimidium C B, 8. &c.

vj. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI recta linea bifariam ſecetur, & illi recta quædam linea in rectum adiiciatur: Rectangulum comprehenſum ſub tota cum adiecta, & adiecta, vna cum quadrato à dimidia, æquale eſt quadrato à linea, quæ tum ex dimidia, tum ex adiecta componitur, tanquam ab vna, deſcripto.

SECETVR recta A B, bifariam in C, & ei in rectum addatur B D. Dico rectangulum comprehenſum ſub tota compoſita A D, & D B, adiecta, vna cum quadrato dimidiæ C B, æquale eſſe quadrato lineæ C D, quæ ex dimidia C B, & adiecta B D, componitur. Deſcribatur namque C E, quadratum ſuper C D, & ducta diametro D F, ducatur ex B, recta B G, parallela rectæ D E, ſecans diametrum D F, in H, puncto, per quod agatur I K, parallela rectæ C D: Item ex A, ducatur rectæ C F, parallela A L, ſecans I K, productam in L. Erunt igitur per corollarium 1. propoſ. 4. huius lib. B I, K G, quadrata, ideoque recta D I, rectæ D B, æqualis: *a* Eſt autem & K H, rectæ C B, æqualis. Quare rectangulum A I, comprehendetur ſub rectis A D, D B; & K G, erit quadratum rectæ C B. Probandum itaque eſt, rectangulum A I, vna cum quadrato K G, æquale eſſe quadrato C E. Quoniam ergo parallelogrammum A K, *b* æquale eſt parallelogrammo C H, quod baſes A C, C B, æquales ſint: *c* Eſt autem & parallelogrammum H E, eidem C H, æquale, complementum complemento; erunt A K, H E, æqualia inter ſe. Addito ergo communi C I, erit rectangulum A I, gnomoni M N O, æquale. Quocirca cum gnomon M N O, & quadratum K G, quadrato C E, ſint æqualia; erit & rectangulum A I, vna cum eodem quadrato K G, eidem quadrato C E. æquale. Itaque ſi recta linea bifariam ſecetur, & illi recta quædam linea in rectum adiiciatur, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 34. primi.

b 36 primi.

c 43 pri.

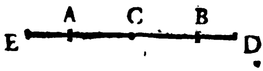
SCHO-

SCHOLIVM.



ALITER. Quia quadratum ex CD, a æquale eſt quadratis ex CB, BD, vnà cum rectangulo bis ſub DB, CB, hoc eſt, quadratis ex CB, BD, vna cum rectangulis ſub DB, CB, & ſub DB, AC: (ſumpta AC, ſemel pro CB, quæ illi æqualis ponitur) Eſt autem rectangulis ſub DB, AC; DB, CB; & ſub DB, DB, (quod eſt quadratum ex DB) b æquale rectangulum ſub DB, & tota AD. Igitur quadratum ex CD, æquale eſt reliquo quadrato ex CB, vna cum rectangulo ſub DB, AD: Hoc eſt, rectangulum ſub AD, DB, vna cum quadrato ex CB, æquale eſt quadrato ex CD. Quod demonſtrandum erat. a 4. ſec. b 1. ſec.

CÆTERVM ſi rem attentius conſiderare velimus, comperiemus propoſitionem hanc 6. per præcedentem 5. facillime poſſe demonſtrari: id quod etiam eruditus vir, & in omni doctrinarum genere exercitatiſſimus, Mauricius Breſcius Gratianopolitanus, Regius olim Mathematicarum diſciplinarum in Academia Pariſienſi profeſſor, animaduertit. Sit enim recta AB, ſecta in C, bifariam, & ei addita recta quantacunque BD. Dico rectangulũ comprehenſum ſub tota AD, compoſita, & adiecta BD, vna cum quadrato dimidiæ CB, æquale eſſe quadrato rectæ CD, ex dimidia, & adiecta compoſita. Addita namque rectæ AD, ex altera parte recta AE, quæ adiectæ BD, æqualis ſit, erit tota ED, ſecta in C, æqualiter, & in B, inæqualiter, quod EA, AC, ipſis DB, BC, æquales ſint. Recta quoque EB, rectæ AD, æqualis erit, quod EA, ipſi DB, ſit æqualis, & AB, vtrique communis. c Rectangulum igitur ſub partibus inæqualibus EB, BD, vna cum quadrato intermediæ ſectionis CB, hoc eſt, rectangulum ſub AD, BD, vna cũm quadrato dimidiæ CB, æquale erit quadrato dimidiæ CD, hoc eſt, quadrato rectæ ex dimidia CB, data recta AB, & ex adiecta BD, compoſita. Quod eſt propoſitum. c 5. ſec.



SECETVR iam numerus 10. bifariam, (vt & hoc theorema numeris accommodemus.) in 5. & 5. addaturq́; ei numerus 2. Vides igitur numerum 24. qui producitur ex toto numero compoſito 12. in adiectum 2. vna cum 25. quadrato dimidij numeri, æqualem eſſe 49. quadrato huius numeri 7. qui ex dimidio 5 & adiecto 2. componitur.

EX hoc porro theoremate colligitur proprietas inſignis Arithmeticæ proportionalitatis, quæ conſiſtit in eodem ſemper exceſſu quantitatum proportionalium. Cum enim AD, ſuperet CD, magnitudine AC, hoc eſt, CB; & CD, ſuperet BD, eadem magnitudine BC, habebunt tres lineæ AD, CD, BD, proportionalitatem Arithmeticam; quandoquidem prima AD ſuperat ſecundã CD, eodem exceſſu AC, ſiue CB, quo ſecunda CD, tertiam BD, ſuperat. Quare cum oſtenſum

Digitized by Google

ſit, rectangulum ſub extremis A D, B D, vna cum quadrato exceſſus C B, æquale eſſe quadrato lineæ mediæ C D; perſpicue colligitur, in omni proportionalitate Arithmetica trium linearum, rectangulum ſub extremis contentum, vna cum quadrato exceſſus, æquale eſſe quadrato lineæ mediæ. Semper enim tres lineæ Arithmeticè proportionales ita inter ſe coniungi poterunt, vt efficiant vnam lineam biſariam diuiſam, (quæ nimirum æqualis ſit exceſſus inter primam & tertiam, & ex tertia. Vt patet, ſi tres rectæ ſint datæ A D, C D, B D. Si namque ex prima A D, abſcindatur D C, æqualis mediæ, & ex media hac D C, auferatur tertia D B, erit A B, (exceſſus inter primam & tertiam) ſecta biſariam in C, eiq; addita tertia B D. Cum enim C B, exceſſus ſit inter mediam C D, & tertiam B D, qui æqualis eſſe debet, ob proportionalitatem Arithmeticam, ipſi A C, nempe exceſſus inter primam A D, & mediam C D; erit neceſſario A B, ſecta in C, biſariam. Eademque ratio eſt in aliis. Quod idem in numeris cernitur, qui eundem habent exceſſum. In numeris enim 4. 7. 10. eundem exceſſum 3. habentibus, numerus 40. productus ab extremis 4. 10. vna cum 9. quadrato exceſſus 3. æqualis eſt quadrato numero 49. qui ex medio numero 7. procreatur.

EX hac etiam propoſ. 6. reperiemus, vt ex 4. propoſ. numerum quadratum, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoque numerum componat. Nam ſi ex dato numero dematur 1. & reliquus numerus biſariam ſecetur, erit quadratus numerus huius dimidij is, qui quæritur. Vt ſi datus numerus ſit 15. Dempta 1, relinquitur 14. cuius dimidium 7. dabit numerum quadratum 49. quæſitum. Nam 15. cum 49. facit quadratum numerum 64. cuius latus 8. vna vnitate maius eſt latere 7. quadrati inuenti. Huius rei ratio manifeſta ex hac 6. propoſ. Cum enim rectangulum A I, cum quadrato G K,
a 6. ſec. a æquale ſit quadrato C E; ſi rectangulum A I, ſtatuatur 15. at quadratum B I, 1. ideoque & latus B D, 1. erit tota linea A D, 15. vt nimirum multiplicata in B D, 1. producat rectangulum A I, 15. Ablata igitur 1. B D. remanet A B, 14. cuius dimidium 7. dabit C B, latus quadrati K G, quæſiti.

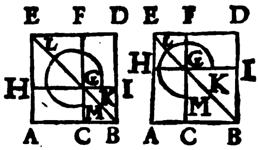
NECESSE autem etiam hic eſt, datum numerum eſſe imparem, vt fracti numeri vitentur, vt videlicet dempta 1. biſariam poſſit diuidi.

VERSA vice inueniemus numerum quadratum, à quo datus numerus detractus quadratum etiam numerum relinquat. Si enim ex dato numero tollatur 1. & reliqui numeri dimidio adiiciatur rurſus 1. conficietur latus quadrati quæſiti. Vt ſi datus ſit numerus 15. Dempta 1. erit 7. dimidium reliqui numeri 14. additaq; 1. fiet latus quadrati quæſiti 8. Nam ſi ex eius quadrato 64. ſubducas datum numerum 15. reliquus erit quadratus numerus 49. cuius latus 7. ſemper vna vnitate minus eſt latere inuento 8. Ratio eſt, quia ſi rectangulum

gulum A I, quod ex quadrato C E, ſubtractum relinquit quadratum K G, ſtatuatur 15. at quadratum B I, ideoque & B D, eius latus 1. erit tota linea A D, 15. vt dictum eſt. Dempta ergo 1. B D, erit A B, 14. cum dimidio C B, quod eſt 7. ſi rurſum apponatur 1. fiet latus C D, 8. quod quæritur, &c.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

SI recta linea ſecetur vtcunque; Quod à tota, quodque ab vno ſegmentorum, vtraquè ſimul quadrata, æqualia ſunt & illi, quod bis ſub tota, & dicto ſegmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à reliquo ſegmento fit, quadrato.



SECETVR recta A B, vtcunque in C. Dico quadratum totius A B, & quadratum ſegmenti ſiue maioris, ſiue minoris A C, æqualia eſſe rectangulo bis comprehenſo ſub tota A B, & dicto ſegmento A C, vna cum quadrato reliqui ſegmenti C B. Deſcribatur enim ſuper A B, quadratum A D, & ducta diametro B E, ducatur ex C, recta C F, parallela rectæ A E, ſecans diametrum in puncto G, per quod agatur H I, parallela rectæ A B. Erunt igitur per corollarium 1. propoſ. 4 huius lib. C I, H F, quadrata: & quia recta G H, a æqualis eſt rectæ A C, erit H F, quadratum ſegmenti A C. Rurſus quia A E, æqualis eſt ipſi A B, erit rectangulum A F, comprehenſum ſub tota A B, & ſegmento A C. Eadem ratione rectangulum H D, comprehenſum erit ſub eiſdem rectis A B, A C, quod rectæ D E, E H, æquales ſint rectis A B, A C, ob quadrata A D, F H. Quoniam igitur rectangulis A F, F I, vna cum quadrato C I, hoc eſt, gnomoni K L M, vna cum quadrato C I, æquale eſt quadratum A D; ſi apponatur commune quadratum H F, erunt quadrata A D, H F, æqualia rectangulis A F, D H, (quorum quodlibet comprehenditur ſub tota A B, & ſegmento A C,) vna cum C I, quadrato reliqui ſegmenti C B. Si igitur recta linea ſecetur vtcunque, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 34. *primi.*

SCHOLIVM.

ALITER. Quia quadratum ex A B, b *æquale eſt quadratis ex A C, C B, vna cum rectangulo bis ſub A C, C B; ſi addatur commune quadratum ex A C, erunt quadrata ex A B, A C, æqualia quadrato ex A C, bis, & quadrato ex C B, vna cum rectangulo bis ſub A C, C B. Sed rectangulo ſub A C, C B, vna cum quadrato ex A C,*

b 4. *ſec.*



Digitized by Google

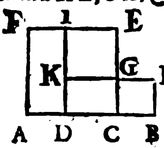
13. ſec. *a æquale eſt rectangulum ſub A B, A C: Et proinde rectangulo bis ſub A C, & B, vna cum quadrato ex A C, bis, æquale eſt rectangulum ſub A B, A C, bis. Igitur quadrata ex A B, A C, æqualia ſunt reliquo quadrato ex C B, vna cum rectangulo bis ſub A B, A C. Quod demonſtrandum erat.*

IN numeris autem diuidatur numerus 10. *vtcunque in* 6. *&* 4. *Igitur* 100. *quadratus numerus totius numeri* 10. *&* 36. *quadratus numerus partis* 6. *æquales ſunt numero* 120. *qui fit bis ex toto* 10. *in partem* 6 *vna cum* 16 *quadrato numero alterius partis* 4. *vt conſtat. Sic etiam* 100. *quadratus numerus totius numeri* 10. *&* 16. *quadratus numerus partis* 4. *æquales ſunt numero* 80. *qui bis fit ex toto* 10. *in partem* 4. *vna cum* 36. *quadrato numero alterius partis* 6.

EX FEDERICO COMMANDINO.

SI recta linea in partes inæquales ſecetur: Earum partium quadrata æqualia ſunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur, vna cum quadrato eius lineæ, qua maior pars ſuperat minorem.

SECETVR recta A B, in partes inæquales A C, C B, ſitque maior pars A C; ponatur autem minori parti C B, æqualis linea A D, vt D C, ſit exceſſus, quo pars A C, ſuperat partem C B. Dico quadrata partium A C, C B, æqualia eſſe rectangulo, quod bis continetur ſub A C, C B, vna cum quadrato lineæ D C. Conſtituantur enim quadrata A E, C H, & agatur D I, ipſi C E, parallela, producaturque H G, ad K. Itaque quoniam A D, ipſi C B, eſt æqualis, addita communi D C, erit tota A C, hoc eſt, C E, toti D B, æqualis: Eſt autem & C G, ipſi C B, æqualis, quod quadratum ſit C H. Igitur & reliqua G E, reliquæ D C, æqualis erit: Ac proinde, cum & I E, ipſi D C, ſit æqualis, erunt G E, I E, æquales; ideoque I G, quadratum erit ab exceſſu D C, deſcriptum.



Quoniam vero rectangula A I, D H, continentur ſub partibus A C, C B, (Eſt enim A C, vtrique lineæ A F, D B, & C B, vtrique A D, B H, æqualis) manifeſtum eſt, quadrata A E, C H, partium A C, C B, æqualia eſſe rectangulis A I, D H, quæ continentur ſub partibus A C, C B, vna cum quadrato I G, exceſſus D C. Quod eſt propoſitum.

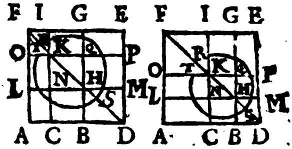
SCHOLIVM.

IN numeris. Secetur numerus 10. *inæqualiter in* 4. *&* 6. *ita vt maior pars ſuperet minorem numero* 2. *Vides igitur numeros* 16. 36. *quadratos partium, qui efficiunt* 52. *æquales eſſe numero* 24. *qui ex* 4. *in* 6. *fit, bis ſumpto, vna cum* 4. *quadrato exceſſus* 2. *vt volebat theorema.*

THEOR.

THEOR. 8. PROPOS. 8. viij.

SI recta linea ſecetur vtcunque: Rectangulum quater comprehenſum ſub tota, & vno ſegmentorum, cum eo, quod à reliquo ſegmento fit, quadrato, æquale eſt ei, quod à tota, & dicto ſegmento, tanquam ab vna linea deſcribitur, quadrato.



SIT recta A B, in C, diuiſa vtcunque. Dico rectangulum quater comprehenſum ſub A B, & ſegmento ſiue maiore, ſiue minore C B, vna cum quadrato reliqui ſegmenti A C, æquale eſſe quadrato lineæ, quæ ex recta A B, & dicto ſegmento C B, componitur. Producatur enim A B, verſus dictum ſegmentum C B, ad D, ſitque B D, recta æqualis ſegmento C B; & ſuper tota A D, quadratum deſcribatur A E. Ducta autem diametro D F, ducantur B G, C I, parallelæ ipſi D E, ſecantes diametrum in H, K, punctis, per quæ ducantur L M, O P, parallelæ ipſi A D, quæ ſecent priores parallelas in N, Q. Erunt igitur per corollarium 1. propoſ. 4. huius lib. O I, N Q, B M, L G, C P, circa diametrum D F, quadrata. Et quia O K. *a* æqualis eſt rectæ A C, erit O I, quadratum ſegmenti A C. Rurſus *b* quia N H, æqualis eſt rectæ C B, erit N Q, quadratum ſegmenti C B, ideoque quadrato B M, æquale, cum rectæ C B, B D, æquales ſint. Quare rectæ B H, H Q, æquales ſunt ſegmento C B; atque adeo duo rectangula A H, L Q, comprehenſa erunt ſub A B, & ſegmento C B, *c* cum L H, ſit æqualis rectæ A B. Eadem ratione erunt duo rectangula N G, H E, comprehenſa ſub A B, & C B. cum N H, H M, rectæ *d* æquales ſint rectis C B, B D; & rectæ G H, E M, rectæ F L, hoc eſt, rectæ L H, hoc eſt, rectæ A B. Et quia quadrata N Q, B M, æqualia ſunt; ſi addatur commune K G, erunt B M, K G, ſimul æqualia rectangulo N G. Quapropter quinque rectangula A H, L Q, H E, B M, & K G, gnomonem R S T, componentia, æqualia ſunt rectangulo quater comprehenſo ſub recta A B, & ſegmento C B. Cum igitur gnomon R S T, & quadratum O I, æqualia ſint quadrato A E; erit rectangulũ quater comprehenſum ſub data recta A B, & ſegmento C B, vna cum quadrato reliqui ſegmenti A C, æquale quadrato lineæ A D, compoſitæ ex A B, & dicto ſegmento C B. Quamobrem, ſi recta linea ſecetur vtcunque, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 34. primi.
b 34. primi.
c 34. primi.
d 34. primi.

SCHOLIVM.

ALITER. Quia quadratum ex A D, e æquale eſt quadratis ex A B, B D, vna cum rectangulo ſub A B, B D, bis, hoc eſt, quadratis e 4. ſecun.

 ex A B,



ex A B, B C, vna cum rectangulo bis ſub A B, B C: At quadrata ex A B, B C,
a 7. ſec. *a æqualia ſunt rectangulo bis ſub A B, B C, vna cum quadrato ex A C; Erit quadratum ex A D, æquale rectangulo quater ſub A B, B C, vna cum quadrato ex A C. Quod demonſtrandum erat.*

SECETVR iam numerus 10. vtcunque in 6. & 4. Numerus igitur 240. qui quater fit ex toto 10. in partem 6. vna cum 16. quadrato numero alterius partis 4. hoc eſt, numerus 256. æqualis eſt numero quadrato huius numeri 16. qui componitur ex dato numero 10. & dicta parte 6. vt conſtat. Eodem modo, numerus 160. qui fit quater ex 10. toto, in partem 4. vna cum 36. quadrato numero alterius partis 6. hoc eſt, numerus 196. æqualis eſt quadrato numero huius numeri 14. qui componitur ex 10. & 4. vt perſpicuum eſt.

POTEST propoſitio hæc 8. ita etiam proponi.

SI linea recta ſecetur vtcunque, eique in rectum adiiciatur alia recta vni ſegmentorum æqualis: Quadratum totius lineæ compoſitæ æquale eſt rectangulo quater comprehenſo ſub data linea, & adiecta ſiue dicto ſegmento, vna cum quadrato alterius ſegmenti.

NAM recta A B, ſecta eſt in C, vtcunque, eique addita B D, ſegmento C B, æqualis, demonſtratumque eſt, quadratum totius A D, æquale eſſe rectangulo quater comprehenſo ſub data linea A B, & adiecta B D, ſiue dicto ſegmento C B, vna cum quadrato alterius ſegmenti A C.

Item ſic.

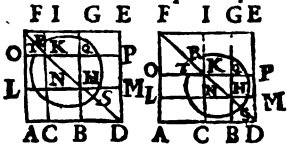
SI linea recta ſecetur bifariam, eique in rectum adiiciatur recta alia quantacunque: Quadratum totius compoſitæ lineæ æquale eſt rectangulo quater comprehenſo ſub linea compoſita ex dimidia, & adiecta, & ſub dimidia, vnà cum quadrato adiectæ.

NAM recta D C, ſecta eſt bifariam in B, eiq; addita C A, probatumque fuit, quadratum totius A D, æquale eſſe rectangulo quater comprehenſo ſub A B, compoſita ex B C, dimidia, & adiecta A C, & ſub dimidia C B, vna cum quadrato adiecta A C.

IAM verò ex hac quoque propoſ. 8. inueniemus alia ratione numerum quadratum, cum quo datus quilibet numerus conficiat numerum ſimiliter quadratum. Nam ſi ex quarta parte numeri dati dematur 1. reliquum erit latus quadrati quæſiti. Vt ſi datus numerus ſit 32. tollatur 1. ex eius quarta parte 8. Reliquus enim numerus 7. dabit quadratum 49. cum quo datus numerus 32. efficit quadratum 81.

Digitized by Google

tus 81. Cuius latus 9. eſt ſemper vna vnitate maius quarta parte dati numeri. Facilis eſt huiuſce rei ratio. Quoniam enim rectangulum AH, quater ſumptum, cum quadrato O I, æquale eſt quadrato AE; ſi rectangulum AH, ponatur 8. nempe quarta pars dati numeri, a 8. ſec.



at vero quadratum CH, adeoq; & CB, eius latus, 1. erit linea AB, 8. vt ducta in CB, 1. faciat 8. Ablata ergo 1. reliquum erit AC, latus quadrati O I, 7. quod quæritur.

VT autem fractiones vitentur, neceſſe eſt, datum numerum diuidi poſſe in quatuor partes æquales, ita vt à 4. numeretur.

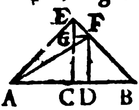
CONTRA, inueniemus quoque numerum quadratum, à quo datus numerus ſubtractus relinquat numerum etiam quadratum. Si namq; ad quartam partem numeri dati addatur 1. conflabitur latus quadrati quæſiti. Vt ſi datus rurſum ſit numerus 32. ſi ad quartam eius partem 8. adijciatur 1. fiet latus 9. à cuius quadrato 81. ſi detrahatur datus numerus 32. remanebit quadratus numerus 49. cuius latus 7. ſemper eſt vnitate minus quarta parte dati numeri. Ratio eſt, quia ſi quarta pars gnomonis RST, qui ex quadrato AE, ſublatus relinquit quadratum O I, hoc eſt, ſi rectangulum AH, quod gnomonis RST, quartam partem eſſe demonſtrauimus, ſtatuatur 8. quarta pars dati numeri 32. at quadratum BM, ideoq; & latus eius BD, 1. erit linea AB, 8. vt dictum eſt, ac proinde totum latus AD, 9. ex cuius quadrato AE, quod eſt, 81. ſi auferatur gnomon RST, quem poſuimus eſſe 32. reliquum fiet quadratum O I, 49. cuius latus AC, eſt 7. quandoquidem AB, erat 8. & CB, hoc eſt, BD, illi æqualis, 1. quod quidem latus AC, perpetuò vna vnitate minus eſt quarta parte numeri dati 32. vt dictum eſt.

THEOR. 9. PROPOS. 9. 12.

SI recta linea ſecetur in æqualia, & non æqualia: Quadrata, quæ ab inæqualibus totius ſegmentis fiunt, ſimul duplicia ſunt & eius, quod à dimidia, & eius, quod ab intermedia ſectionum fit, quadrati.

SECETVR recta AB, bifariam in C, & non bifariam in D. Dico, quadrata ſegmentorum inæqualium AD, DB, ſimul dupla eſſe quadratorum ſimul, quæ fiunt ex dimidia AC, & ex intermedia ſectionum CD. Educatur enim ex C, ad AB, perpendicularis CE, quæ ſit æqualis dimidiæ AC, vel CB, ducanturque rectæ EA, EB. Deinde ex D, ducatur quoque ad AB, perpendicularis DF, ſecans EB, in puncto F, per quod ducatur FG, parallela ipſi AB, ſecans CE, in G, ducaturque tandem AF. Quo-

niam igitur in triangulo A C E, latera C A, C E, æqualia ſunt;
a 6. pri. *a* erunt anguli C A E, C E A, æquales: Eſt autem angulus A C E,
b 32. pri rectus: Reliqui igitur *b* anguli alium rectum conficient, ideo-
mi. que A E C, ſemirectus erit. Eadem ratione angulus B E C, ſemire-
ctus erit; ac propterea totus A E B, rectus. Rurſus, quia trianguli
c 29. pri F G E, angulus E G F, *c* æqualis eſt recto E C B, externus inter-
mi. no; *d* erunt reliqui duo anguli vni recto æquales:



d 32. pri. Oſtenſum autem eſt, angulum F E G, eſſe ſemire-
ctum. Igitur & E F G, ſemirectus erit, proptereaq;
e 6. pri. anguli E F G, F E G; æquales erunt, *e* ideoque &
latera E G, G F, æqualia inter ſe. Eodem modo oſtendetur, in tri-
angulo B D F, latera B D, D F, eſſe æqualia. Nam angulus F D B,
eſt rectus, & B, ſemirectus, &c. Itaque cùm in triangulo A C E, an-
f 47. pri gulus C, rectus ſit, *f* erit quadratum lateris A E, æquale duobus
mi. quadratis laterum A C, C E: Atqui hæc duo quadrata inter ſe
ſunt æqualia, quod & lineæ A C, C E, æquales ſint. Igitur quadra-
tum lateris A E, duplum erit quadrati lateris A C. Rurſus, quia in
g 47. triangulo E G F, angulus G, rectus eſt, *g* erit quadratum lateris
primi. E F, æquale duobus quadratis laterum E G, G F: At duo hæc qua-
drata inter ſe æqualia ſunt, ob æqualitatem linearum E G, G F.
Igitur quadratum lateris E F, duplum erit quadrati lateris F G,
h 34. pri hoc eſt quadrati lineæ C D. Eſt enim C D, *h* recta rectæ F G, æ-
mi. qualis; cùm C F, ſit parallelogrammum. Quare duo quadrata
rectarum A E, E F, dupla ſunt duorum quadratorum linearum re-
ctarum A C, C D: Sunt autem duo quadrata rectarum A E, E F,
i 47. pri *i* æqualia quadrato rectæ A F; & quadratum rectæ A F, æquale
mi. duobus quadratis rectarum A D, D F. Igitur & duo quadrata re-
ctarum A D, D F, dupla ſunt duorum quadratorum rectarum A C,
C D: Atqui quadratum rectæ D F, æquale eſt quadrato rectæ D B.
Oſtenſum enim eſt, rectas D F, D B, eſſe æquales. Quare duo quo-
que quadrata rectarum A D, D B, ſegmentorum inæqualium, du-
pla ſunt quadratorum rectarum A C, C D, dimidiæ lineæ, & inter-
mediæ ſectionum. Si ergo recta linea ſecetur in æqualia, & non æ-
qualia, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

ALITER. Quia quadratum ex linea recta A D, deſcriptum,
k 4. ſec. *k æquale eſt quadratis deſcriptis ex A C, C D, vna cum parallelo-*
grammo rectangulo bis ſub rectis A C, C D, comprehenſo; ſi commune



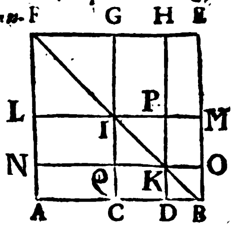
apponatur quadratũ ex D B, erunt duo quadra-
ta ex A D, D B, æqualia tribus quadratis ex
A C, C D, D B, vna cum rectangulo bis ſub A C, C D, vel ſub B C,
C D; Atqui quadrato ex D B, vna cum rectangulo bis ſub B C, C D,
l 7. ſec. *l æqualia ſunt quadratis ex B C, ſeu A C, & ex C D Quadrata igi-*
tur

tur ex A D, D B, æqualia ſunt bis quadratis ex A C, C D; Ac propterea quadrata ex A D, D B, dupla ſunt quadratorum ex A C, C D. Quod oſtendendum erat.

ALITER ex Federico Commandino. Quoniam A C, ipſi C B, æqualis eſt, & ſuperat C B, ipſam C D, recta D B; ſuperabit quoque A C, ipſam C D, eadem recta D B. Quare, vt ad 7. propoſ. huius libri demonſtrauimus, quadrata rectarum A C, C D æqualia ſunt rectangulo ſub A C, C D, bis vna cum quadrato rectæ D B; Ac propterea quadrata rectarum A C, C D, & rectangulum ſub A C, C D, bis, vna cum quadrato rectæ D B, dupla ſunt quadratorum ex A C, C D: Sed quadratis rectarum A C, C D, vna cum rectangulo ſub A C, C D, bis a eſt æquale quadratum rectæ A D. Igitur & quadrata rectarum A D, D B, dupla ſunt quadratorum ex A C, C D. a 4. ſec.

IAM verò rurſus numerus 10. diuidatur æqualiter in 5. & 5. Item inæqualiter in 7. & 3 vt ſit intermedia ſectio numerus 2 ceu in propoſ. 5 eſt dictum. Quadrati numeri igitur 49. & 9. partium inæqualium 7. & 3 dupli ſunt quadratorum 25. & 4. dimidij numeri 5. & numeri 2. inter duas ſectiones, vt manifeſtum eſt.

QVOD ſi lubeat, demonſtrabimus & hanc 9. propoſ. ex ipſa conſtructione, vt præcedentes, hoc modo. Deſcripto quadrato A E, totius lineæ A B, ductaq; diametro B F, ducantur per C, D, lateribus A F, B E, parallelæ C G, D H, ſecantes diametrum B F, in punctis I, K, per quæ lateribus A B, F E, parallelæ agantur L M, N O, ſecantes C G, D H, in Q, P.



Quoniam igitur ex coroll. 1. propoſ. 4. huius lib. quadrata ſunt L G, Q P, D O, C M, N H, b eſtq; L I, ipſi A C, & Q K, ipſi C D, & N K ipſi A D, æqualis; erunt N H, D O, quadrata partium inæqualium A D, D B, & L G, Q P, quadrata dimidiatæ lineæ A C, & intermediæ ſectionis C D. Dico illa horum eſſe dupla. Quoniam enim quadrata N H, D O, ſuperant quadrata L G, Q P, quadrato D O, & rectangulis N I, I H: Sunt autem quadratum D O, & rectangula N I, I H, æqualia quadratis L G, Q P, vt mox demonſtrabitur; liquidò conſtat, quadrata N H, D O, quadratorum L G, Q P, eſſe dupla, cùm hæc bis in illis contineantur. Quòd autem tria hæc rectangula D O, N I, I H, æqualia ſint quadratis L G, Q P, ita oſtendatur. Rectangulum N I, c æquale eſt rectangulo Q M, quòd rectæ N Q, Q O, d æquales ſint æqualibus A C, C B. Igitur N I, complectitur quadratum Q P; & inſuper K M. Si ergo K M, D O, I H. æqualia ſint quadrato L G, erunt neceſſariò D O, N I, I H, æqualia duob. quadratis L G, Q P. Eſſe autẽ K M, D O, I H, æqualia quadrato L G, ſic demonſtrabimus. e Rectangula K M, D O, ſimul æqualia ſunt ipſi P E, quòd rectæ B M, M E, æquales ſint, cùm B M, b 34. primi. c 36. pri. d 34. pri. e 36. primi.

æqua-

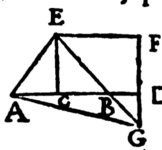
Digitized by Google

a34.pri. *æqualis ſit ipſi C B, ob quadratum C M,* a *& M E, ipſi F L, hoc eſt,*
b34.pri. *ipſi L I, ob quadratum L G, hoc eſt* b *ipſi A C. Addito ergo communi*
c36.pri. *I H, erunt K M, D O, I H, æqualia ipſi I E, hoc eſt, quadrato L G:*
d34.pri c *quod I E, L G, æqualia ſint, ob rectas L I, I M,* d *quæ æqualibus*
mi. *A C, C B, æquales ſunt. Quod eſt propoſitum.*

x. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI recta linea ſecetur bifariam, adijciatur autem ei in rectum quæpiam recta linea: Quod à tota cum adiuncta, & quod ab adiuncta, vtraque ſimul quadrata, duplicia ſunt & eius, quod à dimidia, & eius, quod à compoſita ex dimidia & adiuncta, tanquam ab vna, deſcriptum ſit, quadrati.

SECETVR recta A B, bifariam in C, & ei in rectum addatur B D. Dico duo quadrata rectarum A D, B D, ſimul dupla eſſe quadratorum ſimul, quæ ex rectis A C, C D, deſcribuntur. Super A B, enim ex C, erigatur perpendicularis C E, quæ ſit æqualis dimidiæ A C, vel C B, & iungantur rectæ A E, E B. Per D, deinde educatur D F, ipſi C E, parallela, occurrens rectæ E B, protractæ



in G; & per E, ducatur rectæ C D, parallela E F, ſecans D F, in F, iungaturque recta A G. Oſtendetur iam, angulum A E B, eſſe rectum, vt in
e29.pri præcedenti propoſ. & C E B, ſemirectum; *e* id-
mi. eoque eius alternum E G F, ſemirectum quo-
f34.pri. que: *f* Eſt autem angulus F, rectus, cùm in pa-
g32.pri rallelogrammo C F, recto angulo C, opponatur. *g* Igitur & re-
mi. liquus F E G, ſemirectus erit, & propterea ipſi E G F, æqualis. Qua-
h6.pri. re rectæ *h* E F, F G, angulis F E G, E G F, oppoſitæ, æquales quoque erunt. Eadem arte oſtendes, rectas B D, D G, eſſe æquales, propterea quòd angulus B D G, ſit rectus, & B G D, ſemirectus,
i47.pri. &c. Quoniam igitur quadratum rectæ A E, *i* æquale eſt quadratis æqualibus rectarum æqualium A C, C E; erit quadratum rectæ A E, duplum quadrati rectæ A C. Rurſus quia quadratum
k47.pri rectæ E G, *k* quadratis æqualibus rectarum æqualium E F, F G,
mi. æquale eſt; erit quoque quadratum rectæ E G, duplum quadrati
l34.pri rectæ E F, hoc eſt rectæ C D, *l* cũ C D, recta æqualis ſit rectæ E F.
mi. Duo igitur quadrata rectarum A E, E G, dupla ſunt quadratorum ex rectis A C, C D, deſcriptorũ. Atqui duobus quadratis recta-
m47. rum A E, E G, æquale eſt *m* quadratum rectæ lineæ A G; & qua-
primi. drato rectæ A G, æqualia ſunt duo quadrata, quæ ex duabus lineis rectis A D, D G, deſcribuntur. Quadrata ergo rectarum A D, D G, dupla ſunt quadratorum ex rectis A C, C D, deſcriptorum. Cùm igitur quadratum rectæ D G, æquale ſit quadrato rectæ B D; e-

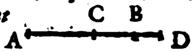
runt

Digitized by Google

runt quoque quadrata rectarum A D, D B, dupla quadratorum, quæ ex rectis A C, C D, deſcribuntur. Itaque ſi recta linea ſecetur biſariam, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

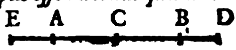
ALITER. Quia quadratum ex A D, a *æquale eſt quadratis ex A C, C D, vna cum rectangulo bis ſub A C, C D, vel ſub B C, C D; ſi commune addatur quadratum ex B D, erunt duo quadrata ex A D, B D, æqualia tribus quadratis ex A C, C D, B D, vna cum rectangulo bis ſub B C, C D.* b *Sed quadrato ex B D, vna cum rectangulo bis ſub B C, C D, æqualia ſunt quadrata ex C D, B C, hoc eſt, quadrata ex A C, C D. Igitur quadrata ex A D, B D, æqualia ſunt quadratis ex A C, C D, bis; Ac proinde quadrata ex A D, B D, dupla ſunt quadratorum ex A C, C D; Quod erat demonſtrandum.* a 4. ſec. b 7. ſec.



ALITER ex Federico Commandino. Quoniam A C, ipſi C B, eſt æqualis, & ſuperat C D, ipſam C B, recta B D; ſuperabit quoque C D, ipſam A C, eadem recta B D. Quare, vt ad 7. propoſ. huius lib. oſtendimus, quadrata ex A C, C D, æqualia ſunt rectangulo ſub A C, C D, bis, vna cum quadrato rectæ B D; Ac propterea quadrata rectarum A C, C D, & rectangulum ſub A C, C D, bis, vna cum quadrato rectæ B D, dupla ſunt quadratorum ex A C, C D: Atqui quadratis rectarum A C, C D, vna cum rectangulo ſub A C, C D, bis, c *æquale eſt quadratum rectæ A D. Igitur & quadrata rectarum A D, B D, dupla ſunt quadratorum ex A C, C D.* c 4. ſec.

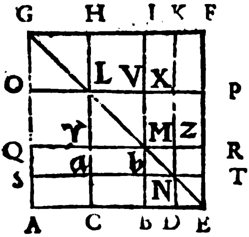
NVMERVS 10. biſariam ſecetur in 5. & 5. cui addatur numerus quinis 3. vt totus numerus compoſitus ſit 13. Quadrati igitur numeri 169. & 9. horum numerorum 13. & 3. dupli ſunt numerorum quadratorum 25. & 64. qui ex his numeris 5. & 8. gignuntur, vt perſpicuum eſt.

SED & hæc propoſ. 10. facilè ex præcedenti 9. demonſtrabitur, quemadmodum ſupra demonſtrata fuit 6. ex 5. Sit enim recta A B, ſecta biſariam in C, eiq; addita recta quantacunque B D. Dico duo quadrata rectarum A D, B D, ſimul dupla eſſe duorum quadratorum rectarum A C, C D, ſimul. Addita namque recta A D, ad partes A, recta A E, quæ adiectæ B D, æqualis ſit; erit tota E D, ſecta in C, biſariam, & in B, non biſariam, quod E A, A C, ipſis D B, B C, æquales ſint. Recta quoque E B, rectæ A D, æqualis erit, quod E A, ipſi D B, ſit æqualis, & A B, vtrique communis. d *Quadrata igitur rectarum E B, B D, hoc eſt, rectarum A D, B D, dupla erunt quadratorum rectarum E C, C B, hoc eſt, rectarum C D, A C. quod eſt propoſitum.* d 9. ſec.



QVOD ſi lubeat eandem hanc propoſ. 10. demonſtrare ex ipſa con-

conſtructione, quemadmodum præcedentem 9. oſtendimus, fiet id hoc modo. Productâ A D, ad E, vt D E, ſit adiecta linea B D, æqualis, de-



ſcriptoq; quadrato A F, totius lineæ A E, ducantur per C, B, D, lateribus A G, E F, parallelæ C H, B I, D K ſecantes ductam diametrum E G, in L, M, N, punctis, per quæ lateribus A E, G F, parallelæ agantur O P, Q R, S T, ſecantes priores in V, X, Y, Z, a, b Quoniam igitur ex coroll 1. propoſ. 4. huius lib omnia rectangula circa diametrũ
a 34. pri mi. *E G, quadrata ſunt, a eſtq; S N, ipſi A D, æqualis, & O L, ipſi A C, & a N, ipſi C D: erit S K quadratum rectæ A D, & D T, quadratum rectæ D E, ſiue B D, & O H, a X, quadrata rectarum A C, C D. Dico quadrata S K, D T, ſimul dupla eſſe quadratorum O H, a X, ſimul. Quoniam enim quadrata S K D T, ſuperant quadrata O H, a X, quadrato D T, & rectangulis S L, L K: Sunt autem quadratum D T, & rectangula S L, L K, æqualia quadratis O H, a X, vt mox demonſtrabitur; liquidò conſtat, quadrata S K, D T, quadratorum O H, a X, dupla eſſe, cùm hæc in illis contineantur bis. Quòd autem tria hæc rectangula D T, S L, L K, quadratis O H, a X, æqualia*
b 36 pri mi. *ſint, ita patebit Rectangulum Q L, b æquale eſt quadrato O H, ob lineas Q O, O G, quæ æquales ſunt; c propterea quòd Q O, ipſi Y L,*
c 34. pri mi. *æqualis eſt, & Y L, ipſi O G, ob æqualia quadrata Y V, O H, æqualium laterum O L, L V. Item d S T, ipſi a M, & L I, ipſi Y V, & V K, ipſi*
d 34. pri mi. *V Z, & D T, ipſi b Z. Igitur quinque rectangula Q L, S T, L I, V K, D T, hoc eſt, tria rectangula D T, S L, L K, æqualia ſunt quinque rectangulis O H, a M, Y V, V Z, b Z. hoc eſt, duobus quadratis O H, a X. Quod eſt propoſitum.*

xj. PROBL. I. PROPOS. II.

DATAM rectam lineam ſecare, vt comprehenſum ſub tota, & altero ſegmentorum rectangulum, æquale ſit ei, quod à reliquo ſegmento fit, quadrato.

DATA ſit recta A B, quam ſecare oportet in duas partes, ita vt rectangulum comprehenſum ſub tota A B, & altero eius ſegmento, nempe minori, æquale ſit quadrato reliqui ſegmenti, nimirum maioris. Deſcribatur ex A B, quadratum A C, & diuiſo latere A D, quod cum linea data A B, angulum rectum efficit, bifariam in E, iungatur recta E B, cui ex E A, producta æqualis ſumatur E F, & ipſi A F, abſcindatur ex recta A B. data æqualis A G. Eſt enim A B, maior quam A F. Nam cùm F B, ſit æqualis
e 20. pri. ipſi E F, ex conſtructione; e ſint autem latera A E, A B, maiora latere

latere E B; Erunt quoque rectæ E A, A B, maiores recta E F: ac proinde ablata communi A E, reliqua A B; maior erit, quàm reliqua A F. Dico rectam A B, ſectam eſſe in G, ita vt rectangulum comprehenſum ſub A B, B G, æquale ſit quadrato rectæ A G; adeò vt A G, ſit maius ſegmentum, & B G, minus. Ducatur enim per G, recta H I, parallela rectæ D F, ſecans C D, in I; Ac per F, ducatur ipſi A G, parallela F H, ſecans H I, in H. Erit igitur parallelogrammum A H, quadratum ſegmenti A G, cùm omnia eius quatuor latera ſint æqualia, quippe cùm *a* F H, G H, æqualia ſint oppoſitis A G, A F, æqualibus; omneſque anguli eiuſdem recti ob rectum A, vt ad defin. 1. huius libri oſtendimus. Rectangulum quoque C G, comprehenſum erit ſub A B, & ſegmento B G; quod A B, æqualis ſit ipſi B C. Itaque probandum eſt, rectangulum C G, & quadratum A H, æqualia eſſe. Quoniam igitur recta D A, diuiſa eſt bifariam in E, & ei addita in rectum A F; *b* erit rectangulum ſub D F, F A, hoc eſt, rectangulum D H (cùm F H, ſit æqualis ipſi F A;) vna cum quadrato dimidiæ A E, æquale quadrato rectæ E F, hoc eſt, quadrato rectæ E B, quæ rectæ E F, æqualis eſt: Eſt autem quadratũ rectæ E B, *c* æquale quadratis rectarum A E, A B. Quare rectangulum D H, vna cum quadrato rectæ A E, æquale quoque eſt quadratis rectarum A E, A B. Dempto ergo communi quadrato rectæ A E, remanebit rectangulum D H, æquale quadrato rectæ A B, hoc eſt, quadrato A C. Ablato igitur rurſus communi rectangulo A I, remanebunt rectangulum C G, & quadratum A H, inter ſe æqualia. Quod eſt propoſitum. Datam igitur rectam A B, ſecuimus &c. Quod erat faciendum.

a 34. pri.



b 6. ſec.

c 47. primi.

SCHOLIVM.

HOC problema nulla ratione accommodari poteſt numeris. Non enim numerus vllus in duos poteſt numeros diuidi, vt numerus productus ex toto in alteram partem æqualis ſit quadrato alterius partis, vt demonſtrabimus ad propoſ. 14. lib. 9. Vbi etiam decem theoremata antecedentia huius lib. in numeris demonſtrabimus. Clariuſq; ad propoſ. 29. eiuſdem lib. 9. oſtendemus, problema hoc 11. nulla ratione poſſe numeris accommodari.

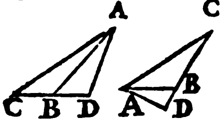
PRAXIS autem huiuſce problematis non eſt difficilis. Nam ad extremum A, vbi terminari debet maius ſegmentum lineæ datæ A B, excitata perpendiculari A D, ipſi datæ lineæ A B, æquali, eaq; ſecta in E, bifariam; ſi ad interuallum E B, reſecetur E A, producta in F, erit A F, maiori ſegmento A G, æqualis, vt demonſtratum eſt.

THEOR.

xij. THEOR. 11. PROPOS. 12.

IN amblygoniis triangulis, quadratum, quod fit à latere angulum obtuſum ſubtendente, maius eſt quadratis, quæ fiunt à lateribus obtuſum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenſo & ab vno laterum, quæ ſunt circa obtuſum angulum, in quod, cùm protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab aſſumpta exteriùs linea ſub perpendiculari prope angulum obtuſum.

TRIANGVLVM A B C, habeat angulum A B C, obtuſum, & ex A, in latus C B, ad partes anguli obtuſi protractum cadat perpendicularis A D. Dico quadratum lateris A C, quod obtuſo angulo opponitur, maius eſſe quadratis laterum A B, B C, rectangulo bis comprehenſo ſub C B, B D, hoc eſt, quadratũ lateris A C, æquale eſſe duobus quadratis laterum A B, B C, vna cum rectangulo ſub C B, B D, bis comprehenſo. Cùm enim recta C D, diuiſa ſit in B, vtcunque *a* erit quadratum rectæ C D, æquale duobus quadratis rectarum C B, B D, & rectangulo comprehenſo bis ſub C B, B D. Addito igitur communi quadrato rectæ A D, erunt duo quadrata rectarum C D, D A, æqualia tribus quadratis rectarum C B, B D, D A, & rectangulo comprehenſo bis ſub C B, E D: *b* Eſt autem quadratis rectarũ C D, D A, æquale quadratum rectæ A C. Quare & quadratum rectæ A C, æquale erit tribus quadratis rectarum C B, B D, D A, & rectangulo comprehenſo bis ſub C B, B D. Cùm igitur quadratis rectarum B D, D A, *c* æquale ſit quadratum rectæ A B; erit quadratum rectæ A C, æquale quadratis rectarum C B, B A. & rectangulo comprehenſo bis ſub C B, B D. Quod eſt propoſitum. In amblygoniis ergo triangulis, quadratum, quod fit, &c. Quod erat oſtendendum.



a 4. ſec.

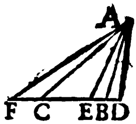
b 47. primi.

c 47. primi.

SCHOLIVM.

IAM hoc loco demonſtrauit Euclides, quantò maius ſit in triangulo amblygonio quadratum lateris angulo obtuſo oppoſiti, quadratis aliorum duorum laterum: In ſequenti autem propoſ. 13. oſtendet, quantò quadratum lateris acuto angulo oppoſiti minus ſit quadratis reliquorum duorum laterum, vt ad initium ſcholij propoſ. 47. lib. 1. monuimus.

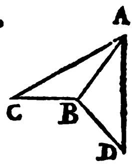
QVONIAM verò aſſumpſit Euclides, perpendicularem ductã ex A, cadere in latus C B, ad partes anguli obtuſi protractum, ideo paucis id demonſtrabimus. Sit in triangulo A B C, angulus A B C, obtu-



obtuſus, & latus C B, ad partes S B, protractum. Dico perpendicularem ex A, deductam cadere extra triangulum in latus C B, protractum, cuiuſmodi eſt recta A D. Si enim caderet intra triangulum, qualis eſt recta A E, eſſent duo anguli A B E, A E B, duobus rectis maiores, cùm ille ſit obtuſus, hic verò rectus. Quod eſt contra propoſ. 17. lib. 1. Si verò caderet extra triangulum in latus B C, productum ad partes C, qualis eſt recta A F, eſſent ruſus in triangulo A B F, duo anguli A B F, A F B, maiores duobus rectis, cùm ille ſit obtuſus, hic verò rectus. Quod eſt abſurdum.

SED & hoc theorema verum eſt.

SI in triangulo quadratum vnius lateris maius ſit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppoſitus, obtuſus erit.



IN triangulo A B C, quadratum lateris A C, maius ſit quadratis laterum A B, B C. Dico angulum B, quem latus A C, ſubtendit, eſſe obtuſum. Ducatur enim ex B, ad A B, perpendicularis B D, lineæ B C, æqualis, iungaturq; recta A D. Quoniam igitur quadratum ex A D, a æquale eſt quadratis ex A B, B D, hoc eſt, ex A B, B C: Ponitur autem quadratum ex A C, maius quadratis ex A B, B C; Erit quadratum ex A D, minus quadrato ex A C, & idcirco recta A D, minor quàm recta A C. Itaq; quia latera A B, B C, trianguli A B C, æqualia ſunt laterib. A B, B D, trianguli A B D, vtrumq; vtriq;, & baſis A C, maior eſt baſe A D: b Erit angulus A B C, maior angulo A B D: Sed A B D, rectus eſt. Igitur A B C, recto maior, & obtuſus erit. Quod eſt propoſitum.

a 47. primi.

b 25. primi.

QVIN etiam conuerſum huius propoſ. 12. demonſtrabimus: nimirum.

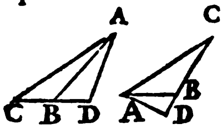
SI in triangulo quadratum vnius lateris maius ſit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenſo ſub alterutro horum laterum, & ſub exteriore linea, quam ex illo latere producto recta linea ab oppoſito angulo demiſſa abſcindit: Demiſſa hæc linea ad latus productum perpendicularis erit, & angulus propoſiti trianguli priori illi lateri oppoſitus, obtuſus.

IN triangulo A B C, ad latus C B, protractum demittatur ex opto angulo A, recta A D, ſitq; quadratum lateris A C, maius, in quadratis laterum A B, B C, rectangulo ſub C B, B D, bis comprehenſo. Dico A D, ad C D, eſſe perpendicularem, & angulum A B C, obtuſum. Si enim A D, perpendicularis non eſt, ducatur ex A, ad

xij. THEOR. 11. PROPOS. 12.

IN amblygoniis triangulis, quadratum, quod fit à latere angulum obtuſum ſubtendente, maius eſt quadratis, quæ fiunt à lateribus obtuſum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenſo & ab vno laterum, quæ ſunt circa obtuſum angulum, in quod, cùm protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab aſſumpta exteriùs linea ſub perpendiculari prope angulum obtuſum.

TRIANGVLVM ABC, habeat angulum ABC, obtuſum, & ex A, in latus CB, ad partes anguli obtuſi protractum cadat perpendicularis AD. Dico quadratum lateris AC, quod obtuſo angulo opponitur, maius eſſe quadratis laterum AB, BC, rectangulo bis comprehenſo ſub CB, BD, hoc eſt, quadratũ lateris AC, æquale eſſe duobus quadratis laterum AB, BC, vna cum rectangulo ſub CB, BD, bis comprehenſo.



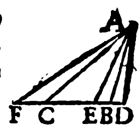
Cùm enim recta CD, diuiſa ſit in B, vtcunque *a* erit quadratum rectæ CD, æquale duobus quadratis rectarum CB, BD, & rectangulo comprehenſo bis ſub CB, BD. Addito igitur communi quadrato rectæ AD, erunt duo quadrata rectarum CD, DA, æqualia tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenſo bis ſub CB, ED: *b* Eſt autem quadratis rectarũ CD, DA, æquale quadratum rectæ AC. Quare & quadratum rectæ AC, æquale erit tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenſo bis ſub CB, BD. Cùm igitur quadratis rectarum BD, DA, *c* æquale ſit quadratum rectæ AB; erit quadratum rectæ AC, æquale quadratis rectarum CB, BA, & rectangulo comprehenſo bis ſub CB, BD. Quod eſt propoſitum. In amblygoniis ergo triangulis, quadratum, quod fit, &c. Quod erat oſtendendum.

a 4. *ſec.*
b 47. *primi.*
c 47. *primi.*

SCHOLIVM.

IAM hoc loco demonſtrauit Euclides, quantò maius ſit in triangulo amblygonio quadratum lateris angulo obtuſo oppoſiti, quadratis aliorum duorum laterum: In ſequenti autem propoſ. 13. oſtendet, quantò quadratum lateris acuto angulo oppoſiti minus ſit quadratis reliquorum duorum laterum, vt ad initium ſcholij propoſ. 47. lib. 1. monuimus.

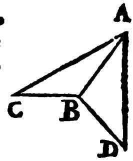
QVONIAM verò aſſumpſit Euclides, perpendicularem ductã ex A, cadere in latus CB, ad partes anguli obtuſi protractum, ideo paucis id demonſtrabimus. Sit in triangulo ABC, angulus ABC, obtu-



obtuſus, & latus C B, ad partes S B, protractum. Dico perpendicularem ex A, deductam cadere extra triangulum in latus C B, protractum, cuiuſmodi eſt recta A D. Si enim caderet intra triangulum, qualis eſt recta A E, eſſent duo anguli A B E, A E B, duobus rectis maiores, cùm ille ſit obtuſus, hic verò rectus. Quod eſt contra propoſ. 17. lib. 1. Si verò caderet extra triangulum in latus B C, productum ad partes C, qualis eſt recta A F, eſſent rurſus in triangulo A B F, duo anguli A B F, A F B, maiores duobus rectis, cùm ille ſit obtuſus, hic verò rectus. Quod eſt abſurdum.

SED & hoc theorema verum eſt.

SI in triangulo quadràtum vnius lateris maius ſit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppoſitus, obtuſus erit.



IN triangulo A B C, quadratum lateris A C, maius ſit quadratis laterum A B, B C. Dico angulum B, quem latus A C, ſubtendit, eſſe obtuſum. Ducatur enim ex B, ad A B, perpendicularis B D, lineæ B C, æqualis, iungaturq; recta A D. Quoniam igitur quadratum ex A D, a æquale eſt quadratis ex A B, B D, hoc eſt, ex A B, B C: Ponitur autem quadratum ex A C, maius quadratis ex A B, B C; Erit quadratum ex A D, minus quadrato ex A C, & idcirco recta A D, minor quàm recta A C. Itaq; quia latera A B, B C, trianguli A B C, æqualia ſunt laterib. A B, B D, trianguli A B D, vtrumq; vtriq;, & baſis A C, maior eſt baſe A D: b Erit angulus A B C, maior angulo A B D: Sed A B D, rectus eſt. Igitur A B C, recto maior, & obtuſus erit. Quod eſt propoſitum.

a 47. primi.

b 25. primi.

QVIN etiam conuerſum huius propoſ. 12. demonſtrabimus: nimirum.

SI in triangulo quadratum vnius lateris maius ſit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenſo ſub alterutro horum laterum, & ſub exteriore linea, quam ex illo latere producto recta linea ab oppoſito angulo demiſſa abſcindit: Demiſſa hæc linea ad latus productum perpendicularis erit, & angulus propoſiti trianguli priori illi lateri oppoſitus, obtuſus.

IN triangulo A B C, ad latus C B, protractum demittatur ex oppoſito angulo A, recta A D, ſitq; quadratum lateris A C, maius, quàm quadrata laterum A B, B C, rectangulo ſub C B, B D, bis comprehenſo. Dico A D, ad C D, eſſe perpendicularem, & angulum A B C, obtuſum. Si enim A D, perpendicularis non eſt, ducatur ex A, ad

C B, perpendicularis, quam dico cadere neceſſariò in C B, productam ad partes B. Cadat enim, ſi fieri poteſt, in B, ita vt A B, ſit ad C B, perpendicularis. Erit igitur a quadratum ex A C, æquale quadratis ex A B, B C, quod eſt abſurdum, cùm maius ponatur. Non cadit ergo perpendicularis ex A, in C B, demiſſa, in punctum B.

a 47 primi.

C A D A T deinde, ſi fieri poteſt, perpendicularis ex A, demiſſa, in latus B C, qualis eſt A F. Erit igitur b quadratum ex A C, æquale quadratis ex A F, F C: Ponitur autem quadratum ex A C, maius quadratis ex A B, B C. Igitur & quadrata ex A F, F C, maiora erunt quadratis ex A B, B C, quod eſt abſurdum. Sunt enim quadrata ex A B, B C, maiora quadratis ex A F, F C, quòd recta A B, recto angulo A F B, oppoſita c maior ſit quàm A F, & B C, tota maior parte F C. Perpendicularis ergo ex A, demiſſa non cadit in C B.

b 47. primi. c 19. pri.

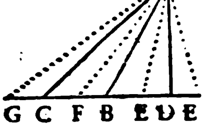
C A D A T tertiò, ſi fieri poteſt, perpendicularis ex A, ad latus B C, demiſſa in C, ita vt A C, ſit perpendicularis. Erit igitur quadratum ex A B, d æquale quadratis ex A C, C B, ac proinde quadratum ex A C, minus erit quadrato ex A B, & propterea multò minus quadratis ex A B, B C, quod eſt abſurdum, cùm ponatur maius. Perpendicularis ergo ex A, ad B C, demiſſa non cadit in C.

d 47. primi.

C A D A T quartò, ſi fieri poteſt, perpendicularis ex A, in B C, protractam ad partes C, qualis eſt A G. Quoniam igitur duo anguli A G C, A C G, e minores ſunt duobus rectis, eſtq; A G C, rectus; erit A C G, minor recto, ac proinde A C B, obtuſus. Recta ergo A B, f maior erit quàm A C, & propterea quadratum ex A C, minus erit quadrato ex A B, ac proinde multò minus quadratis ex A B, B C: ſed & maius ponitur, quod eſt abſurdum. Cùm ergo perpendicularis ex A, demiſſa ad C B, non cadat in B, neque inter C, B, neque in C, neque extra C, cadet extra B, qualis eſt A D, vt demonſtrabitur: Quare angulus A B E g acutus erit, & A B C, obtuſus. quod ſecundo loco proponitur, demonſtrandum.

e 17. pri. f 19. pri. g 17. primi.

CAETERVM angulum A B C, eſſe obtuſum, ſi quadratum rectæ A C, maius ſit quadratis rectarum A B, B C, facilius demonſtrauimus in proximo theoremate huius ſcholij. Ex quo fit (vt ad initium huius ſcholij oſtendimus) perpendicularem ex A, ad C B, demiſſam cadere extra triangulum A B C, ad partes anguli obtuſi.



QVOD autem A D, ſit ad C B, perpendicularis, ita demonſtrabimus. Si non eſt, ducatur A E, ad C B, perpendicularis cadens vltra B, vt oſtendimus. Quoniam igitur angulus A B C, oſtenſus eſt obtuſus, erit quadratum rectæ A C, maius quàm quadrata rectarum A B, B C, rectangulo bis comprehenſo ſub C B, B E: Sed & quadratum eiuſdem rectæ A C, maius ponitur, quam quadrata earundem rectarum A B, B C, rectangulo bis comprehenſo ſub C B, B D. Igitur

Digitized by Google

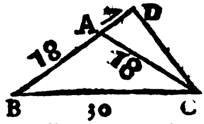
bis quadrata ex A B, B C, vna cum rectangulo ſub C B, B D, comprehenſo æqualia erunt quadratis ex A B, B C, vna cum rectangulo ſub C B, B E, bis comprehenſo: & ablatis quadratis communibus rectarum A B, B C, rectangulum bis ſub C B, B E, comprehenſum æquale erit rectangulo bis comprehenſo ſub C B, B D, ac proinde & rectangulum ſub C B, B E, ſemel comprehenſum æquale erit rectangulo ſemel ſub C B, B D, comprehenſo, & recta B E, rectæ B D, æqualis, pars toti, vel totum parti. quod eſt abſurdum. Eſt ergo A D, ad C D, perpendicularis, & nulla alia. quod eſt propoſitum.

IAM verò, quoniam neque hoc duodecimum theorema, neque ſequens 13. per numeros, quando libet, explicari poteſt, quod poſito vno latere trianguli quotlibet partium æqualium, alia latera, eorumq; partes à perpendicularibus lineis facta plerumque numeris exprimi nequeant, ſed ſint lineæ illi lateri incommenſurabiles: quod in præcedentibus propoſitionibus non accidebat, quippe cum, poſita diuiſa recta linea quotlibet partium æqualium, eius partes ſtatus poſſint pro libito ei commenſurabiles, vt in exemplis numerorum adhibitis factum eſt, præſcribemus regulas quaſdam, quibus Geometricè triangula amblygonia, atque oxygonia (quotquot quis optauerit) conſtituantur eiuſmodi, vt omnia latera, parteſq; eorum à lineis perpendicularibus facta ſint lineæ commenſurabiles: atq; adeò veritas vtriuſq; theorematis in numeris quoque appareat. Hic autem de amblygonijs triangulis agemus, & in ſcholio ſequentis propoſitionis de Oxygonijs. Quoniam autem amblygonium triangulum eſt vel Iſoſceles, in quo tertium latus ſemper a maius eſt, quod obtuſo angulo opponatur, vel ſcalenum (æquilaterum enim eſſe non poteſt, vt ad definitionem 27. lib. 1. diximus) & in ſcaleno linea perpendicularis cadit vel in minimum latus productum, vel in medium, proponemus tres regulas. Prima exhibebimus triangulum amblygonium Iſoſceles laterum commenſurabilium, in quo etiam ſegmentum vtriuslibet laterum æqualium producti inter perpendicularem, & angulum obtuſum eiſdem lateribus commenſurabile ſit. Secunda conſtituemus triangulum amblygonium ſcalenum laterum etiam commenſurabilium, & in quo ſegmentum minimi lateris producti inter perpendicularem, & angulum obtuſum lateribus eiſdem ſit commenſurabile. Tertia denique triangulum amblygonium ſcalenum proponemus commenſurabilium laterum, & in quo ſegmentum lateris medij producti inter lineam perpendicularem, & obtuſum angulum eiſdem lateribus commenſurabile exiſtat. a 19. pri.

REGVLA I.

AD conſtruendum triangulum amblygonium Iſoſceles laterum commenſurabilium, in quo ſegmentum exterius alterius laterum æqualium producti inter perpendicularem lineam, & angulum obtuſum, eiſdem lateribus quoq; ſit commenſurabile; ſtatuatur ſegmen-

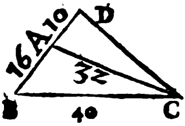
tum exterius tot partium æqualium, vt earum numerus à 7. numeretur, vt 7. vel 14. vel 21. vel 28. &c. Deinde vtrumuis laterum æqualium ponatur dicti ſegmenti duplum ſuperquadrupartiens ſeptimas, maximum autem obtuſo angulo oppoſitum eiuſdem ſegmenti quadruplum ſuperbipartiens ſeptimas. Vt in triangulo A B C, ducta ſit C D, ad B A, latus productum. Si igitur A D, conſtituatur partium 7. & vtrumuis laterum A B, A C, partium 18. qui numerus habetur, ſi duplicaueris 7. addiderísque $\frac{4}{7}$ ipſius. Latus verò B C,



partium 30. quem numerum habebis, ſi quadruplicaueris 7. adiunxeriſq; $\frac{2}{7}$ ipſius; erit triangulum A B C, quod quæritur. In hoc enim triangulo quadratum lateris B C, eſt 900. cui æqualia ſunt quadrata laterum A B, A C, nempe 324. 324. vna cum rectangulo bis comprehenſo ſub A B, A D, hoc eſt, cum 126. 126. Hæc enim conficiunt quoque ſummam 900. Quam ob rem, vt in hoc ſcholio oſtendimus, erit ducta C D, ad B D, perpendicularis, & angulus B A C, obtuſus. Quod ſi ſingulos numeros huius trianguli per quemlibet numerum multiplices, procreabis alias lineas trianguli commenſurabiles, prioribus tamen proportionales. Vt ſi inuentos numeros duplices, efficies A D, 14. & tam A B, quàm A C, 36. at B C, 60. Propoſitum quoq; triangulum reperies, ſtatuendo ſegmentum exterius A D, quotcunq; partium, etiamſi à 7. non numerentur: ſed tunc latera erunt numeri integri cum fractionibus. Idem deniq; triangulum oſtendes, ſtatuendo latus quodcunque, à quo incipere vis, quotlibet partium, dummodò maximum fiat ſegmenti A D, quadruplum ſuperbipartiens ſeptimas, vtrumuis autem æqualium ſit eiuſdem ſegmenti duplum ſuperquadrupartiens ſeptimas.

REGVLA II.

VT efficiatur triangulum amblygonium Scalenum laterum commenſurabilium, in quo perpendicularis cadens in minimum latus productum faciat ſegmentum exterius commenſurabile etiam lateribus: ſtatuatur exterius ſegmentum quotuis partium æqualium à 5. numeratarum, vt 5 vel 10. vel 15. vel 20. &c. Quibus ſi addas $\frac{3}{5}$ habebis minimum latus. Si verò eaſdem partes dicti ſegmenti triplices, addaſq; $\frac{1}{5}$ vel ſi partes minimi lateris inuentas duplices, efficies medium latus. Si denique partes eaſdem dicti ſegmenti quadruplices, reperies latus maximum. Vt ſi in appoſito triangulo ſegmentum A D, conſtituatur 10. erit A B, 16. A C, 32. & B C, 40. Vbi



etiam vides, quadrato lateris B C, quod eſt 1600. æqualia eſſe quadrata laterum A B, A C, nimirum 256. 1024. vna cum rectangulo bis ſub A B, A D, comprehenſo, id eſt, cum 160. 160.

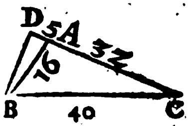
Ex quo

Digitized by Google

Ex quo fit, CD, eſſe ad BD, perpendicularem, & angulum BAC, obtuſum, vt ſuprà in hoc ſcholio oſtendimus. Iam ſi ſingulos numeros inuentos multiplices per quemuis numerum, gignentur alij numeri illis proportionales, qui idem præſtabunt. Vt ſi eos duplices, erit latus AB, 32. AC, 64. & BC, 80. qui quidem numeri reperientur eadem arte, ſi exterius ſegmentum AD ſtatuas partium 20. quæ duplam quoque proportionem habent ad priores partes 10. Sic ſi eoſdem numeros triplices, efficies ſegmentum exterius AD, partium 30. latus AB, 48. AC, 96. BC, 120. & ſic deinceps.

REGVLA III.

PRO triangulo amblygonio Scalene commenſurabilium laterum, in quo perpendicularis linea in medium latus productum cadens efficiat quoque ſegmentum lateribus trianguli commenſurabile; accipiatur rurſum exterius ſegmentum quotlibet partium à 5. numeratarum, vt in præcedenti regula. Quas ſi triplices, addasq́; $\frac{1}{5}$ produces minimum latus: Si vero eaſdem multiplices per 6. adiungasq́; $\frac{2}{5}$ habebis latus medium: Si denique eaſdem per 8. multiplices, produces maximum latus. Vt ſi in triangulo propoſito ſegmentum AD, fiat partium 5. erit AB, 16. AC, 32. & BC, 40. Atque ita quadrato lateris BC, nimirum 1600. æqualia exiſtent quadrata laterum AB, AC, nempe 256. 1024. vna cum rectangulo bis comprehenſo ſub AC, AD, hoc eſt, cum 160. 160. Ac proinde BD, ad CD, erit perpendicularis, angulusq́; BAC, obtuſus, vt in hoc ſcholio ſuprà demonſtrauimus.



Quòd ſi numeros inuentos per quemuis numerum multiplices, inuenies alios numeros laterum illis proportionales, in quibus eadem hæc propoſ. 12. examinabitur. Vt ſi eos quadruplices, efficies ſegmentum exterius AD, partium 20. latus AB, 64. AC, 128. & BC, 160. Si verò eoſdem illos priores numeros per 10. multiplices, erit ſegmentum exterius AD, 50. latus AB, 160. AC, 320. & BC, 400. Atque ita in infinitum.

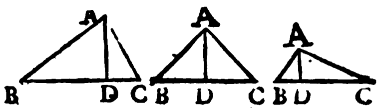
CAVE autem, exiſtimes, poſito latere aliquo trianguli amblygonij, vel ſegmento exteriori, quotlibet partium æqualium, alia latera cum illo ſeruare neceſſario proportiones illas, quas in regulis prædictis explicauimus: adeò vt cognito vno, reliqua etiam cognoſcantur. Hoc enim falſum eſt, cùm illa variari poſſint mille modis, & alias atque alias proportiones habere. Itaque ex tribus præſcriptis regulis ſolùm colligendum erit, ex lineis rectis, quæ dictas proportiones ſeruent, conſtitui poſſe triangulum amblygonium, vna cum ſegmento exteriore, in quo veritas propoſitionis 12. poſſit examinari.

Digitized by Google

xiij. THEOR. 12. PROPOS. 13.

IN oxygoniis triangulis, quadratum à latere angulum acutum ſubtendente minus eſt quadratis, quę fiunt à lateribus acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenſo, & ab vno laterum, quæ ſunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab aſſumpta interius linea ſub perpendiculari prope acutum angulum.

SINT omnes anguli trianguli A B C, acuti, & ex A, perpendicularis A D, demiſſa cadat in latus B C. Dico quadratum lateris A B, quod acuto angulo A C B, opponitur, minus eſſe quadratis laterum A C, C B, circa angulum acutum dictum, rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, hoc eſt, quadratum lateris A B, vna cum rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, æquale eſſe duobus quadratis laterum A C, C B. Cùm enim recta B C, diuiſa ſit in D, vtcunque, erũt quadrata rectarũ B C, C D,



a 7. ſec. a æqualia rectangulo comprehenſo bis ſub B C, C D, & quadrato rectæ B D. Addito ergo communi quadrato rectæ D A, erunt tria quadrata rectarum B C, C D, D A, æqualia rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, & duobus quadratis rectarum B D, D A:

b 47. primi. Duobus autem quadratis rectarum C D, D A, b æquale eſt quadratum rectæ C A. Duo igitur quadrata rectarum B C, C A, æqualia ſunt rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, & duobus quadratis rectarum B D, D A. Cum ergo duobus quadratis rectarum

c 47. primi. B D, D A, c æquale ſit quadratum rectæ A B; erunt duo quadrata rectarum B C, C A, æqualia rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, & quadrato rectæ A B, quod eſt propoſitum. Eodem modo oſtendetur, quadrata rectarum A B, B C, æqualia eſſe rectangulo bis comprehenſo ſub C B, B D, & quadrato rectæ A C, hoc eſt, quadratum lateris A C, minus eſſe quadratis laterum A B, B C, rectangulo comprehenſo bis ſub C B, B D. In oxygoniis ergo triangulis, quadratum à latere, &c. Quod demonſtrandum erat.

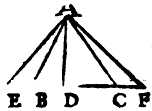
SCHOLIVM.

ITAQVE ex tribus propoſitionibus, nempe 47. lib. 1. & 12. atq; 13. huius lib. cognoſcimus, quantum ſit quadratum cuiuſuis lateris trianguli cum quadratis aliorum duorum laterum comparatum, nempe an ſit illis æquale, an maius, minúsve, & quanto maius ſit, aut minus, prout videlicet angulus aſſumpto lateri oppoſitus fuerit rectus, vel obtuſus, aut acutus.

QVAM-

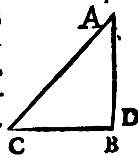
Digitized by Google

QVAMVIS autem Euclides theorema hoc proponat de triangulis duntaxat oxygonijs, quæ ſcilicet omnes angulos habent acutos; idem tamen verum etiam eſt in triangulis rectangulis, & amblygonijs, vt conſtat ex poſterioribus duobus triangulis in ſchemate propoſitis. Sunt enim in hiſce triangulis neceſſario duo reliqui anguli acuti, vt perſpicuè colligi poteſt ex propoſ. 17. vel 32. primi lib. Hoc ſolùm obſeruandum eſt in triangulis rectangulis, & amblygonijs, perpendicularem duci debere ab angulo recto, vel obtuſo, in oxygonijs verò à quolibet. Ita enim ſemper cadet perpendicularis intra triangulum, vt Euclides in demonſtratione aſſumpſit. Quod quidem facilè demonſtrabitur hac ratione. Sint in triangulo A B C, duo anguli A B C, A C B, acuti; angulus verò B A C, rectus, vel obtuſus, acutúſve. Dico perpendicularem ex A, demiſſam cadere intra triangulum. Si enim caderet extra in C B, protractam ad partes B, cuiuſmodi eſt recta A E, eſſet in triangulo A B E, angulus exterior A B C, acutus, a maior interno & oppoſito recto A E B, quod eſt abſurdum. Si vero caderet extra B C, productam ad partes C, qualis eſt recta A F, in idem incideremus abſurdum, vt manifeſtum eſt. a 16. pri.



IDEM hoc theorema in triangulis rectangulis, & obtuſangulis demonſtrat Federicus Commandinus, etiamſi perpendicularis A D, non cadat in latus B C, ſed vel eadem ſit, quæ latus A B, vt in rectangulis, vel extra triangulum cadat, vt in obtuſangulis accidit, ceu in ſcholio propoſ. præcedentis demonſtrauimus: quòd tum demum accidet, cùm perpendicularis non ab angulo recto, vel obtuſo, ſed ab altero acutorum demittitur.

SIT triangulum rectangulum A B C, cuius angulus B, ſit rectus; & ex angulo A, acuto ad B C, perpendicularis ducatur A D, quæ eadem erit, quæ latus A B, propter angulum rectum B. Dico quadratum lateris A B, acutum angulum C, ſubtendentis, minus eſſe, quàm quadrata laterum A C, C B, rectangulo bis comprehenſo ſub latere C B, in quod perpendicularis cadit, & ſub linea C D, quæ interijcitur inter perpendicularem A D, & acutum angulum C. Cùm enim quadrata ex A B, C B, b æqualia ſint quadrato ex A C; addito communi quadrato ex C B, erunt tria quadrata, nempe quod ex A B, & duplum eius, quod ex C B, æqualia duobus quadratis ex A C, C B: At quadratum ex C B, idem eſt, quod rectangulum ſub C B, C D. Igitur & quadratum ex A B, vna cum rectangulo bis ſub C B, C D, æquale eſt quadratis ex A C, C B; Ac proinde quadratum ex A B, minus eſt, quàm quadrata ex A C, C B, rectangulo bis ſub C B, C D. Quod eſt propoſitum. b 47. primi.

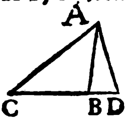


RVRSVS ſit triangulum obtuſangulum A B C, cuius angulus

Digitized by Google

B, obtuſus; & ex angulo acuto A, ad B C, perpendicularis ducatur A D, extra triangulum cadens. Dico quadratum lateris A B, acutum angulum C, ſubtendentis minus eſſe, quàm quadrata laterum A C, C B, rectangulo comprehenſo bis ſub C B, & C D. Quoniam enim quadrata ex A D, C D, a æqualia ſunt quadrato ex A C; addito quadrato ex C B, communi, erunt tria quadrata ex A D, C D, C B, æqualia duobus quadratis ex A C, C B: At quadratum ex C D, b æquale eſt quadratis ex C B, B D; & rectangulo bis ſub C B, B D.

a 47. primi.



b 4. ſec.

Igitur & duo quadrata ex A D, C B, vna cum quadratis ex C B, B D, & rectangulo bis ſub C B, B D, æqualia ſunt quadratis ex A C, C B: Sunt autem quadrata ex A D, B D, æqualia c quadrato ex A B. Quare quadratum quoque ex A B, & duplum quadrati ex C B, vna cum rectangulo bis ſub C B, B D, æqualia ſunt quadratis ex A C, C B. Atqui quadrato ex C B, vna cum rectangulo ſub C B, B D, d æquale eſt rectangulum ſub C D, C B. Ac propterea duplo quadrati ex C B, vna cum rectangulo bis ſub C B, B D; æquale eſt rectangulum bis ſub C D, C B. Igitur & quadratum ex A B, vna cum rectangulo bis ſub C B, C D; æquale eſt quadratis ex A C, C B. Ac proinde quadratum ex A B, minus eſt, quàm quadrata ex A C, C B, rectangulo bis ſub C B, C D. Quod eſt propoſitum.

c 47. primi. d 3. ſec.

ALITER, & breuius. Quoniam quadratum ex A C, maius e eſt, quàm quadrata ex A B, B C, rectangulo bis ſub C B, B D, comprehenſo, hoc eſt, quadratum ex A C, æquale eſt quadratis ex A B, B C, vna cum rectangulo ſub C B, B D, bis comprehenſo; erit quadratum ex A B, minus, quàm quadratum ex A C, quadrato ex B C, & rectangulo ſub C B, B D, bis: Ac proinde ſi quadrato ex A C, addatur quadratum ex B C, erit quadratum ex A B, minus quàm quadrata ex A C, B C, quadrato ex B C, bis ſumpto, & rectangulo bis ſub C B, B D, comprehenſo. Cùm ergo quadrato ex B C, vna cum rectangulo ſub C B, B D, contento, f æquale ſit rectangulum ſub C B, C D, contentum; erit quoque quadratum ex A B, minus quam quadrata ex A C, C B, rectangulo comprehenſo bis ſub C B, C D. Quod eſt propoſitum.

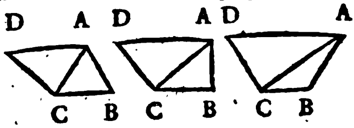
e 12. ſec. f 3. ſec.

IN ſcholio quodam antiquo demonſtratur ſequens theorema, inſtar illius, quod nos in ſcholio præcedentis propoſ. ſecundo loco demonſtrauimus. Videlicet.

SI in triangulo quadratum vnius lateris minus ſit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppoſitus, acutus erit.

IN triangulo A B C, quadratum lateris A B, minus ſit, quam quadrata laterum A C, C B. Dico angulum C, quem dictum latus ſubten-

ſubtendit, eſſe acutum. Ducatur enim ex C, ad A C, perpendicularis

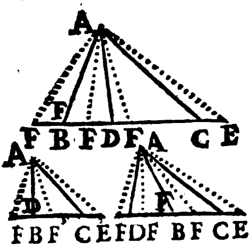


C D, linea C B, æqualis, iungaturque recta A D. Quoniam igitur quadratum ex A D, a æquale eſt quadratis ex A C, C D, hoc eſt, ex a 47. primi.
A C, C B: Ponitur autem quadratum ex A B, minus quadratis ex
A C, C B; Erit quadratum ex A D, maius quadrato ex A B; & ideo
recta A D, maior quam recta A B. Itaque quia duo latera A C, C D,
trianguli A C D, æqualia ſunt duobus lateribus A C, C B, trianguli
A C B, vtrumque vtrique, & baſis A D, maior baſe A B; b Erit an- a 25. primi.
gulus A C D. maior angulo A C B: Sed A C D, rectus eſt, ex conſtru-
ctione. Ergo A C B, recto minor, & acutus erit.

SED & conuerſum huius propoſ. 13. oſtendemus, nimirum.

SI in triangulo quadratum vnius lateris minus ſit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenſo ſub alterutro horum laterum, & ſub recta linea inter angulum priori lateri oppoſitum, & rectam lineam ab angulo alteri illi lateri oppoſito demiſſam: Linea hæc demiſſa ad alterum illud latus perpendicularis erit, & angulus propoſiti trianguli priori illi lateri oppoſitus, acutus.

IN triangulo A B C, ad latus B C, demittatur ex angulo oppoſito A, recta A D; ſitque quadratum lateris A B, minus quam quadrata laterum A C, C B, rectangulo ſub B C, C D, bis comprehenſo. Dico A D, eſſe perpendicularem ad B C, & angulum A C B, acutũ. Si namque A D, perpendicularis non eſt, ducatur ex A, ad B C, perpendicularis, quã dico neceſſario cadere citra punctum C, verſus B, hoc eſt, vel in latus B C, vel in punctum B, vel in latus B C, verſus B, productum. Cadat enim, ſi fieri poteſt, in C, ita vt A C, ſit ad B C, perpendicularis. Erit igitur c quadratum ex A B, æquale quadratis ex A C, C B. quod eſt abſurdum, cum minus ponatur. Non cadit ergo perpendicularis ex A, deducta ad B C, in punctum C.



b 47. primi.

CADAT deinde, ſi fieri poteſt, perpendicularis ex A, demiſſa d 47 primi.
vltra C, in E, qualis eſt A E. Erit igitur d quadratum ex A B, æquale
quadratis ex A E, E B: Ponitur autem quadratum ex A B, minus
quadratis ex A C, C B. Igitur & quadrata ex A E, E B, minora

erunt

a 47 pri erunt quadratis ex A C, C B. Cum ergo quadratum ex A C, a æquale mi. ſit quadratis ex A E, E C; erunt quoque quadrata ex A E, E B, minora quadratis ex A E, E C, C B: Et ablato communi quadrato rectæ A E, erit reliquum quadratum ex E B, minus quoque quadratis ex E C, C B. quod eſt abſurdum. Cum enim quadratum ex E B,
b 4. ſec. b æquale ſit quadratis ex E C, C B, vna cum rectangulo bis comprehenſo ſub E C, C B, maius erit quadratum ex E B, quadratis ex E C, C B. Non ergo perpendicularis cadit vltra C: Sed neque in C, cadit, vt oſtendimus. Igitur cadet citra punctum C, qualis eſt A D, vt de-
c 17. pri monſtrabitur, ac propterea c angulus A C B, acutus erit. Quod ſe-mi. cundo loco proponitur demonſtrandum.

CÆTERVM angulum A C B, eſſe acutum, ſi quadratum rectæ A B, minus ſit quadratis rectarum A C, C B, facilius demonſtrauimus in proxime antecedente theoremate huius ſcholij. Ex quo fit, (quemadmodum in coroll. 2. propoſ. 17. lib. 1. oſtenſum eſt) perpendicularem ex A, ad B C, demiſſam cadere citra angulum A C B, acutum verſus B.

QVOD autem A D, ſit ad B C, perpendicularis, ita oſtendemus. Si non eſt, ſit A F, ad B C, perpendicularis, cadens citra punctum C, vt probatum eſt, vbicunque hoc contingat, ſiue intra triangulum, ſiue in punctum B, ſiue extra triangulum. (In ſecundo tantum triangulo non dicet aduerſarius, perpendicularem cadere in B; quia eadem eſſet, quæ A D. quod ille negat) Quia ergo angulus A C B, oſtenſus fuit
d 13. ſec. acutus, d erit quadratum ex A B, minus, quam quadrata ex A C, C B, rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C F, hoc eſt, quadratum ex A B, vna cum rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C F, æquale eſt quadratis ex A C, C B: Ponitur autem quadratum idem ex A B, minus quoque, quam quadrata ex A C, C B, rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, hoc eſt, quadratum idem ex A B, vna cum rectangulo bis contento ſub B C, C D, æquale ponitur quadratis ex A C, C B. Igitur quadratum ex A B, vna cum rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, æquale erit quadrato eidem ex A B, vna cum rectangulo comprehenſo bis ſub B C, C F: Et ablato communi quadrato rectæ A B, rectangulum ſub B C, C D, bis comprehenſum æquale erit rectangulo bis ſub B C, C F, comprehenſo: ac proinde & rectangulum ſemel comprehenſum ſub B C, C D, æquale erit rectangulo ſemel comprehenſo ſub B C, C F, ideoque & recta C D, C F, æquales erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Eſt igitur A D, ad B C, perpendicularis, & non alia. Quod eſt propoſitum.

QVEMADMODVM autem in ſcholio ſuperioris propoſitionis triangula amblygonia conſtruximus laterum, & linearum commenſurabilium, in quibus per numeros veritas propoſitionis 12. examinari poſſit, ita hoc loco oxygonia triangula conſtituemus laterum, atque linearum commenſurabilium, in quibus huius 13. propoſ. veritas ex-

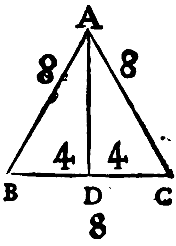
tas ex-

Digitized by Google

tas explicetur. Quia verò triangulum oxygonium eſt vel æquilaterum, vel Iſoſceles, vel Scalenum; complectemur totam hanc doctrinam ſeptem regulis. Prima de triangulo æquilatero oxygonio aget. Secunda de Iſoſcele, in quo perpendicularis cadit in tertium latus inæquale, ſiue maius illud ſit, ſiue minus vtrouis æqualium. Tertia de Iſoſcele, cuius tertium latus maius eſt, perpendicularisq́ in alterutrum æqualium laterum cadit. Quarta de Iſoſcele, cuius latus tertium minus eſt, & perpendicularis rurſus in alterutrum laterum æqualium cadit. Quinta de Scaleno, in quo perpendicularis cadit in minimum latus. Sexta de Scaleno, in quo perpendicularis in medium latus demittitur. Septima denique de Scaleno, in quo ad maximum latus perpendicularis ducitur. Loquor autem hic de illis etiam triangulis, in quibus perpendicularis linea cadit intra triangulum, ac proinde duo anguli ſupra baſin ſunt acuti, ſiue oppoſitus angulus acutus etiam ſit, ſiue non. De his enim propoſitio etiam intelligenda eſt, vt diximus. Quo pacto autem triangula, in quibus linea perpendicularis cadit vel extra ipſa, vel cum vno laterum coincidit, numeris quoque poſſint accommodari, docebimus ad finem regularum.

REGVLA I.

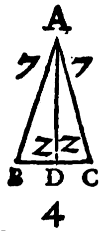
SI quodlibet latus trianguli æquilateri ſtatuatur quotuis partium æqualium, numero tamen parium, vt fractiones vitentur, erunt omnia latera & inter ſe, & ſegmentis à linea perpendiculari factis commenſurabilia. Vt in triangulo æquilatero A B C, diuidet perpendicularis A D, oppoſitum latus BC, bifariam, vt in ſcholio propoſ. 26. lib. 1. demonſtrauimus. Quam ob rem poſito quolibet latere 8. erunt ſegmenta B D, C D. 4. 4. Vbi vides quadratum lateris A B, angulo acuto C, oppoſiti, (omnes enim anguli in triangulo æquilatero acuti ſunt, ex corol. 3. propoſ. 17. lib. 1.) hoc eſt, 64. vna cum rectangulo bis contento ſub B C, C D, id eſt, cum 32. 32. efficere 128. quantum videlicet conficiunt duo quadrata laterum A C, C B, nempe 64. 64.

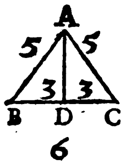


REGVLA II.

SI vtrumq́ laterum æqualium trianguli Iſoſcelis ſtatuatur quotcunque partium æqualium, tertium autem quotlibet partium numero parium, vt fractiones vitentur, ſiue pauciores partes in hoc latere ponantur, quam in vtrolibet æqualium, ſiue plures, dummodo tot non ſint, quot in vtroque ſimul, aut plures; quia ſic non poſſet fieri triangulum, propterea quod duo latera æqualia non eſſent maiora tertio latere, ſed vel æqualia, vel minora, quod pro-

poſitioni

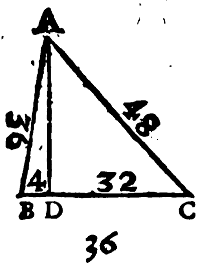




poſitioni 20. lib. 1. repugnat. Si inquam latera hoc modo numeris exponantur, erunt omnes lineæ trianguli inter ſe commenſurabiles. Vt in priori horum Iſoſcelium vtrumuis latus A B, A C, ſtatuatur 7. & B C, 4. In poſteriori autem vtrumlibet A B, A C, 5. & B C, 6. Cum ergo perpendicularis A D, diuidat baſim B C, bifariam, ex ſcholio propoſ. 26. lib. 1. erunt ſegmenta B D, C D, in priori quidem triangulo 2. 2. in poſteriori verò 3. 3. Vbi etiam perſpicuum eſt, quadratum lateris A B, angulo acuto C, oppoſiti, (vterque enim angulus B, C, acutus eſt, ex coroll. 3. propoſ. 17. lib. 1.) vna cum rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, æqualo eſſe quadratis ſimul laterum A C, C B. &c.

REGVLA III.

IN triangulo Iſoſcele, in quo tertium latus maius eſt, & perpendicularis in alterum æqualium laterum cadit, erit ſegmentum prope maius latus tertium, maius, vt ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus. Si igitur minus ſegmentum ſtatuas quotuis partium, eaſq; per 8. multiplices, habebis ſegmentum maius: Si verò eaſdem ducas in 12. efficies tertium latus: Duo denique ſegmenta ſimul addita conflabunt vtrumque laterum æqualium; quod etiam produces ex multiplicatione minoris ſegmenti per 9. Vt ſi in Iſoſcele A B C, ſegmentum minus B D, ponatur 4. erit maius C D, 32. latus verò A C, 48. & vtrumque latus A B, B C, 36. 36. Quadratum igitur lateris A B, angulo acuto C, oppoſiti, nempe 1296. vna cum eo, quod fit bis ex B C, in C D, id eſt, cum 1152. 1152. conficit 3600. quantum nimirum efficiunt duo quadrata ex A C, C B, nempe 2304. 1296. Ita quoque quadratum ex A C, nimirum 2304. vna cum eo, quod bis fit ex C B, in B D, hoc eſt, cum 144. 144. facit 2592. qui numerus etiam conficitur ex quadratis laterum A B, B C, nimirum ex 1296. 1296. In huiuſmodi ergo triangulo ſegmenta inæqualia proportionem habent octuplam: vtrumuis verò æqualium laterum ad minus ſegmentum proportionem habet noncuplam: Tertium denique latus maius ad idem ſegmentum minus habet proportionem duodecuplam.



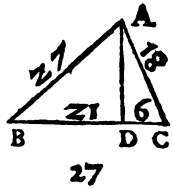
REGVLA IV.

IN triangulo Iſoſcele, cuius tertium latus minus eſt, & perpendicularis rurſum in alterum æqualium laterum cadit, erit ſegmentum prope minus latus tertium, minus, vt ad propoſ. 47. lib. 1. oſtenſum eſt.

Quod

Digitized by Google

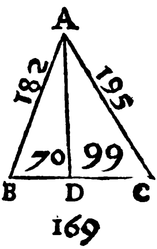
Quod ſegmentum ſi ſtatuas quotuis partium numero parium, vt fractiones fugiantur, eaſq; per 3. multiplices, & producto earundem medietatem adiicias, vel earum medietatem per 7. multiplices, produces maius ſegmentum: Si verò eaſdem partes minoris ſegmenti multiplices per 3. efficies tertium latus minus. Vtrumque deniq; æqualium laterum componetur ex duobus ſegmentis: quod etiam ex multiplicatione medietatis minoris ſegmenti per 9. producetur. Vt ſi in Iſoſcele ABC, minus ſegmentum CD, ponatur 6. erit maius BD, 21. & latus AC, 18. atque tam AB, quàm BC, 27.



Quadratum ergo lateris AB, anguli acuto C, oppoſiti, nimirum 729. vna cum eo, quo fit bis ex BC, in CD, id eſt, cum 162. 162. efficit 1053. qui numerus etiam componitur ex quadratis laterum AC, CB, nempe ex 324. 729. &c.

REGVLA V.

IN Scaleno triangulo, in quo perpendicularis in minimum latus demittitur, erit ſegmentum baſis iuxta medium latus, minus, vt ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtratum eſt. Quod ſegmentum ſi conſtituatur tot partium æqualium, vt à 70. numerentur, nimirum partium 70. vel 140, vel 210. &c. eiſq; addantur earum $\frac{19}{70}$ confectum erit ſegmentum maius, & ex additione partium horum ſegmentorum gignetur minimum latus. Si verò partes minoris ſegmenti duplicentur, & producto adiiciantur $\frac{42}{70}$ hoc eſt, $\frac{1}{5}$ earundem partium, procreabitur medium latus. Si denique partes eiuſdem minoris ſegmenti duplicentur, productoq; $\frac{55}{70}$ id eſt, $\frac{11}{14}$ earundem addantur, componetur latus maximum.

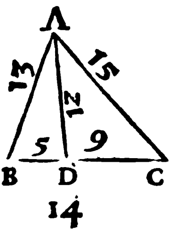


Vt in ſcaleno ABC, ſi minus ſegmentum BD, ponatur 70. erit maius CD, 99. & totum minimum latus BC, 169. Medium autem latus AB, 182. & maximum AC, 195. Quadratum ergo lateris AB, acuto angulo C, oppoſiti, hoc eſt, 33124. vna cum numero, qui bis fit ex BC, in CD, id eſt, cum 16731. 16731. conficit numerum 66586. æqualem duobus ſimul quadratis 38025. 28561. laterum AC, CB, &c.

REGVLA VI.

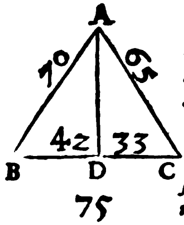
IN triangulo Scaleno, quando perpendicularis in medium latus cadit, erit ex iis, quæ ad propoſ. 47. lib. 1. oſtendimus, minus ſegmentum minimo lateri adiacens. Quod ſegmentum ſi ſtatuatur tot æqualium partium, vt à 5. numerentur, vt 5. vel 10. vel 15. &c. eiſq; adiantur

Digitized by Google



dantur $\frac{4}{5}$. confectum erit ſegmentum maius, & partes horum ſegmentorum in vnam ſummam collecta component medium latus. Si autem partibus minoris ſegmenti duplicatis adiiciantur earundem $\frac{3}{5}$. producetur minimum latus. Triplum denique earundem partium minoris ſegmenti dabit latus maximum. Vt in Scaleno A B C, ſi minus ſegmentum B D, fiat 5. erit ſegmentum maius C D, 9. & totum latus B C, medium, 14. Minimum verò A B, 13. & maximum A C, 15. &c.

REGVLA VII.



IN Scaleno denique triangulo, vbi perpendicularis ad maximum latus deducitur, erit minus ſegmentum iuxta latus minimum, ex iis, quæ ad propoſ. 47. lib. 1. ſcripſimus. Si ergo pro minori ſegmento ſumantur 33. vel quiuis alius numerus à 33. numeratus, vt 66. vel 99. &c. eiq; addantur $\frac{9}{33}$. hoc eſt, $\frac{3}{11}$. fiet maius ſegmentum: quæ duo ſegmenta ſimul compoſita maximum latus efficerent. Si verò numero minoris ſegmenti duplicato adiiciantur $\frac{4}{33}$. producetur medium latus. Si deniq; eidem minori ſegmento apponantur $\frac{32}{33}$. exhibebitur minimum latus. Vt ſi in Scaleno A B C, minus ſegmentum C D, ſit 33. erit maius ſegmentum B D, 42. totumque latus maximum B C, 75. & medium A B, 70. & minimum A C, 65. &c.

QVOD ſi ſingulos numeros harum regularum per eundem numerum aliquem, quicunque is ſit, multiplices, procreabis alios numeros lateribus triangulorum tribuendos. Iidem etiam numeri reperientur, ſi minus ſegmentum, vel maius, vel quodcunq; latus ſtatuatur quotlibet partium; ſi modo proportiones ſeruentur, quas ſupradictis regulis expreſſimus.

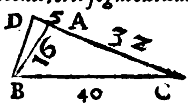
HIC quoque ſciendum eſt, non in omni triangulo oxygonio proportiones præſcriptas reperiri inter latera, cum mille modis poſſint variari eorum proportiones. Neque verò hoc regulæ illa docent, ſed vſus earum in eo ſolum conſiſtit, vt ſeruatis illis proportionibus, quas explicauimus, triangula oxygonia formari poſſint, in quibus propoſitio 13. huius lib. 2. ad numeros accommodetur.

IAM verò ſi perpendicularis coincidat cum illo latere, cuius quadratum probandum eſt minus eſſe duobus quadratis alterum duorum laterum, &c. Ita vt triangulum propoſitum ſit rectangulum, quærendi ſunt tres numeri pro lateribus, ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 47.

Digitized by Google

poſ. 47. lib. 1. ſcripſimus. Vt in figura regulæ 6. ſi in triangulo A B D, minimum latus B D, ponatur 5. erit A D, 12. & A B, 13. Vbi cernis quadratum lateris A D, acuto angulo B, oppoſiti, nempe 144. vna cum eo, quod fit bis ex B D, in B D, hoc eſt, cum 25. 25 efficere 194. quantum videlicet conficiunt duo quadrata ſimul ex A B, B D, nimirum 169. 25. Eadem ratione, ſi minimum latus B D, ſtatuatur partium 6. erit A D, 8. & A B, 10. Vbi etiam vides quadratum lateris A D, acuto angulo B, ſubtenſi, nimirum 64. vna cum eo, quod fit ex B D, in B D, hoc eſt, cum 36. 36. conficere 136. quem numerum etiam conficiunt duo numeri quadrati laterum A B, B D, nimirum 100. 36. Ita quoque cernis, quadratum numerum lateris B D, acuto angulo A, oppoſiti, hoc eſt, 36. vna cum eo quod fit ex A D, in A D, bis, id eſt, cum 64. 64. efficere 164. quantum ſcilicet conficiunt duo numeri quadrati ſimul laterum A B, A D, nimirum 100. & 64. Denique ſi in alio triangulo A C D, minimum latus C D, ponas 6. reperies ex iis, quæ ad propoſ. 47. lib. 1. ſcripſimus, A D, 40. & A C. 41. Vbi manifeſtum eſt, quadratum numerum lateris A D, angulo acuto oppoſiti, nimirum 1600. vna cum numero, qui fit ex C D, in C D, bis, id eſt, cum 81. 81. facere 1762. qui numerus æqualis eſt quadratis numeris duorum laterum A C, C D, hoc eſt, duobus numeris 1681 81. Hi enim conficiunt quoque ſummam 1762. Quod ſi minimum latus C D, facias 7. comperies A D, 24. & A C, 25. in quibus numeris idem experieris. Nam quadratus numerus lateris C D, angulo acuto A, ſubtenſi, id eſt, 49. vna cum numero, qui bis producitur ex A D, in A D, hoc eſt, cum 576. 576. facit 1201. quantum ſcilicet efficiunt duo quadrati numeri laterum A C, A D, hoc eſt, 625. 576.

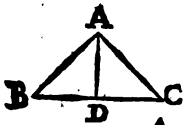
AT ſi perpendicularis cadat extra triangulum, ita vt triangulum ſit obtuſangulum, quærendum erit ſegmentum exterius, vna cum lateribus, vt in tribus regulis ſcholij præcedentis propoſitionis docuimus. Segmentum namque exterius cum latere producto, dabit totum ſegmentum inter acutum angulum aſſumptum & perpendicularem. Vt in figura regulæ 3. ſcholij antecedentis propoſitionis, erit ſegmentum totum C D, inter angulum acutum C, & perpendicularem B D, cadentem extra triangulum, 37. Vbi perſpicuum eſt, quadratum lateris A B, angulo C, acuto oppoſiti, hoc eſt, 256.

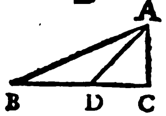


vna cum rectangulo ſub A C, C D, comprehenſo bis, id eſt, cum 1184. 1184. componere numerum 2624. qui æqualis eſt duobus quadratis ſimul laterum B C, A C, nimirum aggregato quadratorum numerorum 1600. 1024. &c.

NEQVE verò alienum putaui hoc loco ex Pappo Alexandrino ſequens etiam theorema demonſtrare.

SI in triangulo à quouis angulo recta linea ducatur, diuidens latus oppoſitum bifariam, erunt duo quadrata laterum eum angulum ambientium ſimul dupla duorum quadratorum ſimul ſumptorum, quorum vnum ex linea ducta, alterũ verò ex dimidiato latere deſcribitur.





IN triangulo A B C, recta A D, ſecet latus B C, bifariam in D. Dico quadrata ex A B, A C; dupla eſſe quadratorum ex A D, B D. Demittatur enim ex A, ad B C, perpendicularis; quæ primum rectæ A D, congruat, ac proinde triangulum A B C, æquilaterum ſit, vel Iſoſceles, vt ad propoſ. 26. lib. 1. demonſtrauimus.

a47.pri mi. *a Quoniam igitur tam quadratum ex A B, æquale eſt quadratis ex A D, D B, quam quadratum ex A C, quadratis ex A D, D C; erunt duo quadrata ex A B, A C, æqualia quadrato ex A D, bis ſumpto, vna cum quadratis ex D B, D C. Cum ergo quadrata ex D B, D C, æqualia ſint, ſi auferantur duo quadrata ex A D, D C, ablatum erit dimidium quatuor quadratorum, nimirum quadrati ex A D, bis ſumpti, & quadratorum ex D B, D C. Quare duo quadrata ex A B, A C, dupla ſunt duorum quadratorum ex A D, D B.*

b47.pri mi. *quod eſt propoſitum. Quod clarius ita oſtendetur. b Quoniam quadratum ex A B, duobus quadratis ex A D, D B, æquale eſt: Sunt autem duo quadrata ex A B, A C, quadrati ex A B, dupla, ob æqualitatem linearum A B, A C; erunt quoque quadrata ex A B, A C, dupla quadratorum ex A D, D B. Quod demonſtrandum erat.*

CONGRVAT deinde perpendicularis A C, lateri A C. Et quia quadratũ ex B C, quadruplum eſt tam quadrati ex B D, quam quadrati ex D C, vt in ſcholio propoſ 4. huius lib. oſtendimus; erit idem quadratum ex B C, duplum duorum quadratorum ex D B, D C. Sunt autem duo quadrata ex A C, C D, bis ſumpta, dupla quoque qua-

c47.pri mi. *drati ex A D; quòd c quadrata ex A C, C D, ſemel ſumpta æqualia ſint quadrati ex A D. Igitur quadratum ex B C, vna cum quadratis ex A C, C D, bis ſumptis, duplum erit quadratorum ex D B, D C, A D. Cum ergo & quadratum ex C D, bis ſumptum, duplum ſit qua-*

d20.pro nun. *drati ex C D; d erit reliquum quadratum ex B C, vna cum quadrato ex A C, bis ſumpto, duplum quoque reliquorum quadratorum ex*

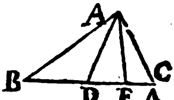
e47.pri mi. *D B, A D. Sunt autem e quadrata ex B C, A C, æqualia quadrato ex A B. Igitur quadrata ex A B, A C, (quæ æqualia ſunt quadrato ex B C, vna cum quadrato ex A C, bis ſumpto) dupla quoque ſunt, quadratorum ex A D, D B. Quod eſt propoſitum.*

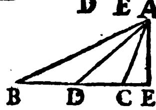
TERTIO cadat perpendicularis A E, intra triangulum inter

f9.ſec. *puncta D, C. Quia igitur f quadrata ex B E, E C, dupla ſunt quadra-*

torum

torum ex B D, D E: Item quadrata ex A E, D E, bis ſumpta, dupla ſunt quadrati ex A D; quod a quadrata ex A E, E D, ſemel ſumpta a 47 primi.
quadrato ex A D, æqualia ſint; erunt quadrata ex B E, E C, vna cum quadratis A E, D E, bis ſumptis, dupla quoque quadratorum ex B D, D E, A D. Cum ergo & quadratum ex D E, bis ſumptum, duplum ſit quadrati ex D E; b erunt reliqua quadrata ex B E, E C, vna cum quadrato ex A E, bis ſumpto, b 20. pronun.
dupla quoque reliquorum quadratorum ex D B, A D. Quare cum quadratis ex B E, A E, c æquale ſit quadratum ex A B; & quadratis ex E C, c 47. primi.
A E, quadratum ex A C; erunt quoque quadrata ex A B, A C, dupla quadratorum ex A D, D B. Quod eſt propoſitum.

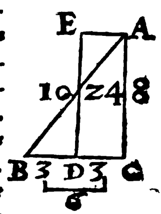




POSTREMO cadat perpendicularis A E, in latus B C, productum. Quoniam igitur d quadrata ex B E, C E, dupla ſunt quadratorum ex B D, D E. Item quadrata ex A E, D E, bis ſumpta, dupla d 10. ſecũ.
ſunt quadrati ex A D; e quod quadrata ex A E, D E, ſemel ſumpta, æqualia ſint quadrato ex A D; erunt quadrata ex B E, C E, vna cum e 47. primi.
quadratis ex A E, D E, bis ſumptis, dupla quoque quadratorum ex B D, D E, A D. Cum ergo & quadratum ex D E, bis ſumptum, duplum ſit quadrati ex D E; f erunt reliqua quadrata ex B E, C E, vna cum quadrato ex A E, bis ſumpto, dupla quoque reliquorum quadratorum ex B D, A D. Quare cum quadratis ex B E, A E, g æquale ſit f 20. pronun.
quadratum ex A B, & quadratis ex C E, A E, quadratum ex A C; g 47. primi.
erunt quoque quadrata ex A B, A C, dupla quadratorum ex A D, D B. Quod erat oſtendendum.

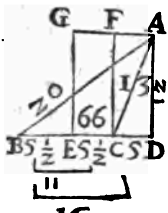
NON te moueat autem, quod ad huius theorematis demonſtrationem adhibuerimus pronunciatum 20. quod vniuerſaliter in omni genere multiplicium ab Euclide demonſtratur lib. 5. propoſ. 5. quoniam in dupla proportione facile concedi poteſt ſine demonſtratione, vt in expoſitione eius principij diximus: Vel propoſitio 5. lib. 5. ante hoc theorema demonſtrari poteſt: Vel certe theorema ipſum poſt librum 5. demonſtrari; ita vt circulus in demonſtrando nulla ratione committatur, etiamſi principium illud demonſtretur libro 5. quia propoſitio 5. lib. 5. ex hoc theoremate non pendet.

EX his autem, quæ proximis duobus theorematibus, & propoſ. 47. lib. 1. demonſtrata ſunt, aream cuiuſque trianguli latera habentis nota inueniemus, vt recte hoc loco monet Campanus, & Federicus Commandinus demonſtrat, hac fere ratione. Sit primo triangulum rectangulum A B C, cuius latera nota ſint, nempe A B, 10. palmorum; A C, 8. B C, 6. Diuiſo latere B C, biſariam in D, vt ſint C D, B D, 3. palmorum, perficiatur rectangulum



A C D E, quod æquale eſt triangulo A B C, vt in ſcholio propoſ. 41 lib. 1. oſtendimus. Quia verò ex ductu C D, trium palmorum in C A, 8. palmorum producitur area rectanguli C E, 24. palmorum quadratorum; vt ad initium huius lib. docuimus: Totidem palmos quadratos continebit triangulum A B C, rectangulo C E, æquale. Quod eſt propoſitum.

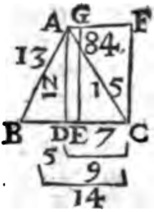
SIT deinde triangulum obtuſangulum A B C, cuius latera ſint cognita; A B, 20. palmorum; A C, 13. B C, 11. Primum igitur inuenienda eſt quantitas perpendicularis lineæ A D, ex A, in latus B C, protractum demiſſa, hoc modo. Quoniam quadratum lateris A B, a 12. ſec. *a maius eſt, quam quadrata laterum A C, B C, rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D; ſi quadrata laterum A C, B C, nempe 169. 121. quæ efficiunt 290 detrahantur ex 400. quadrato lateris A B, remanebunt 110. pro rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, cuius numeri dimidium 55. dabit rectangulum ſub BC, CD; Si igitur 55. rectangulum ſub BC, CD, diuidatur per 11. latus notum B C, exibit reliquum latus C D, 5. palmorum, vt Ioan. Regiom. demonſtrat propoſ. 17. lib. 1. de triangulis, & à nobis demonſtratum eſt in libro de menſurationibus omnium quantitatum.*



b 47 primi. *Quia verò quadrata laterum A D, C D, b æqualia ſunt quadrato lateris A C; ſi quadratum 25. palmorum, nempe lateris C D, 5. palmorum nuper inuenti, auferatur ex 169. quadrato lateris A C, remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris A D. Quare latus A D, erit 12. palmorum, cum radix quadrata huius numeri 144. ſit 12. Iam verò diuiſo latere B C, biſariam in E, educantur ex C, E, ad B D, perpendiculares C F, E G, occurrentes rectæ A G, quæ per A, ipſi B D, parallela ducitur, in punctis F, G. Quibus peractis, ſi E C, palmorum quinque cum dimidio, ducatur in C F, 12. palmorum, (Eſt c enim C F, ipſi A D, æqualis.)* c 34. primi. *exurget area rectanguli C G, 66. palmorum: quod cum æquale ſit triangulo A B C, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1 (ſunt enim rectangulum C G, & triangulum A B C, in eiſdem parallelis, &c.) Erit quoque area trianguli A B C, palmorum quadratorum 66. quod eſt propoſitum.*

SIT poſtremo triangulum acutangulum A B C, latera habens nota; A B, 13 palmorum; A C, 15. B C, 14. Primum igitur hic quoque reperienda eſt quantitas perpendicularis A D, ex A, ad B C, demiſſæ, hac ratione. d 13. ſec. *Quoniam quadratum lateris A B, d minus eſt, quam quadrata laterum A C, B C, rectangulo comprehenſo bis ſub B C, C D; ſi quadratum lateris A B, nimirum 169 detrahatur ex quadratis laterum A C, B C, hoc eſt, ex 225. 196 quæ efficiunt 421. remanebunt 252. pro rectangulo comprehenſo bis ſub B C, C D, cuius numeri dimidium 126. dabit rectangulum ſub B C, C D. Si igitur 126. rectangulum ſub*

Digitized by Google



ctum ſub B C, C D, diuidatur per B C, latus notum, vt per 14; exibit reliquum eius latus C D, palmorum 9. vt conſtat ex Ioan. Regiom. lib. 1. de triangulis propoſ. 17. & à nobis demonſtratum eſt in lib. de menſurationibus omnium quantitatum. Quoniam autem quadrata ex A D, C D, a æqualia ſunt quadrato ex A C; ſi quadratum 81. palmorum, nempe lateris C D, 9. palmorum nuper inuenti, auferatur ex 225. quadrato lateris A C; remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris A D. Quare cum radix quadrata huius numeri 144. ſit 12. erit latus A D, 12. palmorum. Iam vero diuiſo latere B C, biſariam in E, educantur ex C, E, ad B C, perpendiculares C F, E G, occurrentes rectæ A F, quæ per A, ipſi B C, parallela ducitur, in punctis G, F. Quibus peractis, ſi C E, 7. palmorum ducatur in E G, 12. palmorum; (b eſt enim E G, rectæ ipſi A D, æqualis) exurget area rectanguli E F, palmorum 84 Quod cum triangulo A B C, ſit æquale, ex ſcholio propoſ. 41 lib. 1. (ſunt enim rectangulum E F, & triangulum A B C, in eiſdem parallelis, &c.) erit quoque area trianguli A B C, 84. palmorum. Quod eſt propoſitum.

a 47. primi.

b 34. primi.

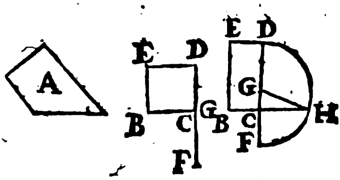
ITAQVE in vniuerſum, area cuiuſcunque trianguli producitur ex dimidio baſis in perpendicularem, quæ à vertice ad baſim demittitur, vt in exemplis datis eſt manifeſtum. Sed plura hac de re in libro de menſurationibus omnium quantitatum, quem propediem, Deo iuuante, in lucem edemus. Quo pacto autem, duobus lateribus, cum vno angulo, cognitis, vel duobus angulis, cum vno latere, reliqui anguli, & latera cognoſcantur, demonſtrauimus in noſtris triangulis rectilineis.

PROBL. 2. PROPOS. 14. XIV.

DATO rectilineo æquale quadratum conſtituere.

SIT datum rectilineum A, cui quadratum æquale conſtituendum eſt. c Conſtituatur parallelogrammum B C D E, æquale rectilineo A, habens angulum rectum, cuius vnum latus, vt D C, producatur ad F, ſitq; C F, recta æqualis rectæ B C. Diuidatur quoque D F, biſariam in puncto G, quod cadet aut in punctum C, aut non. Si cadit in punctum C, erit recta B C, (cum æqualis ponatur rectæ C F) rectæ C D, æqualis. Quare rectangulum B D, erit quadratum, cum latera D E, E B, d æqualia ſint oppoſitis lateribus B C, C D; atque adeo conſtitutum erit quadratum æquale rectilineo A. Si vero

c 45. primi.



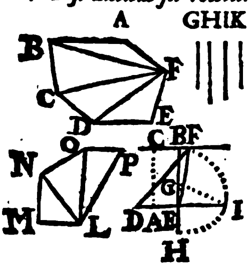
d 34. primi.

punctum G, non cadit in C; facto G, centro, deſcribatur interuallo G D, vel G F, ſemicirculus F H D, producaturque B C, donec circumferentiam ſecet in H. Dico igitur, quadratum rectæ C H, eſſe æquale rectilineo A. Ducta enim recta G H; quia recta D F, diuiditur bifariam in G, & non bifariam in C; erit rectangulum comprehenſum ſub D C, C F, hoc eſt, rectangulum B D, vna cum
a 5. ſec. quadrato rectæ G C, *a* æquale quadrato rectæ G F, hoc eſt, quadrato rectæ G H; cum rectæ G F, G H, ſint æquales: At quadra-
b 47. primi. tum rectæ G H, *b* æquale eſt quadratis rectarum G C, C H. Igitur rectangulum B D, vna cum quadrato rectæ G C, æquale quoque erit quadratis rectarum G C, C H. Quam ob rem dempto communi quadrato rectæ G C, remanebit rectangulum B D, hoc eſt, rectilineum A, quadrato rectæ C H. æquale. Dato ergo rectilineó æquale quadratum conſtituimus: Quod facere oportebat.

S C H O L I V M.

VERVM quia laborioſum eſt, rectangulum dato rectilineo multorum angulorum conſtruere æquale, quod ſæpius ſuper datam rectam conſtituendum ſit, ex propoſ. 44. lib. 1 rectangulum æquale triangulo, facilius fortaſſe deſcribemus quadratum dato rectilineo æquale, ſi datam figuram rectilineam in triangula reſoluamus, & cuilibet triangulo quadratum æquale efficiamus, hoc eſt, latus quadrati, quod cuius triangulo æquale ſit, inueſtigemus: quod factu facillimum eſt, vt mox oſtendemus. Nam ſi per ea, quæ in ſcholio propoſ. 47. lib. 1. ſcripſimus, inueniamus latus alterius quadrati, quod ſit omnium inuentorum laterum quadratis æquale, factum erit, quod proponitur.

VT ſi datum ſit rectilineum A B C D E F, reſoluemus illud in



triangulo A B F, F B C, C F D, D E F, inueniemusque latera G, H, I, K, quorum quadrata ſint illis ordine æqualia. Deinde angulum rectum conſtituemus M, & lineas L M, M N, lateribus G, H, æquales. Ducta autem recta N L, erigemus ad eam perpendicularem N O, lateri I, æqualem. Similiter ducta recta O L, excitabimus illi perpendicularem O P, lateri K, æqualem, iungemusque rectam P L. Atque hoc modo progrediemur, donec vltimo lateri ſumpta ſit perpendicularis linea æqualis, qualis hic fuit perpendicularis O P, vltimo lateri K, æqualis. Nam quadratum rectæ P L, poſtremo loco ductæ æquale erit omnibus quadratis laterum G H, I, K, vt ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus, atque adeo omnibus triangulis A B F, F B C, C F D, D E F, hoc eſt, datæ figuræ rectilineæ A B C D E F.

PRAXIS

Digitized by Google

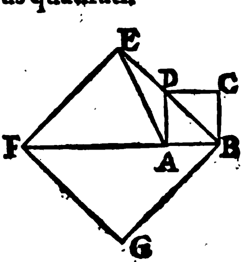
PRAXIS autem, qua cuiuis triangulo quadratum æquale inueniatur, facilis eſt. Sit enim inueniendum quadratum æquale quarto triangulo DEF, data rectilinea figura. Diuidatur quodcunque latus, nempe DE, bifariam in A, producaturque quantumlibet. Ducta deinde per angulum oppoſitum F, lateri DE, parallela FB, ducatur per E, ad DE, perpendicularis HEB, ſecans FB, in B, ſitque EH, ipſi AE, dimidio lateris DE, æqualis. Poſtremo, diuiſa tota linea BH, bifariam in G, deſcribatur ex G, ad interuallum GH, vel GB, arcus ſecans latus DE, productum in I. Dico quadratum lateris EI, æquale eſſe triangulo DEF. Si namque compleatur rectangulum AEC, & ſemicirculus BH, ducaturq; recta GI, oſtendemus, vt in hac propoſ. 14. quadratum ex EI, rectangulo AB, æquale eſſe. Cum ergo rectangulum AB, triangulo DEF, ſit æquale, ex ſcholio propoſ. 42. lib. 1. quod baſis DE, ſit dupla baſis AE, conſtat propoſitum.

NON eſt tamen neceſſarium, vt rectangulum conſtruatur AB. Nam ſi fiat angulus rectus IEB, atque in BH, capiatur EH, ſemiſſi lateris DE, æqualis, & recta EB, æqualis perpendiculari ex F, in latus DE, demiſſæ, ſeceturque BH, bifariam in G, auferet circumferentia ex G, circa BH, deſcripta rectam EI, cuius quadratum æquale eſt rectangulo ſub BE, EH, hoc eſt, triangulo DEF.

QVONIAM verò ſecundo hoc libro Euclides multa de quadratis, ac rectangulis parallelogrammis diſputauit, rectè hic inſeri poterunt ſequentia duo problemata de quadrato, & parallelogrammo rectangulo, neque iniucunda, neque inutilia: quorum poſterius eruditus vir, atque excellens Mathematicus, Marinus Ghetaldus Patricius Racuſinus, mihiq; familiariſſimus, ingenioſiſſimè ſanè ſoluit, & longè aliter, breuiusq; quam à quodam alio ſolutum quondam fuit, quam ſolutionem hic ſubiungere ſupernacaneum eſt, cum illam Marini Racuſini hic appoſuerim, tanquam breuiorem, ac faciliorem.

I.

DATO exceſſu diametri alicuius quadrati ſupra latus eiuſdem; Inuenire latus ipſius quadrati.



EXCEDAT diameter alicuius quadrati latus eiuſdem recta AB, inueniendumq; ſit latus illius quadrati. Ex recta AB, deſcribatur quadratum AC, cuius diameter ducta BD, producatur ad E, vt ſit DE, recta recta AD, æqualis. Dico rectam EB, eſſe latus illius quadrati, cuius diameter excedit ipſum latus BE, exceſſu dato AB. Ducatur enim EF, perpendicu-

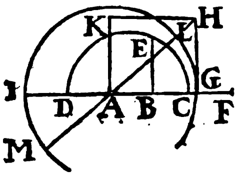
laris ad B E, quæ rectam B A, productam ſecet in F. Quoniam igitur in triangulo B E F, angulus F E B, rectus eſt, & E B F, ſemirectus, ex
a 32. primi. *coroll. 2. propoſ. 4. huius lib. a erit & B F E, ſemirectus. b Quare rectæ B E, F E, æquales ſunt. Si igitur ex F, ducatur F G, parallela ipſi B E;*
b 6 pri. *& ex B, recta B G, parallela ipſi E F, occurrens priori in G, conſtitutum erit quadratum rectæ B E.*
c 5. pri. *c Quod ſi ducatur recta A E, erunt anguli A E D, E A D, æqualibus lineis D E, D A, oppoſiti æquales. Quare ſi demantur ex rectis angulis D E F, D A F, remanebunt anguli A E F, E A F, æquales;*
d 6. pri. *d ideoque rectæ E F, A F, æquales erunt. Quoniam vero diameter B F, rectam A F, ſuperat data recta A B; ſuperabit eadem diameter B F, latus quadrati E F, eadem recta A B. quod eſt propoſitum.*

COROLLARIVM.

ITAQVE recta compoſita ex diametro quadrati ſupra exceſſum datum deſcripti, & ex latere einſdem quadrati, exhibet latus quadrati, quod quæritur. Eadem autem diameter cum duplo exceſſus, diametrum quæſiti quadrati conſtituit.

II.

DATIS duobus exceſſibus diametri alicuius parallelogrammi rectanguli ſupra vtrumque latus; Inuenire latera ipſius rectanguli.



SVPERET diameter minus latus recta A B, & maius recta B C. Producta A C, in vtramque partem ſumatur A D, ipſi A B, æqualis: deſcriptoque circa C D, ſemicirculo, erigatur ad A C, perpendicularis B E, ſecans circumferentiam in E, ſumaturque ipſi B E, æqualis C F. Et quia, vt ex demonſtratione propoſ. 14 huius lib. conſtat, quadratum rectæ B E, æquale eſt rectangulo ſub D B, B C, erit B E, maior quam B C, minus latus dicti rectanguli. Igitur & C F, maior erit quam B C. Sumpta ergo F G, ipſi B C, æquali, cadet punctum G, inter C, & F. Erecta autem ad A F, perpendiculari G H, ipſi B F, æquali; Dico A G, eſſe maius latus, & G H, minus, ita vt rectangulum quæſitum ſit G K. Eſſe enim rectam A G, maiorem quam G H, ita probabitur: Quoniam B C, F G, æquales ſunt, addita communi C G, erunt quoque B G, C F, æquales. Additis igitur inæqualibus A B, ipſi B G, & B C, ipſi C F, erit A G, maior quam B F, hoc eſt, quam G H: quandoquidem addita A B, maior eſt, quam addita B C. Eſſe autem A G, G H, latera quæſita, ita demonſtrabitur. Deſcripto ex A, ad interuallum A G, circulo, ducatur per A, H, recta ſecans circumferentiam in L, M, & recta A D, producatur, circumferentiam

ſecans

ſecans in I. Quoniam igitur rectangulum ſub B C, B D, a æquale eſt 21.ſec.
rectangulis ſub C B, B A, & ſub C B, A D, hoc eſt, duplum rectanguli ſub exceſſibus A B, B C: Eſt autem rectangulo ſub B C, D B, æquale quadratum rectæ B E, vt oſtendimus; erit quoque quadratum rectæ B E, duplum rectanguli ſub A B, B C, hoc eſt, quadratum rectæ B E, æquale erit duplo rectanguli ſub A B, B C Addito ergo communi quadrato rectæ B C, vna cum duplo rectanguli ſub B G, B C, hoc eſt, ſub C F, B C; erunt quadrata rectarum B E, ſiue C F, & B C, vna cum duplo rectanguli ſub C F, B C, æqualia duplo rectanguli ſub A B, B C, & quadrato rectæ B C, vna cum duplo rectanguli ſub C F, B C. Sunt autem quadrata rectarum C F, B C, vna cum duplo rectanguli ſub C F, B C, b æqualia quadrato rectæ B F. Igitur b 4.ſec.
& quadratum rectæ B F, æquale erit duplo rectanguli ſub A B, B C, & quadrato rectæ B C, vna cum duplo rectanguli ſub C F, B C, vel ſub B G, B C Cum ergo duplum rectangulorum ſub A B, B C, & ſub B G, B C, æquale ſit rectangulo ſub I G, (quæ ipſarum A B, B G, ſimul dupla eſt) & B C, vel F G; erit quoque quadratum rectæ B F, æquale rectangulo ſub I G, F G, vna cum quadrato rectæ B C, vel F G. At rectangulo ſub I G, G F, vna cum quadrato rectæ F G, c æquale eſt rectangulum ſub I F, F G. Igitur quadratum rectæ B F, ſiue c 3.ſec.
G H, æquale etiam eſt rectangulo ſub I F, F G. Addito ergo communi quadrato rectæ A G; erunt quadrata rectarum G H, A G, æqualia rectangulo ſub I F, F G, vna cum quadrato rectæ A G. Eſt autem quadratis rectarum G H, A G, d æquale quadratum rectæ A H; & d 47.
rectangulo ſub I F, F G, vna cum quadrato rectæ A G, e æquale eſt primi.
quadratum rectæ A F. Igitur & quadratum rectæ A H, quadrato rectæ A F, æquale eſt, rectaque A H, rectæ A F, æqualis: demptiſq; e 6. ſec.
æqualibus A L, A G, reliquæ L H, G H, æquales erunt. Diameter ergo A H, rectanguli G K, hoc eſt, recta A F, excedit maius latus A G, rectæ G F, ſiue exceſſu dato B C: Ipſum vero minus latus G H, ſiue rectam B F, ipſi G H, æqualem, exceſſu dato A B. Quod eſt propoſitum.

COROLLARIVM.

ITAQVE recta B E, vel C F, cuius quadratum rectanguli ſub datis exceſſibus A B, B C, duplum eſt, addita minori exceſſui B C, efficit minus latus quæſitum B F, hoc eſt, G H. Eadem autem recta B E, hoc eſt, B G, addita maiori exceſſui A B, conficit maius latus quæſitum A G: Eadem denique B E, vel C F, cum vtroque exceſſu A B, B C, diametrum A F, vel A H, conſtituit.

FINIS ELEMENTI SECVNDI.

Digitized by Google

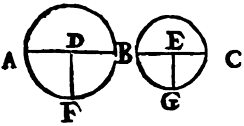
EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVM.

DEFINITIONES.

I.

ÆQVALES circuli ſunt, quorum diametri ſunt æquales; vel quorum, quæ ex centris, rectæ lineæ ſunt æquales.

QVONIAM Euclides hoc 3. lib. varias circuli proprietates demonſtrat, idcirco explicat prius terminos quoſdam, quorum frequens in eo futurus eſt vſus. Primum itaque docet, eos circulos eſſe æquales, quorum diametri, vel ſemidiametri æquales ſunt. Cum enim circulus deſcribatur ex circumuolutione ſemidiametri circa alterum extremum fixum, & immobile, vt lib. 1. diximus, perſpicuum eſt, eos circulos eſſe æquales, quorum ſemidiametri, ſeu rectæ ex centris ductæ, ſunt æquales; vel etiam quorum totæ diametri æquales ſunt. Vt ſi diametri AB, BC, vel rectæ DF, EG, è centris D, & E, ductæ ſint æquales, æquales erunt circuli AFB, & BGC. Sic etiam è contrario, ſi circuli ſint æquales, erunt diametri, vel rectæ è centris ductæ, æquales. Ex his liquet, circulos, quorum diametri, vel rectæ ductæ ex centris ſunt inæquales, inæquales eſſe; atque adeo illum, cuius diameter, vel ſemidiameter maior, maiorem. Et contra, circulorum inæqualium diametros, ſemidiametroſve inæquales eſſe, maioris quidem maiorem, & minoris minorem.

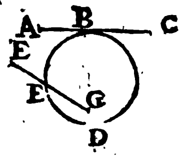


II.

RECTA linea circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat, ſi producatur, circulum non ſecat.

VT rectæ

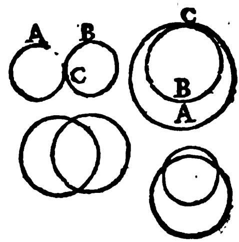
VT recta A B, ſi ita circulum B F D, tangat in B, & producta ad C, nulla ratione circulum ſecet, ſed tota iaceat extra ipſum, dicetur tangere circulum. At verò recta E F, quia ita eundem circulum tangit in F, & producta ad G, ſecet circulum, cadatq; intra ipſum, non dicetur circulum tangere, ſed ſecare.



III.

CIRCVLI ſeſe mutuò tangere dicuntur, qui ſeſe mutuò tangentes, ſeſe mutuò non ſecant.

EODEM modo duo circuli A C, B C, mutuò dicuntur tangere in C, ſi ita ſeſe contingant in C, vt neuter alterum ſecet. Eſt autem hic contactus circulorum duplex. Aut enim exterius ſeſe circuli tangunt, vt quando vnus extra alterum eſt poſitus; aut interius; quando vnus intra alterum conſtituitur. Quòd ſi duo circuli ita ſe mutuò tangant, vt vnus alterum quoque ſecet, dicentur circuli illi ſe mutuò ſecare, & non tangere.



IV.

IN circulo æqualiter diſtare à centro rectæ lineæ dicuntur, cùm perpendiculares, quæ à centro in ipſas ducuntur, ſunt æquales. Longius autem abeſſe illa dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.

QVONIAM inter omnes lineas rectas, quæ ab aliquo puncto ad quamlibet lineam rectam ducuntur, breuiſſima eſt perpendicularis, & ſemper eadem; aliæ verò infinitis modis variari poſſunt; rectè diſtantia illius puncti à linea illa recta accipitur penes lineam perpendicularem. Vt diſtantia puncti A, à recta B C, dicitur eſſe perpendicularis A D, non autem A E, vel A F, vel alia quæuis, quæ non perpendicularis eſt; quia A D, omnibus eſt breuior, ex coroll. propoſ. 19. lib. 1. Immò non ſolùm A E, A F, maiores ſunt, quàm A D, ſed etiam ipſæ inter ſe inæquales ſunt. Eſt enim A F, a *maior, quàm A E, cùm angulus A E F, ſit obtuſus, & A F E, acutus, & ſic de alijs lineis non perpendicularibus. Quòd enim A F E, acutus ſit, conſtat ex eo, quod in triangulo A D F, duo anguli A D F, A F D,* b *minores ſunt duobus rectis. Hinc enim fit, cùm A D F, rectus ſit, angulum A F D, recto eſſe minorem. Eadem ratione angulus A E D, oſtendetur acutus, propterea quòd in triangulo A D E,* c *duo anguli A D E, A E D, mino-*

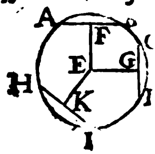


a 19. pri.

b 17. pri mi.

c 17. pri mi.

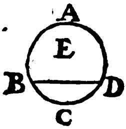
res ſunt duobus rectis, & A D E, rectus eſt) ac proinde, cùm ambo
a 13.pri. A E D, A E F, a æquales ſint duobus rectis, erit A E F, obtuſus. Hinc factum eſt, vt Euclides æqualem diſtantiam rectarum in circulo ab ipſius centro definierit per æquales perpendiculares, & inæqualem diſtantiam per inæquales.



Vt duæ rectæ A B, C D, in circulo A B C D, æqualiter dicentur diſtare à centro E, ſi perpendiculares E F, E G, æquales fuerint. At linea C D, longius abeſſe dicetur à centro E, quàm linea H I, ſi perpendicularis E G, maior fuerit perpendiculari E K.

V.

SEGMENTVM circuli eſt figura, quæ ſub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

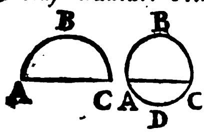


VT ſi ducatur in circulo A B C D, recta B D, vtcunque, dicetur tam figura B A D, contenta circumferentia B A D, & recta B D; quàm figura B C D, comprehenſa recta B D, & circumferentia B C D, circuli ſegmentum. Ex his colligitur triplex circuli ſegmentũ, Semicirculus, quando recta B D, per centrum E, incedit; Segmentum ſemicirculo maius, quando recta B D, non tranſit per centrum, in ipſo tamen centrum exiſtit, quale eſt ſegmentum B A D; Et ſegmentum ſemicirculo minus, extra quod centrum circuli conſtituitur, cuiuſmodi eſt ſegmentum B C D. Id quod ad defin. 18. lib. 1. demonſtrauimus. Vocatur à pleriſq; Geometris recta B D, chorda, & circumferentia B A D, vel B C D, arcus.

VI.

SEGMENTI autem angulus eſt, qui ſub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

DEFINIT iam Euclides tria genera angulorum, qui in circulis conſiderantur. Primo loco angulum ſegmenti, dicens angulum



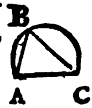
mixtum B A C, vel B C A, contentum ſub recta linea A C, & circumferentia A B C, appellari angulum ſegmenti. Quod ſi ſegmentũ circuli fuerit ſemicirculus, dicetur angulus ſemicirculi. Si verò ſegmentũ maius ſemicirculo extiterit, vocabitur angulus ſegmenti maioris: Si deniq; ſegmentũ minus fuerit ſemicirculo, angulus ſegmenti minoris nuncupabitur.

VII.

IN ſegmento autem angulus eſt, cùm in ſegmenti peripheria ſumptum fuerit quodpiam punctum, & ab illo in terminos rectæ eius lineæ, quæ ſegmenti baſis eſt, adiun-

Digitized by Google

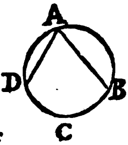
adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Is, inquam, angulus ab adiunctis illis lineis comprehenſus.



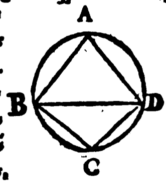
SIT ſegmentum circuli quodcunque A B C, cuius baſis recta A C. Ex ſuſcepto quolibet puncto B, in circumferentia, ducantur ad puncta A, & C, extrema baſis, rectæ lineæ B A B C. Angulus igitur rectilineus A B C, dicitur exiſtere in ſegmento A B C.

VIII.

CVM verò comprehendentes angulum rectæ lineæ aliquã aſſumunt peripheriã, illi angulus inſiſtere dicitur.



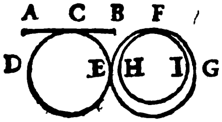
EX puncto A, quolibet ſuſcepto in circumferentia circuli A B C D, ducantur rectæ duæ lineæ A B. A D, ad duo extrema B, & D, circumferentiæ B C D, cuiuſq; quam quidem duæ rectæ A B, A D, aſſumunt. Angulus itaque rectilineus B A D, inſiſtere dicitur circumferentiæ B C D. Perſpicuum autem eſt, hunc angulum à præcedenti non differre, niſi voce tenus. Idem enim angulus rectilineus B A D, iuxta præcedentem quidem definitionem dicitur eſſe in ſegmento B A D, ſi recta B D, baſis duceretur; ex hac verò inſiſtere circumferentiæ B C D. Non tamen confundendus eſt angulus in ſegmento aliquo, cum angulo, qui circumferentiæ inſiſtit, quamuis vnus & idem ſit; ad diuerſa ſiquidem referuntur. Angulus enim in ſegmento, ſegmentum, in quo exiſtit, angulus autem inſiſtens circumferentiæ, circumferentiam, quæ baſis eſt ipſius anguli, reſpicit. Vnde ſi ſumatur ſegmentum aliquod circuli B C D, in circulo A B C D, non erit idem angulus in hoc ſegmento exiſtens, & eius circumferentiæ inſiſtens. Angulus enim in eo exiſtens, erit B C D; at eius circumferentiæ B C D, inſiſtens, erit angulus B A D, qui multum ab eo differt. Qua in re mirũ in modum hallucinati ſunt Orontius, Peletarius, & alij interpretes nonnulli. Quòd autem angulus in ſegmento, & angulus circumferentiæ cuipiam inſiſtens, ad diuerſos arcus referantur, luce clarius patebit ex vltima propoſ. lib. 6. quæ ſolùm conuenire poteſt circumferentijs circulorum, quibus anguli inſiſtunt, nõ autem in quibus exiſtunt, vt eo in loco oſtendemus. Idem quoq; facilè conſtat ex verbo græco βεβηκέναι, quod aſcendiſſe ſignificat. Aſcendit enim angulus D A B, ſupra circumferentiam B C D.



PRÆTER tres dictos angulos conſideratur etiam à Geometris angulus contingentiæ, qui continetur linea recta tangente circulum, & circumferentia circuli; vel certè duabus circumferentijs ſe mutuò tangentibus, ſiue hoc exterius fiat, ſiue interius. Exemplum. Si recta A B, tangat circulum C D E, in C; angulus mixtus A C D, vel

B C E.

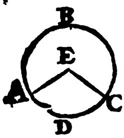
Digitized by Google



BCE, dicetur angulus contingentiæ, ſiue contactus: Rurſus, ſi circulus CED, tangat circulum EFG, exterius in E; Item circulus HFI, circulum EFG, interius in F; appellabitur tam angulus curuilineus CEF, quàm EFH, vel GFI, angulus contactus, ſeu contingentiæ. Sunt itaque, vt vides, tres anguli contingentiæ, vnus quidem mixtus, reliqui verò duo curuilinei.

IX.

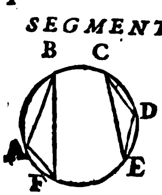
SECTOR autem circuli eſt, cùm ad ipſius circuli centrum conſtitutus fuerit angulus, comprehenſa nimirum figura & à rectis lineis angulum continentibus, & à peripheria ab illis aſſumpta.



SI in circulo ABCD, cuius centrum E, rectæ AE, CE, conſtituant angulum AEC, ad centrum E; nominabitur figura AECD, contenta rectis AE, EC, & circumferentia ADC, quam prædictæ lineæ aſſumunt, Sector circuli. Ex hoc autem perſpicuè etiam colligitur, angulum, qui definitione 8. explicatur, referri ad circumferentiam, quæ ipſius baſis eſt, non autem ad eam, in qua exiſtit, vt multi interpretes exiſtimarunt. Nam ſicut in hac definitione Euclides intelligit circumferentiam ADC, quæ baſis eſt anguli ad centrum conſtituti, quando mentionem facit peripheriæ à rectis AE, CE, aſſumptæ. Ita quoque in illa intellexiſſe eum neceſſe eſt nomine peripheriæ, quam rectæ lineæ aſſumunt, eam, quæ baſis eſt anguli ad circumferentiam conſtituti; quandoquidem in vtraque definitione vſus eſt eodem verbo græco ἀπολαμβάνω.

X.

SIMILIA circuli ſegmenta ſunt, quæ angulos capiunt æquales: Aut in quibus anguli inter ſe ſunt æquales.

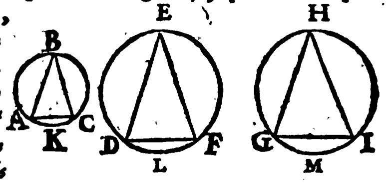


SEGMENTA videlicet ABDF, DCAE, eiuſdem circuli ABCDEF, quæ capiunt hos duos angulos ABF, ACE, æquales: vel, quod idem eſt, in quibus iidem anguli æquales exiſtunt, iuxta 7. definitionem, ſimilia dicuntur, & ipſa circumferentiæ quoque ABDF, DCAE, ſimiles.

EODEM modo ſegmenta diuerſorum circulorum tam æqualium, quàm inæqualium, à Geometris dicuntur ſimilia, quæ vel ſuſcipiunt æquales angulos; vel in quibus æquales anguli

Digitized by Google

guli exiſtunt. Vt ſi in circulis A B C K, D E F L, G H I M, anguli A B C, D E F, G H I, fuerint æquales, dicentur ſegmenta, ſeu circumferentiæ A B C, D E F, G H I, quæ dictos angulos ſuſcipiunt, vel in quibus prædicti anguli exiſtunt, ſimiles. Conſiſtit autem hæc ſegmentorum, circumferentiarúmve ſimilitudo in eo, quòd qualis pars eſt vna circumferentia totius ſuæ circumferentiæ, talis

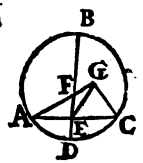


quoque ſit altera circumferentia, quæ dicitur huic ſimilis, totius ſuæ circumferentiæ; ita vt qualis, & quanta pars eſt circumferẽtia A B C totius circumferentiæ A B C A, talis & tanta quoque pars ſit circumferentia D E F, totius circumferentiæ D E F D; Item talis, & tanta circumferentia G H I, totius circumferentiæ G H I G. Vel potiùs ſegmentorum ſimilitudo in hoc conſiſtit, quòd ſegmenta, ſeu circumferentiæ ſimiles, ad totas circumferentias ſuas eandem habeant proportionem. Quòd autem ſegmenta, quæ vel æquales ſuſcipiunt angulos, vel in quibus exiſtunt æquales anguli, ſint huiuſmodi, demonſtrabimus propoſitione vltima lib. 6. Nunc ſatis ſit, talia ſegmenta circulorum, vel etiam arcus, circumferentiaſve, appellari ſimiles.

EADEM ratione dicuntur arcus, vel circumferentiæ ſimiles, quibus æquales anguli, iuxta defin. 8. inſiſtunt. Vt ſi in iiſdem circulis anguli A B C, D E F, G H I, ſint æquales, dicentur arcus, circumferentiæve A K C, D L F, G M I, quibus inſiſtunt ſimiles. Immò ſi anguli ad centra inſiſtentes arcubus A K C, D L F, G M I, ſint æquales, erunt adhuc ipſi arcus ſimiles. Id quod à nobis in ſcholio propoſ. 22. huius lib. demonſtrabitur.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

DATI circuli centrum reperire.



SIT circulus datus A B C D, cuius centrum oportet inuenire. Ducatur in eo linea vtcunque A C, à quæ bifariam diuidatur in E, & per E, ad A C, perpendicularis agatur B D, vtrinque in peripheria terminata in punctis B, D. Hæc igitur bifariam ſecta in F; dico F, eſſe centrum circuli propoſiti. In ipſa enim recta B D, aliud punctum, præter F, non erit centrum, cùm omne aliud punctum ipſam diuidat inæqualiter, quandoquidem in F, diuiſa fuit æqualiter. Si igitur F, non eſt centrum, ſit punctum G, extra rectam B D, centrum, à quo ducantur lineæ G A, G E, G C. Quoniam ergo latera A E, E G, trianguli A E G, æqualia ſunt lateribus C E, E G, trianguli C E G; & baſis

10. pri.

A G, baſi

Digitized by Google

a 8.pri. A G, baſi C G; (à centro enim duci dicuntur) a erunt anguli A E G, C E G, æquales, ideoq; recti; Erat autem & angulus A E F, rectus ex conſtructione. Igitur recti A E F, A E G, æquales ſunt, pars & totum. quod eſt abſurdum. Non eſt ergo punctum G, centrum; eademq; eſt ratio de omni alio. Quare F, centrum erit. Itaq; dati circuli centrum reperimus. Quod erat faciendum.

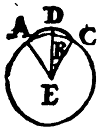
COROLLARIVM.

HINC manifeſtum eſt, ſi in circulo recta aliqua linea aliquam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos ſecet, in ſecante eſſe centrum circuli. Nam ex eo, quod B D, recta rectam A C, bifariam ſecat in E, & ad angulos rectos, oſtenſum fuit, punctũ eius medium F, neceſſariò eſſe circuli centrum.

THEOR. 1. PROPOS. 2.

SI in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint; Recta linea, quæ ad ipſa puncta adiungitur, intra circulum cadet.

IN circulo A B C, ſumantur quælibet duo puncta A, & C, in eius circumferentia. Dico rectam ex A, in C, ductã cadere intra circulum, ita vt ipſum ſecet. Si enim non cadit intra, cadat extra, qualis eſt linea A D C, recta; vt vult aduerſarius. Inuento b igitur centro E, duca-



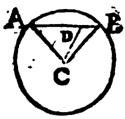
b 1. tertij. tur ab eo ad puncta aſſumpta A, & C; nec non ad quoduis punctum D, in recta A D C, lineæ rectæ E A, E C, E D, ſecetq; E D, circumferentiam in B. Quoniam ergo duo latera E A, E C, trianguli, cuius baſis ponitur recta A D C, æqualia ſunt, (è
c 5. pri. centro enim ducuntur) c erunt anguli E A D, E C D, æquales;
d 16. pri. Eſt autem angulus E D A, d angulo E C D, maior, externus interno oppoſito, cùm latus C D, in triangulo E C D, ſit productum ad A. Igitur & angulo E A D, maior erit idem angulus E D A. Quare recta E A, maiori angulo A D E, oppoſita, hoc eſt, recta
e 19. pri. E B, ſibi æqualis, e maior erit, quàm recta E D, minori angulo D A E, oppoſita, pars quàm totum Quod eſt abſurdum. Non igitur recta ex A, in C, ducta extra circulum cadet, ſed intra. Eodem enim modo demonſtrabitur, rectam ductam ex A, in C, non poſſe cadere ſuper arcum A B C, ita vt eadem ſit, quæ circumferentia A B C. Eſſet enim recta E A, maior, quàm recta E B Quod etiam ex definitione rectæ lineæ patet, cùm A B C, arcus ſit linea curua, non autem recta. Itaque ſi in circuli peripheria duo quælibet puncta, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

IDEM hoc theorema demonſtrari poterit affirmatiuè, hoc modo. Recta AB, coniungat duo puncta A, & B, in circumferentia circuli

AB.

ad B, etiam centrum C. Dico rectam AB, intra circulum cadere, ita vt omnia eius puncta media intra circulum exiſtant. Aſſumatur enim quodcunque eius punctum intermedium D, & ex centro educantur rectæ CA, CB, CD. Quoniam igitur duo latera CA, CB, trianguli CAB, æqualia ſunt, a erunt anguli CAB, CBA, æquales: Eſt autem angulus CDA, b angulo CBA, maior, externus interno. Igitur idem angulus CDA, angulo CAD, maior erit, & ob id latus CA, c latere CD, maius erit. Quare cùm CA, ſit ducta à centro ad circumferentiam, vſque, non perueniet recta CD, ad circumferentiam, ideoq; punctum D, intra circulum cadet. Idem oſtendetur de quolibet alio puncto aſſumpto. Tota igitur recta AB, intra circulum cadet. Quod eſt propoſitum.



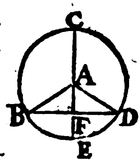
a 5. pri.
b 16. pri.
c 19. pri.

COROLLARIVM.

HINC eſt manifeſtum, lineam rectam, quæ circulum tangit, ita vt eum non ſecet, in vno tantùm puncto ipſum tangere. Si enim in duobus punctis eum tangeret, d caderet pars rectæ inter ea duo puncta poſita intra circulum. Quare circulum ſecaret, quod eſt contra hypotheſin. d 2. ter.

THEOR. 2. PROPOS. 3. iij.

SI in circulo recta quædam linea per centrum extenſa quandam non per centrum extenſam bifariam ſecet; & ad angulos rectos ipſam ſecabit. Et ſi ad angulos rectos eam ſecet, bifariam quoque eam ſecabit.



PER centrum A, circuli BCD, recta CE, extenſa diuidat rectam BD, non per centrum extenſam, bifariam in F. Dico rectam AF, eſſe ad angulos rectos ipſi BD. Ductis enim rectis AB, AD, erunt duo latera AF, FB, trianguli AFB, duobus AF, FD, trianguli AFD, æqualia; & baſes AB, AD, æquales. e Igitur anguli AFB, AFD, æquales erunt, hoc eſt, recti. Quod erat primò propoſitum. e 8. pri.

SIT iam AF, ad angulos rectos ipſi BD. Dico rectam BD, bifariam ſecari in F, à recta CE. Ductis enim iterum rectis AB, AD; cùm latera AB, AD, trianguli ABD, ſint æqualia, f erunt anguli ABD, ADB, æquales. Quoniam igitur duo anguli AFB, ABF, trianguli ABF, æquales ſunt duobus angulis AFD, ADF, trianguli ADF; & latera AB, AD, quæ rectis angulis æqualibus opponuntur, æqualia quoque; g erunt latera FB, FD, æqualia. Quod ſecundò proponebatur. Si igitur in circulo recta quædam linea per centrum extenſa, &c. Quod demonſtrandum erat.

f 5. pri.
g 26. pri.

FACILE quoque demonſtrari poterat ſecunda hæc pars, quæ quidem conuerſa eſt primæ partis, hac ratione. Si enim AF, perpendicularis eſt ad BD, erit tam quadratum rectæ AB,

æqua-

Digitized by Google

247.pri a æquale quadratis rectarum A F, F B, quàm quadratum rectæ
mi. A D, quadratis rectarum A F, F D. Cùm igitur quadratum rectæ A B, æquale ſit quadrato rectæ A D; erunt & quadrata rectarum A F, F B, æqualia quadratis rectarum A F, F D. Quare dempto cõmuni quadrato rectæ A F, remanebunt quadrata rectarum F B, F D, æqualia; atque idcirco & rectæ F B, F D, æquales erunt.

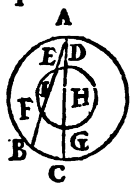
COROLLARIVM.

EX hac demonſtratione facilè inferemus, in quouis triangulo duorum laterum æqualium, ſiue æquilaterum illud ſit, ſiue Iſoſceles, lineam, quæ baſin bifariam ſecet, perpendicularem eſſe ad baſin. Et contrà, lineam, quæ ad baſin ſit perpendicularis, baſin ſecare bifariam. Nam in triangulo A B D, cuius duo latera A B, A D, æqualia ſunt, atque adeò ex centro A, per B, D, circulus deſcribi poteſt: ex eo, quod recta A F, ſecat baſin B D, bifariam, oſtenſum eſt, angulos ad F, eſſe rectos: Et ex eo, quòd anguli ad F, recti ſunt, demonſtratum eſt, baſin B D, à recta A F, bifariam ſecari. Sed hoc etiam demõſtrauimus ad propoſ. 26. lib. 1. & quidem vniuerſalius.

SCHOLIVM.

CENSEMVS quoque, demonſtrandum eſſe hoc loco ſequens theorema, ad ea, quæ ſequuntur, non inutile; videlicet.

DVOBVS circulis ex eodem centro deſcriptis, ſi ab aliquo puncto circumferentiæ exterioris recta ducatur interioris circumferentiam ſecans; erunt eius ſegmenta inter vtramque circumferentiam poſita, inter ſe æqualia.



DVO circuli A B C, D E F G, habeant idem centrum H, & ex puncto A, ducatur primùm per centrum H, recta A C, ſecans circumferentiam interiorem in D, G. Dico rectas A D, C G, æquales eſſe. Nã
b15.def. *ſi ex H A, H C, quæ* b *æquales ſunt, demantur H D,*
c4.pronun. *H G, quæ eadem ratione æquales ſunt,* c *erunt rectæ A D, C G, æquales.*

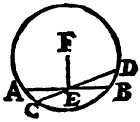
DEINDE ex eodem puncto A, ducatur recta A B, non per centrum, ſecans interiorem circumferentiam in E, F. Dico rurſus, rectas
d12.pri. *A E, B F, eſſe æquales.* d *Ducta enim ex centro H, ad A B perpendi-*
e3.ter. *cularis H I,* e *ſecabit hæc tam rectam A B, in circulo A B C, quàm rectam E F, in circulo D E F G, bifariam. Ablatis igitur æqualibus*
f3.pron. *I E, I F, ex æqualibus I A, I B,* f *remanebunt A E, B F, æquales. quod eſt propoſitum.*

iiij. THEOR. 3. PROPOS. 4.

SI in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuò ſecent non per centrum extenſæ; ſeſe mutuò bifariam non ſecabunt.

DV

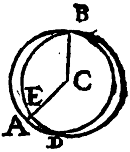
DVÆ rectæ A B, C D, ſe mutuò in E, ſecent in circulo ACBD, non per centrum extenſæ. Dico fieri non poſſe, vt mutuò ſeſe bifariam ſecent. Si enim vna earum per centrum tranſit, certum eſt, eam bifariam non ſecari: ſolùm enim in centro, per quod altera ponitur non tranſire, bifariam diuiditur: Si verò neutra per centrum extenditur, quamuis vna earum nonnunquam bifariam ab altera diuidatur, tamen altera minimè ſecabitur bifariam. Diuiſa enim ſit & A B, & C D, ſi fieri poteſt, bifariam in E. *a* Inuento igitur centro circuli F, ducatur ab eo ad E, recta F E. a 1. *ter.*



Quoniam ergo F E, ponitur ſecare rectam A B, bifariam in E, *b* ſecabit ipſam ad angulos rectos. b 3. *ter.* Eadem ratione ſecabitur C D, ad angulos rectos, cùm ponatur bifariam diuidi in E. Quare rectus angulus F E D, recto angulo F E B, æqualis eſt, pars toti, quod eſt abſurdum. Itaque ſi in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuò ſecent, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 4. PROPOS. 5. v.

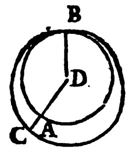
SI duo circuli ſeſe mutuò ſecent; non erit illorum idem centrum.



DVO circuli A B D, E B D, ſe mutuò ſecent in B, & D. Dico ipſos non habere idem centrum. Sit enim, ſi fieri poteſt, idem centrum vtriuſque, C, à quo duæ rectæ ducantur; C B, quidem ad ſectionem B; C A, verò ſecans vtramq; circumferentiam in A, & E. Quoniam igitur C, centrum ponitur circuli E B D, erit recta E C, rectæ B C, æqualis. Rurſus quia C, centrum quoque ponitur circuli A B D, erit & recta A C, eidem rectæ B C, æqualis. Quare rectæ E C, A C, *c* æquales inter ſe erunt, c 1 *pron.* pars, & totum, quod eſt abſurdum. Si igitur duo circuli ſeſe mutuò ſecent, &c. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 5. PROPOS. 6. vj.

SI duo circuli ſeſe mutuò interius tangant; eorum non erit idem centrum.



DVO circuli A B, B C, ſe interius tangant in B. Dico eos non habere idem centrum. Habeant enim, ſi fieri poteſt, idem centrum D, à quo duæ rectæ ducantur; D B, quidem ad tactum B. At D C, ſecans vtramq; circumferentiam in A, & C. Quoniam igitur D, ponitur centrum circuli A B, erit recta A D, rectæ B D, æqualis. Rurſus quia D, ponitur centrum circuli B C, erit recta C D, eidem rectæ B D, æqualis. Quare rectæ A D, & C D; *d* inter ſe erunt æquales, pars & totum, quod eſt abſurdum. d 1. *pronun.*

Digitized by Google

ſurdum. Si igitur duo circuli ſeſe mutuò interius tangant, &c. Quod demonſtrandum erat.

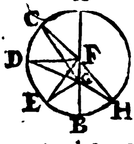
SCHOLIVM.

EVCLIDES propoſuit theorema hoc de circulis ſeſe interius tangentibus duntaxat, quoniam circulorum exterius ſeſe tangentium, cùm vnus ſit extra alium, non poſſe eſſe idem centrum, manifeſtum eſt.

vij. THEOR. 6. PROPOS. 7.

SI in diametro circuli quodpiam ſumatur punctum, quod circuli centrum non ſit, ab eoque puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant: Maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima verò reliqua; aliarũ verò propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore ſemper maior eſt: Duæ autem ſolùm rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad vtraſq; partes minimæ, vel maximæ.

IN diametro A B, circuli A C D E B, cuius centrum F, punctum aſſumatur quodcunque G, præter centrum, & ex G, cadant in circulum quotcunque lineæ G C, G D, G E. Dico omnium, quæ ex G, ad circumferentiam ducuntur, maximam eſſe G A, in qua eſt centrum, minimam verò reliquam G B, quæ diametrum perficit: Deinde rectam G C, quæ rectæ G A, per centrum ductæ propinquior eſt, maiorem recta G D, quæ ab eadem G A, plus diſtat; & eadem ratione G D, maiorem recta G E, atque ita de aliis lineis, ſi ducerentur, in infinitum. Denique ex G, ad vtraſque partes minimæ lineæ G B, vel maximæ G A, duci poſſe tantummodò duas



lineas inter ſe æquales. Ducantur è centro F, ad C, D, & E, rectæ lineæ F C, F D, F E. Quoniam igitur duo latera G F, F C, trianguli G F C, a maiora ſunt latere G C. Sunt autem rectæ G F, F C, æquales rectis G F, F A, hoc eſt, toti rectæ G A; erit & G A, maior quàm G C. Eadem ratione maior erit recta G A, quàm G D, & quàm G E. Quare G A, maxima eſt omnium, quæ ex G, in circulum cadunt.

a 20. primi.

DEINDE, quoniam in triangulo E F G, latus E F, b minus eſt duobus lateribus F G, G E. Eſt autem E F, ipſi F B, æqualis; erit & F B, minor duabus rectis F G, G E. Dempta ergo communi recta F G, remanebit adhuc G B, minor, quàm G E. Eadem ratione minor erit G B, quàm G D, & quàm G C. Quare G B, minima eſt omnium, quæ ex G, in circuli circumferentiam cadunt.

b 20. pri.

RVRSVS, quia duo latera G F, F C, trianguli G F C, æqualia ſunt

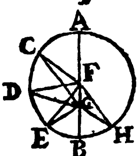
Digitized by Google

uat duobus lateribus G F, F D, trianguli G F D; & angulus totus
G F C, maior eſt angulo G F D; *a* erit baſis G C, maior baſe G D. a 24. pri-
Eadem ratione maior erit G C, quàm G E: Item maior erit G D, mi.
quàm G E. Quare linea propinquior ei, quæ per centrùm duci-
tur, maior eſt ea, quæ remotior.

FIAT iam angulo B F E, ex altera parte æqualis angulus
B F H, & ducatur recta G H Quoniam igitur latera E F, F G, trian-
guli E F G, æqualia ſunt lateribus H F, F G, trianguli H F G, & an-
guli his lateribus contenti E F G, H F G, æquales; *b* erunt rectæ b 4. pri.
G E, G H, ex vtraque parte ipſius lineæ minimæ G B, vel maximæ
G A, æquales inter ſe. Quòd autem nulla alia his duabus poſſit
eſſe æqualis, conſtat. Nam ſi ex G, ducatur alia, quæ cadat ſupra
punctum H, erit ea, cùm ſit ei, quæ per centrum ducitur, propin-
quior, maior quàm G H: ſi verò cadat infra H, erit ea, cùm ſit re-
motior ab eadem G A, per centrum ducta, minor quam G H, vt
oſtenſum fuit. Duæ igitur duntaxat rectæ lineæ æquales ad vtraſ-
que partes minimæ G B, vel maximæ G A, cadunt. Itaque ſi in
diametro circuli quodpiam ſumatur punctum, &c. Quod erat de-
monſtrandum.

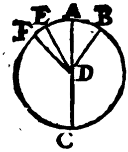
SCHOLIVM.

*QVANQVAM autem Euclides ſolùm demonſtrauerit, li-
neam, quæ propinquior eſt rectæ per centrum ductæ, remotiore eſſe ma-
iorem, ſi ambæ lineæ ex eadem parte diametri A B,
exiſtant: idem tamen verum etiam eſt, ſi ad diuer-
ſas partes ductæ ſint. Vt ſi quis dicat, rectam G D,
propinquiorem eſſe rectæ G A, quàm rectam G H;
dico G D, maiorem eſſe, quam G H. Si namque ipſi
G H, ex altera parte æqualis ducatur G E, vt dictũ
eſt, nempe ſi fiat angulo G F H, æqualis angulus G F E, &c. cadet
punctum E, inter D, & B; quod G H, G E, æqualiter à G A, diſtent, ob
æqualitatem angulorum G F H, G F E; & G D, ponatur minùs diſta-
re quàm G H, ac proinde minùs, quàm G E. Cùm c ergo G D, maior* c 7. ter.
ſit, quàm G E, maior quoque erit eadem G D, quàm G H.



HANC porrò propoſitionem nonnulli conuertunt, hoc modo.

SI intra circulum punctum ſumatur, ab eoque pun-
cto in circulum rectarum linearum cadentium, vna qui-
dem maxima ſit, vna verò minima; & reliquarum aliæ
ſint inæquales, aliæ æquales: Maxima quidem per cen-
trum tranſibit, minima verò erit reliqua pars diametri;
& aliarum maiores quidem erunt maximæ propinquio-
res, æquales autem ab eadem maxima, vel minima æqua-
liter diſtabunt.



IN circulo A B C, punctum ſumatur D, à quo rectæ quotcunque D A, D C, D E, D F, D B, cadant in circumferentiam, quarum omnium maxima ſit D A, minima verò D C; ipſarum verò D E, D F, maior ſit D E; denique D E, D B, ſint æquales. Dico D A, per centrum tranſire, & D C, reliquam partem eſſe diametri, hoc eſt, D C, ipſi D A, eſſe in directum. Item D E, quæ maior ponitur quàm D F, propinquiorem eſſe maximæ D A, quàm D F. Denique D E, D B, æqualiter ab eadem D A, vel D C, abeſſe. Primùm enim ſi D A, non tranſit per centrum; ducta ex D, per centrum recta
a 7. ter. *quæpiam linea, a erit ea omniũ ex D, cadentium maxima. Quod eſt abſurdũ; cùm D A, maxima ponatur. Tranſit ergo D A, per centrum.*

DEINDE ſi D C, non eſt in directum ipſi D A; protracta A D,
b 7. ter. *in directum, b erit alia recta quàm D C, ex D, cadens, nempe pars ipſius A D, protracta, omnium minima; Quod eſt abſurdum; cùm D C, minima ponatur. Eſt ergo D C, reliqua pars diametri.*

RVRSVS ſi D E, non eſt vicinior maximæ D A, quàm D F; aut æqualiter diſtabunt ab ea, aut D E, longiùs ab ea aberit: Si æqualiter
c 7. ter. *vtrinq; à D A, dicantur diſtare, c ipſæ erunt æquales; quod eſt abſurdum. Ponitur enim D E, maior. Si verò æqualiter ex eadem parte à D A, diſtare dicantur, erunt D E, D F, vna eademq; linea; atq; adeò D E, maior non erit, quàm D F; quod eſt contra hypotheſin. Quod ſi*
d 7. ter. *D F, dicatur eſſe propinquior maximæ D A, d ipſa erit maior, quàm D E. Quod magis eſt abſurdum.*

POSTREMO ſi D E, D B, non æqualiter diſtant à D A, vel
e 7. ter. *D C, e erit ea, quæ magis à D A, diſtat, reliqua minor. Quod eſt abſurdum. Ponuntur enim æquales D E, D B.*

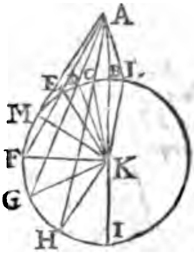
viij. THEOR. 7. PROPOS. 8.

SI extra circulum ſumatur punctum quodquiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ verò vt libet: In cauam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem eſt illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum tranſit, remotiore ſemper maior eſt; In conuexam verò peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem eſt illa, quæ inter punctum, & diametrum interponitur; aliarũ autem ea, quæ propinquior eſt minimæ, remotiore ſemper minor eſt. Duæ autem tantùm rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipſum circulum cadunt, ad vtraſq; partes minimæ, vel maximæ.

EX

Digitized by Google

EX puncto A, extra circulum B C D E, cuius centrum K, lineæ ſecantes circulum ducantur, quarum A I, per centrum tranſeat, aliæ verò A H, A G, A F, vtcunque. Dico omnium eſſe maximam A L, quæ per centrum incedit: Deinde rectã A H, quæ rectæ A I, quæ per centrum ducitur, propinquior exiſtit, maiorem recta A G, quæ remotior eſt ab eadem A I: Et eadem ratione A G, maiorem quàm A F. E contrario autem, rectam A B, omnium, quæ extra circulum ſunt, minimam eſſe: Deinde rectam A C, quæ vicinior eſt minimæ A B, minorem eſſe recta A D, remotiore; Et eadem ratione, ipſam A D, minorem, quàm A E. Denique ex A, ad vtraſque partes minimæ lineæ A B, vel maximæ A I, duci poſſe tantummodò duas lineas rectas inter ſe æquales. Ducantur ex centro K, ad puncta C, D, E, F, G, H, rectæ K C, K D, K E, K F, K G, K H. Quoniã igitur duo latera A K, K H, trianguli A K H, *a* maiora ſunt recta A H, Sunt autem rectæ A K, K H, æquales rectis A K, K I, hoc eſt, toti rectæ A I; erit & A I, maior quam A H. Eadem ratione erit A I, maior, quàm A G, & quàm A F. Quare A I, eſt omnium, quæ ex A, in circulum cadunt, maxima.



a 20. primi.

DEINDE, quoniam latera A K, K H, trianguli A K H, æqualia ſunt lateribus A K, K G, trianguli A K G; Et angulus totus A K H, maior eſt angulo A K G; *b* erit baſis A H, baſe A G, maior. Eadem ratione maior erit A H, quàm A E: Item A G, maior, quàm A F. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, maior eſt linea remotiore.

b 24. primi.

RVRSVS, quia in triangulo A C K, recta A K, *c* minor eſt duabus A C, C K; ſi auferantur æquales B K, C K: remanebit adhuc A B, minor, quàm A C. Simili ratione erit A B, minor, quàm A D, & quàm A E. Quare A B, omnium linearum extra circulum, quæ ex A, ducuntur, minima eſt.

c 20. primi.

RVRSVS, cùm intra triangulum A D K, cadant duæ rectæ A C, C K, ab extremitatibus lateris A K; *d* erunt A C, C K, minores, quàm A D, D K, Sublatis igitur æqualibus C K, D K, remanebit adhuc A C, minor quàm A D. Pari ratione erit A C, minor, quàm A E: Item A D, minor quàm A E. Quare linea propinquior minimæ lineæ A B, minor eſt, quàm remotior ab eadem.

d 21. primi.

POSTREMO fiat angulo A K C, angulus A K L, æqualis, & ducatur recta A L. Quoniam igitur latera A K, K C, trianguli A K C, æqualia ſunt lateribus A K, K L, trianguli A K L; Sunt autem & anguli A K C, A K L, dictis lateribus contenti æquales; *e* erunt rectæ A C, A L, ex vtraque parte minimæ A B, vel maximæ

e 4. primi.

 A I, in-

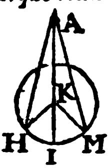
Digitized by Google

A I, inter ſe æquales. Quòd autem nulla alia his poſſit eſſe æqualis, conſtat. Nam ſi ex A, ducatur recta cadens vltra L, erit ipſa, cùm ſit remotior a minima, maior quàm A L. Quod ſi cadat inter B, & L, erit ea, cùm ſit minimæ propinquior, minor quàm AL, vt oſtenſum eſt. Duæ igitur ſolùm rectæ lineæ æquales ad vtraſque partes minimæ, vel maximæ cadunt. Si igitur extra circulum ſumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

EADEM ratione ab A, in peripheriam concauam duæ tantùm lineæ æquales cadent, ad vtraſque partes maximæ A I.

FIAT enim angulo A K H, æqualis angulus A K M, iungaturque recta A M. Quia igitur latera A K, K H, æqualia ſunt lateribus A K, K M; ſunt autem & anguli A K H, A K M,



a 4. pri. *æquales: a erunt baſes A H, A M, æquales. Neque verò vlla alia his duabus æqualis exhiberi poteſt. Nam quæcunque ex A, ducatur ad partes H; ea vel maior erit, vel minor, quàm A H, prout citra vel vltra rectam A H, ducta fuerit, vt manifeſtum eſt ex demonſtratione theorematis.*

HÆC propoſitio vera etiam eſt, quando vna linearum ex A cadentium circulum tangit. Hæc enim quia longiùs à linea per centrum ducta abeſt, minor erit omnibus alijs in cauam peripheriam cadentibus, qualis eſt recta A M, in priori figura. Nam ducta recta K M, ex centro ad contactum, erunt duo latera A K, K F, trianguli A K F, æqualia duobus lateribus A K, K M, trianguli A K M, angulus verò
b 24. pri *A K F, angulo A K M, maior. Igitur b baſis A F, baſe A M, maior*
mi. *erit. Eadem ratione maior erit quæcunque alia in cauam peripheriam cadens, quàm recta A M.*

PARI ratione eadem linea tangens A M, maior erit omnibus alijs in conuexam peripheriam cadentibus. Nam cùm duo latera A E,
c 21. pri. *E K, c minora ſint duobus lateribus A M, M K: ſi auferantur æquales rectæ K E, K M, erit reliqua A E, minor quàm reliqua A M. Eademq́ ratio eſt de cæteris.*

QVAMQVAM verò Euclides ſolùm demonſtrauerit, lineam propinquiorem ei, quæ per centrum ducitur, maiorem eſſe remotiore: Item lineam propinquiorem minimæ minorem eſſe remotiore, ſi ambæ lineæ ex eadem parte maximæ, vel minimæ exiſtant: idem tamen verum etiam eſt, ſi ad diuerſas partes ductæ ſint. Quod non aliter demonſtrabitur, quàm idem in ſcholio præcedentis propoſitionis de duabus lineis ad diuerſas partes ductis demonſtratum fuit.

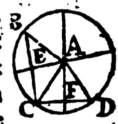
THEOR.

Digitized by Google

THEOR. 8. PROPOS. 9.

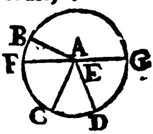
SI in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quàm duæ, rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum eſt ipſius circuli.

A puncto aſſumpto A, in circulo B C D, cadant plures rectæ, quàm duæ, A B, A C, A D, inter ſe æquales. Dico A, punctum eſſe centrum circuli. Connectantur enim puncta B, C, D, rectis B C, C D; quibus diuiſis bifariam in E, & F, ducantur ex A, rectæ A E, A F. Quoniã igitur latera A E, E B, trianguli A E B, æqualia ſunt lateribus A E, E C, trianguli A E C; & baſes A B, A C, ponuntur etiam æquales; a erunt anguli A E B, A E C, æquales, ideoque recti. Eodem modo oſtendemus, angulos ad F, eſſe rectos. Quare cùm rectæ A E, A F, diuidant rectas B C, C D, bifariam, & ad angulos rectos, tranſibit vtraque producta per centrum circuli, per corollarium propoſ. 1. huius lib. Punctum igitur A, in quo ſe mutuò ſecant, centrum erit circuli. Si enim eſſet aliud punctum centrum, non tranſiret vtraque per centrum. Si itaque in circulo acceptum fuerit punctum, &c. Quod demonſtrandum erat.



a 8. pri.

ALITER. Si punctum A, non eſt centrum circuli, b ſit centrum inuentum E, ex quo per A, agatur diameter F G. Quoniam igitur in diametro F G, præter centrum acceptum eſt punctum A, à quo in circumferentiam cadunt rectæ A D, A C; c erit recta A D, quæ propinquior eſt rectæ A G, per centrum E, ductæ maior, quàm recta A C, remotior ab A G, quod eſt abſurdum. Poſitæ ſunt enim æquales rectæ A D, A C. Idem abſurdum ſequetur, ſi aliud punctum præter A, centrum ponatur.



b 1. tert.
c 7. tert.

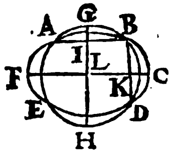
QVOD ſi quando recta per centrum E, & punctum A, ducta coincidat cum vna trium æqualium datarum, vt ſi dicantur æquales tres A B, A F, A C, vbi E A, coincidit cum A F; d erit A F, omnium à puncto A, cadentium minima, atque adeò minor, quam A B, & A C. quod eſt abſurdum. Ponitur enim vtriq; æqualis.

d 7. tert.

THEOR. 9. PROPOS. 10.

CIRCVLVS circulum in pluribus, quàm duobus, punctis non ſecat.

SECET enim, ſi fieri poteſt, circulus A B C D E F, circulum AGBDHE, in pluribus, quàm duobus, punctis A, B, & D, quæ inn-



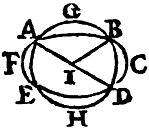
a 10. pri. gantur rectis A B, B D: quibus *a* biſariam diuiſis in I, & K, *b* educantur ex I, & K, ad A B, & B D, perpendiculares I L, K L. Quoniam igitur rectæ I L, K L, ſecant rectas A B, B D, in circulo A G B D H E, biſariam, & ad angulos rectos; tranſibit vtraque, ex corollario propoſ. 1. huius lib. per centrum ipſius. Quare punctum L, in quo ſe diuidunt, erit centrum dicti circuli. Eodem modo demonſtrabimus, punctum L, eſſe centrum circuli A B C D E F. Duo igitur circuli ſe mutuò ſecantes idem poſſident centrum, *c* quod eſt abſurdum. Circulus ergo circulum in pluribus, quàm duobus punctis non ſecat, Quod erat demonſtrandum.

b 11. pri.

c 5. ter.

ALITER. Secent ſe ijdem duo circuli, ſi fieri poteſt, in tribus

d 1. ter. punctis A, B, & D. *d* Inuentum autem ſit I, centrum circuli A G B D H E, à quo ad dicta tria puncta ducantur rectæ I A, I B, I D, quæ per defin. circuli æquales erunt inter ſe. Quoniam igitur intra circulum A B C D E F, aſſumptum eſt punctum I, à quo cadunt in circumferentiam plures, quàm



e 9. ter. duæ, rectæ æquales, *e* erit I, centrum circuli A B C D E F. Erat autem idem punctum I, centrum circuli A G B D H E. Duo ergo

f 5. ter. circuli ſe mutuò ſecantes habent idem centrum. *f* Quod eſt abſurdum.

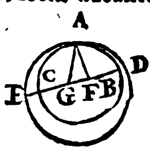
xj. THEOR. 10. PROPOS. 11.

SI duo circuli ſeſe intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra; ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet.

TANGAT circulus A B C, circulum A D E, intus in A, & ſit F, centrum circuli A B C, & G, centrum circuli A D E, quod neceſſariò ab illo diuerſum erit, cùm duo circuli interius ſe tangen-

g 6. ter. tes, *g* non poſſint idem centrum habere. Dico rectam extenſam per G, & F, cadere in contactum A. Si enim non cadit, ſecet vtrumque circulum in punctis D, B, C, E, & ex contactu A, ad centra F, G, rectæ ducantur A F, A G. Quoniam igitur in triangulo A F G,

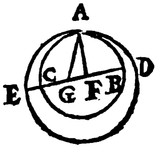
h 20. pri. duo latera G F, F A, *h* maiora ſunt latere G A; Eſt autem G A, rectæ rectæ G D, æqualis; (quod G. poſitum ſit centrum circuli A D E) erunt & G F, F A, rectæ maiores recta G D. Dempto igitur communi G F, remanebit F A, maior, quàm F D. Quare cùm F A, æqualis ſit ipſi F B; (quod F, poſitum fuerit centrum circuli A B C) erit & F B, maior, quàm F D, pars quàm totum, quod eſt abſurdum.



QVOD ſi quis velit contendere F, eſſe centrum circuli A D E,

Digitized by Google

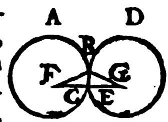
A D E, & G, centrum circuli A B C, inſtituetur argumentatio hac ratione. In triangulo A F G, duo latera F G, G A, *a* maiora ſunt latere F A: Eſt autem recta F A, rectæ F E, æqualis. (cum F, ponatur centrum circuli A D E.) Igitur rectæ F G, G A, maiores ſunt recta F E. Dempta ergo communi F G, remanebit G A, maior, quam G E. Quia igitur G A, æqualis eſt ipſi G C: (propterea quod G, ponitur eſſe centrum circuli A B C,) erit quoq; G C maior, quam G E, pars quam totum, quod eſt abſurdum. Idem abſurdum ſequetur, ſi centrum maioris circuli extra minorem ponatur. Non ergo recta F G, extenſa vtrumque circulum ſecabit, ſed in contactum A, cadet. Quare ſi duo circuli ſeſe intus cõtingant, &c. Quod erat demonſtrandum. a 20. *primi.*



THEOR. 11. PROPOS. 12. xj.

SI duo circuli ſeſe exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactũ tranſibit.

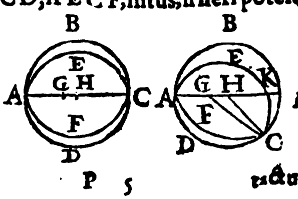
CIRCVLI duo A B C, D B E, tangant ſe exterius in B, & centrum circuli A B C, ſit F, circuli verò D B E, centrum ſit G. Dico rectam extenſam per F, & G, tranſire per contactum B. Si enim non tranſit, ſecet circumferentias in C, & E, ducanturque à centris F, G, ad B, contactum rectæ F B, G B. Quoniam igitur in triangulo F B G, latera duo B F, B G, *b* maiora ſunt latere F G: Eſt autem recta B F, rectæ F C, æqualis: (quod F, ponatur centrum circuli A B C,) & recta G B, rectæ G E, æqualis; (quod G, ponatur centrum circuli D B E,) erunt & rectæ F C, G E, maiores quam recta F G, pars quam totum, (cum F G, contineat præter F C, G E, rectam adhuc C E,) quod eſt abſurdum. Si igitur duo circuli ſeſe exterius contingant, &c. Quod erat demonſtrandum. b 20. *primi.*



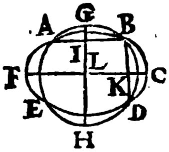
THEOR. 12. PROPOS. 13. xij.

CIRCVLVS circulum non tangit in pluribus punctis, quam vno, ſiue intus, ſiue extra tangat.

TANGANT ſeſe circuli A B C D, A E C F, intus, ſi fieri poteſt, in pluribus punctis, quam vno, A, & C: Aſſumantur autem centra horum circulorũ G, H, *c* quæ diuerſa erunt, per quæ recta G H, in vtramque partem extendatur, quam neceſſe eſt *d* cadere in con- c 6. *tert.* d 11. *ter.*

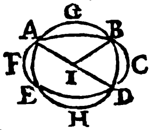


a 10. pri.
b 11. pri.



gantur rectis AB, BD: quibus *a* bifariam diuiſis in I, & K, *b* educantur ex I, & K, ad AB, & BD, perpendiculares IL, KL. Quoniam igitur rectæ IL, KL, ſecant rectas AB, BD, in circulo AGBDHE, bifariam, & ad angulos rectos; tranſibit vtraque, ex corollario propoſ. 1. huius lib. per centrum ipſius. Quare punctum L, in quo ſe diuidunt, erit centrum dicti circuli. Eodem modo demonſtrabimus, punctum L, eſſe centrum circuli ABCDEF. Duo igitur
c 5. ter. circuli ſe mutuò ſecantes idem poſſident centrum, *c* quod eſt abſurdum. Circulus ergo circulum in pluribus, quàm duobus punctis non ſecat, Quod erat demonſtrandum.

ALITER. Secent ſe ijdem duo circuli, ſi fieri poteſt, in tribus
d 1. ter. punctis A, B, & D. *d* Inuentum autem ſit I, centrum circuli AGBDHE, à quo ad dicta tria puncta ducantur rectæ IA, IB, ID, quæ per defin. circuli æquales erunt inter ſe. Quoniam igitur intra circulum ABCDEF, aſſumptum eſt punctum I, à quo cadunt in circumferentiam plures, quàm



e 9. ter. duæ, rectæ æquales, *e* erit I, centrum circuli ABCDEF. Erat autem idem punctum I, centrum circuli AGBDHE. Duo ergo
f 5. ter. circuli ſe mutuò ſecantes habent idem centrum. *f* Quod eſt abſurdum.

xj. THEOR. 10. PROPOS. 11.

SI duo circuli ſeſe intus contingánt, atque accepta fuerint eorum centra; ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet.

TANGAT circulus ABC, circulum ADE, intus in A, & ſit F, centrum circuli ABC, & G, centrum circuli ADE, quod neceſſariò ab illo diuerſum erit, cùm duo circuli interius ſe tangen-
g 6. ter. tes, *g* non poſſint idem centrum habere. Dico rectam extenſam per G, & F, cadere in contactum A. Si enim non cadit, ſecet vtrumque circulum in punctis D, B, C, E, & ex contactu A, ad centra F, G, rectæ ducantur AF, AG. Quoniam igitur in triangulo AFG,
h 20. pri. duo latera GF, FA, *h* maiora ſunt latere GA; Eſt autem GA, recta rectæ GD, æqualis; (quod G. poſitum ſit centrum circuli ADE) erunt & GF, FA, rectæ maiores recta GD. Dempto igitur communi GF, remanebit FA, maior, quàm FD. Quare cùm FA, æqualis ſit ipſi FB; (quod

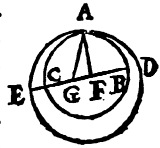


F, poſitum fuerit centrum circuli ABC) erit & FB, maior, quàm FD, pars quàm totum, quod eſt abſurdum.

QVOD ſi quis velit contendere F, eſſe centrum circuli ADE,

Digitized by Google

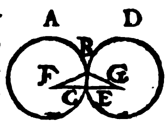
ADE, & G, centrum circuli A B C, inſtituetur argumentatio hac ratione. In triangulo A F G, duo latera F G, G A, *a* maiora ſunt latere F A: Eſt autem recta F A, rectæ F E, æqualis. (cum F, ponatur centrum circuli A D E.) Igitur rectæ F G, G A, maiores ſunt recta F E. Dempta ergo communi F G, remanebit G A, maior, quam G E. Quia igitur G A, æqualis eſt ipſi G C: (propterea quod G, ponitur eſſe centrum circuli ABC,) erit quoq; G C maior, quam G E, pars quam totum, quod eſt abſurdum. Idem abſurdum ſequetur, ſi centrum maioris circuli extra minorem ponatur. Non ergo recta F G, extenſa vtrumque circulum ſecabit, ſed in contactum A, cadet. Quare ſi duo circuli ſeſe intus cõtingant, &c. Quod erat demonſtrandum. *a 20. primi.*



THEOR. 11. PROPOS. 12. xj.

SI duo circuli ſeſe exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactũ tranſibit.

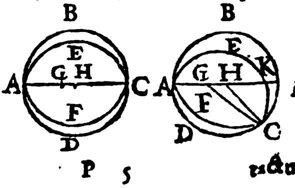
CIRCVLI duo A B C, D B E, tangant ſe exterius in B, & centrum circuli A B C, ſit F, circuli verò D B E, centrum ſit G. Dico rectam extenſam per F, & G, tranſire per contactum B. Si enim non tranſit, ſecet circumferentias in C, & E, ducanturque à centris F, G, ad B, contactum rectæ F B, G B. Quoniam igitur in triangulo F B G, latera duo B F, B G, *b* maiora ſunt latere F G: Eſt autem recta B F, rectæ F C, æqualis: (quod F, ponatur centrum circuli A B C,) & recta G B, rectæ G E, æqualis; (quod G, ponatur centrum circuli D B E,) erunt & rectæ F C, G E, maiores quam recta F G, pars quam totum, (cum F G, contineat præter F C, G E, rectam adhuc C E,) quod eſt abſurdum. Si igitur duo circuli ſeſe exterius contingant, &c. Quod erat demonſtrandum. *b 20. primi.*



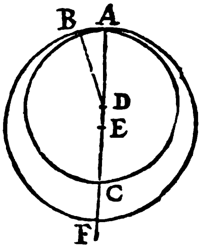
THEOR. 12. PROPOS. 13. xij.

CIRCVLVS circulum non tangit in pluribus punctis, quam vno, ſiue intus, ſiue extra tangat.

TANGANT ſeſe circuli A B C D, A E C F, intus, ſi fieri poteſt, in pluribus punctis, quam vno, A, & C: Aſſumantur autem centra horum circulorũ G, H, *c* quæ diuerſa erunt, per quæ recta G H, in vtramque partem extendatur, quam neceſſe eſt *d* cadere in con- *c 6. tert.* *d 11. tert.*



A E, æqualis eſt, maior quam E C: ac proinde punctum F, extra circulum A B C, exiſtet, circulusq́; A F, extra eundem circulum A B C,

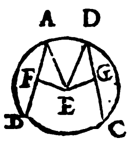


prope punctum F, exiſtet. Multo magis punctum F, extra circulum A B C, cadet, ſi E, extra eundem circulum A B C, exiſtet: Si igitur circulus A F, non totus extra circulum A B C, cadat, ita vt eum in ſolo puncto A, tangat; ſecet, vel tangat circulus A E, circulum A B C in alio puncto B, ſi fieri poteſt, ducaturque recta D B. Quoniam igitur in diametro circuli A F, ſumptum eſt punctum D, præter centrum E,
a 7. ter. *a erit D A, omnium rectarum ex D, cadentium minima. Minor eſt ergo D A, quam D B. quod eſt abſurdum. Sunt enim æquales rectæ D A, D B, cadentes ex centro D, in circumferentiam eiuſdem circuli A B C. Non ergo circulus A F, circulum A B C, ſecat aut tangit in alio puncto, quam in A, ſed totus extra illum cadit. Quod eſt propoſitum.*

QVOD ſi in ſemidiametro non producta punctum ſumatur citra centrum, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum ſemidiametri punctum deſcriptus tanget quoque priorem circulum in dicto puncto extremo ſemidiametri, totusq́; intra eundem cadet. Vt ſi in ſemidiametro A E, circuli A F, ſumatur punctum D, ex quo ad interuallum D A, circulus deſcribatur A B C, cadet hic totus intra illum, tangetq́; eum in ſolo puncto A. Cum enim oſtenſum proxime ſit, circulum A F, cadere totum extra circulum A B C, cadet viciſſim totus hic intra illum, ita vt ſe mutuo in ſolo puncto A, contingant.

xiiij. THEOR. 13. PROPOS. 14.

IN circulo æquales rectæ lineæ æqualiter diſtant à centro. Et quæ æqualiter diſtant à centro, æquales ſunt inter ſe.



SINT in circulo A B C D, cuius centrum E, duæ rectæ æquales A B, C D. Dico ipſas æqualiter diſtare à centro E. Ducantur enim ex E, centro ad rectas A B, C D, duæ perpendiculares E F,
b 3. ter. E G, & coniungantur rectæ E A, E D. *b* Secabunt rectæ E F, E G, rectas A B, C D, bifariam. Quare cum totæ A B, C D, æquales ponantur, erunt & dimidia earum, rectæ videlicet A F, D G, æqualia. Quoniam igitur quadrata rectarum E A, E D, æqualium, inter ſe ſunt æqualia; Quadratum
c 47. autem rectæ E A, *c* æquale eſt quadratis rectarum A F, F E; & qua-
tert. dratum rectæ E D, quadratis rectarum D G, G E: Erunt quoque quadra-

Digitized by Google

quadrata rectarum A F, F E, æqualia quadratis rectarum D G, G E. Ablatis ergo quadratis æqualibus æqualium rectarum A F, D G, remanebunt quadrata rectarum F E, G E, æqualia, ideoque & rectæ E F, E G, æquales erunt: Diſtant igitur per 4. defin. huius lib. rectæ A B, C D, æqualiter à centro E.

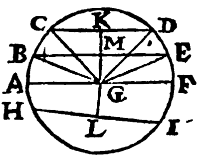
RVRSVS diſtent rectæ A B, C D, æqualiter à centro E. Dico eas inter ſe eſſe æquales. Ducantur enim iterum ex centro E, ad AB, CD, perpendiculares E F, E G, quæ per 4. defin. huius lib. æquales erunt; *a* diuidentque rectas A B, C D, bifariam. Ductis igitur rectis E A, E D, erunt earum quadrata æqualia: Eſt autem quadratum rectæ E A, *b* æquale quadratis rectarum A F, F E; & quadratum rectæ E D, æquale quadratis rectarum D G, G E. Igitur & quadrata rectarum A F, F E, æqualia ſunt quadratis rectarum D G, G E; ideoque ablatis æqualibus quadratis æqualium rectarum E F, E G, remanebunt quadrata rectarum A F, D G, æqualia; atque adeo rectæ A F, D G, ac propterea earum duplæ A B, C D, æquales quoque erunt. Itaque in circulo æquales rectæ lineæ æqualiter diſtant à centro, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 3. ter. *b 47. primi.*

THEOR. 14. PROPOS. 15. xiv.

IN circulo maxima quidem linea eſt diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore ſemper maior.

IN circulo A B C D E F, cuius centrum G, diameter ſit A F; & recta ei propinquior H I, remotior autem C D. Dico omnium eſſe maximam A F, & H I, maiorem, quam C D. Ducantur enim ex G, centro rectæ G K, G L, perpendiculares ad C D, H I. Et quia remotior eſt C D, à centro, quam H I, erit G K, maior quam G L, per 4. defin. huius lib. Abſcindatur ex G K, recta G M, ipſi G L, æqualis; atque per M, educatur B M E, perpendicularis ad G K, & connectantur rectæ G B, G C, G D, G E.



Quoniam igitur rectæ perpendiculares G M, G L, æquales ſunt, æqualiter diſtabunt rectæ B E, H I, à centro, per 4. defin. huius lib. *c* & ideo inter ſe æquales erunt. Rurſus quia rectæ G D, G E, *d* maiores quidem ſunt recta B E, æquales autem diametro A F; erit & diameter A F, maior, quam B E. Eadem ratione oſtendetur A F, maior omnibus aliis lineis. Deinde quia latera G B, G E, trianguli B G E, æqualia ſunt lateribus G C, G D, trianguli C G D; & angulus B G E, maior eſt angulo C G D; *e* erit recta B E, maior quam C D; atq; adeo H I, quæ æqualis oſtenſa fuit ipſi B E, maior

c 14. tert. *d 20. primi.* *e 24. primi.*

quoque

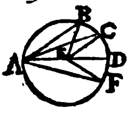
Digitized by Google

quoque erit quam C D. In circulo igitur maxima quidem linea eſt diameter, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

EODEM fere modo demonſtrabitur theorema, ſi ab vno, eodemque circumferentiæ puncto plurimæ lineæ cadant.

CADANT enim à puncto A, plures lineæ A B, A C, A D, quarum A D, per centrum E, tranſeat. Dico A D, eſſe omnium maximam, & A C, maiorem remotiore A B. Ductis enim rectis B E, C E; cum in triangulo A E C, latera A E,



a 20. primi. *E C, a maiora ſint latere A C; ſintque rectæ A E, E C, æquales rectis A E, E D, hoc eſt, rectæ A D; maior erit A D, quam A C. Eademque ratione maior erit, quam A B, & ſic de cæteris. Maxima ergo omnium eſt A D.*

DEINDE, quia duo latera A E, E C, trianguli A E C, æqualia ſunt duobus lateribus A E, E B, trianguli A E B; & angulus A E C,
b 24. primi. *totus maior eſt angulo A E B; b erit baſis A C, maior baſe A B. Eodemque argumento erit A C, maior quacunque alia linea, quæ à centro remotior eſt.*

CÆTERVM & hic duæ tantum æquales lineæ duci poſſunt à puncto A, ad vtraſque partes maximæ A D. Si namque angulo A E C, æqualis fiat angulus A E F, iungaturque recta A F; cum latera A E, E C, æqualia ſint lateribus A E, E F, & anguli contenti quoque A E C,
c 4. pri. *A E F, æquales; c erunt baſes A C, A F, æquales. Neque vero vlla alia his duabus æqualis poteſt exhiberi. Quæcunque enim ducatur ex A, ſupra A C, ea minor erit quam A C; ſi verò infra A C, ea maior erit, vt iam demonſtratum eſt.*

QVOD ſi A B, A F, ad diuerſas partes diametri A D, ductæ ſint, & dicatur A F, propinquior centro, quàm A B, demonſtrabitur, vt in ſcholio propoſ. 7. huius lib. A F, maiorem eſſe, quam A B. Si namque, vt proximè oſtenſum fuit, ducatur ipſi A F, æqualis A C, ex altera parte, nempe ſi fiat angulo A E F, æqualis angulus A E C, &
d 14. tertii. *cadet punctum C, inter B, & D; quod A F, A C, d æqualiter diſtent ab A D, ob earum æqualitatem, aut certe ob æquales angulos A E F, A E C. Hinc enim fit, cum A F, ponatur propinquior centro, quam A B, vt & A C, ipſi A F, æqualis, propinquior ſit centro, quam A B, ac proinde punctum C, ſit inter B, & D. Cum ergo A C, maior ſit, quam A B, vt in hoc ſcholio demonſtratum eſt, maior erit quoque A F, quam A B.*

XV. THEOR. 15. PROPOS. 16.

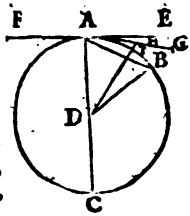
QVÆ ab extremitate diametri cuiuſque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipſum circulum cadet; & in locum inter ipſam rectam lineam, & peripheriam

compre-

Digitized by Google

comprehenſum, altera recta linea non cadet: & ſemicirculi quidem angulus, quouis angulo acuto rectilineo maior eſt; reliquus autem minor.

IN circulo A B C, cuius centrum D, diameter ſit A C, ad quam ex A, puncto extremo perpendicularis ducitur. Dico hanc lineam perpendicularem neceſſario extra circulum cadere. Si enim cadit intra ipſum qualis eſt AB; ducta DB; *a* erũt duo anguli DAB, a 5. primi.
D B A, æquales, ſed D A B, rectus eſt, per conſtructionem: Igitur & D B A, rectus erit, quod eſt abſurdum. Duo enim anguli in triangulo *b* minores ſunt duobus rectis. b 17. primi.



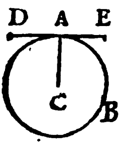
Non igitur cadet perpendicularis intra circulum; neque eandem ob cauſam in ipſam circumferentiam, ſed extra, qualis eſt EF. Dico iam ex A, inter A E, rectam, & circumferentiam A B, non poſſe cadere alteram rectam. Cadat enim, ſi fieri poteſt, recta A G, ad quam ex D, ducatur perpendicularis DH, ſecans circumferentiam in I, quæ neceſſario ad partes anguli acuti D A G, cadet, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 1. Quoniam igitur in triangulo D A H, *c* duo anguli D H A, c 17. primi.
D A H, minores ſunt duobus rectis; & D H A, rectus eſt, per conſtructionem, erit angulus D A H, recto minor, ideoque recta D A, hoc eſt, recta illi æqualis D I, *d* maior erit, quam D H, pars d 19. primi.
quam totum, quod eſt abſurdum. Non igitur intercipietur recta inter A E, & circumferentiam A B: ſed quæcunque ex A, ducatur infra A E, ea ſecabit circulum. Dico denique angulum ſemicirculi, contentum diametro A C, & circumferentia A B, maiorem eſſe omni acuto angulo rectilineo; reliquum verò angulum contingentiæ, qui continetur recta A E, & circumferentia A B, minorem eſſe omni acuto angulo rectilineo. Quoniam enim oſtenſum eſt, omnem rectam ex A, ductam, infra perpendicularem A E, cadere intra circulum, faciet neceſſario ea linea cum A C, angulum rectilineum acutum minorem angulo ſemicirculi, at verò cum A E, angulum rectilineum acutum maiorem angulo contingentiæ, cum ille ſit pars anguli ſemicirculi, hic verò totum quidpiam reſpectu anguli contingentiæ. Id quod liquido conſtat, ducta recta A B, quo[illegible] infra A E. [illegible] cum hæc linea A B, intra circulum cadat, vt [illegible] monſtratum eſt, erit angulus rectilineus acutus C A B, minor angulo ſemicirculi contento ſub diametro A C, & circumferentia A B C, cum ille huius ſit pars: Angulus verò contingentiæ contentus ſub tangente linea A E, & circumferentia A B C, minor angulo rectilineo acuto BAE, quod ille huius pars ſit. Eademq; ratio eſt de omnibus

alijs an-

aliis angulis acutis rectilineis, cum omnes contineantur à diametro A C, vel tangente A E, & rectis ex A, ſub A E, ductis, quæ omnes intra circulum cadent, vt demonſtrauimus. Angulus igitur ſemicirculi maior eſt omni acuto angulo rectilineo, reliquus autem angulus contingentiæ, minor. Itaque quæ ab extremitate diametri cuiuſque circuli ad angulos rectos ducitur, &c. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

HINC manifeſtum eſt, rectam à diametri circuli extremitate ad angulos rectos ductam ipſum circulum tangere. Oſtenſum enim eſt, ipſam cadere extra circulum. Quare ſolum in puncto illo diametri extremo circulum attingit.



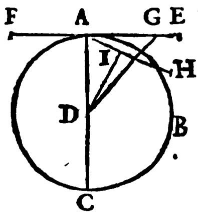
QVARE ſi iubeamur per datum punctum A, in circumferentia circuli A B, rectam lineam ducere, quæ circulum tangat in A, ducemus ex A, ad centrum C, rectam A C, & ad eam excitabimus perpendicularem D A E. Hæc enim circulum tanget in A, vt demonſtratum eſt.

EX ORONTIO.

POTEST hoc idem theorema demonſtrari oſtenſiue hac ratione. Sit diameter A C, in circulo A B C, cuius centrum D. Ducatur ex A, ad A C, perpendicularis A E, quam dico extra circulum cadere. Sumatur enim in ea quoduis punctum G, & coniungatur recta G D. Quoniam igitur in triangulo A D G, duo anguli D A G, D G A,

a 17. primi. *a minores ſunt duobus rectis, & D A G, factus eſt rectus; erit D G A, recto minor. Quare b maior erit recta D G, quam D A; ideoque punctum G, extra circulum erit. Eademque eſt ratio de omnibus aliis punctis rectæ A E. Cadet ergo tota A E, extra circulum. Ducatur iam ex A, infra A E, recta A H, quam dico neceſſario ſecare circulum. Fiat enim angulus A D I, æqualis angulo E A H. Addito igitur communi angulo D A H, erunt duo anguli A D I, D A H, æquales toti angulo recto D A E, ideoque minores duobus rectis: Qu... coibunt rectæ A H,*

b 19. primi.



c 13. pronun. *D I, in aliquo puncto, vt in I. Dico igit... punctum ... eſſe intra circulum. Quoniam e... res ang... in triangulo D A I, d æquales*

d ... mi. *ſunt duobus rect..., & duo anguli D A I, A D I, oſtenſi ſunt æquales recto D A E; e... eliquus A I D, rectus, atque adeo maior, quam D A I. ... Quare recta D A, e maior eſt, quam D I. Non igitur*

e 19. primi. *D I, ad circumferentiam perueniet; propterea que punctum I, intra circulum exiſtet; atque adeo recta A H, circulum ſecabit. Reliquæ partes theorematis oſtendentur, vt prius.*

SCHO-

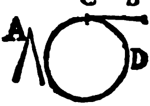
SCHOLIVM.

EXISTIMAT Peletarius, angulum contingentiæ, quem Euclides hic probauit minorem eſſe omni acuto angulo rectilineo, nihil eſſe, atque adeo ex illo contactu lineæ rectæ, & circumferentiæ, non effici angulum vllum. Vt autem ſententia illius planior fiat, afferemus in medium digreſſionem illam, quam ipſe hoc loco inſtituit. Sic igitur inquit:

CVM huius theorematis caput poſtremum attentius conſiderarem, mihi ſanè in mentem ſubiit prima ſpecie, Geometriam non ſatis ſibi conſtare; immo adeo repugnantiam in ſe admittere.

PRIMVM enim extra intelligentiam eſt, vt inter quantitates minima dari poſſit; qualem hoc loco angulum, quem dicunt contingentiæ, ſeu rectius, contactus, minorem omni acuto poſuimus. Nihilo magis conuenit, vt maxima quantitas detur, qualis hic angulus ſemicirculi omni acuto rectilineo maior ponitur. Quantitas enim eo nomine quantitas eſt, quod partibus conſtet, & ſecundum eam æquale, & inæquale dicatur. Quantitatis etiam continua in infinitum ſectio eſt. Atque adeo cum in primam propoſitionem decimi incidiſſem, tum magis anxie expendere cepi, quonam pacto conciliari poſſet tam aperta, vt apparebat, repugnantia. Sic enim habet prima decimi.

SI à maiori duarum quantitatum auferatur maius, quam dimidium; ac rurſus ex reliquo maius, quàm dimidium, idque continuo fiat; relinquetur tandem magnitudo minor magnitudine minore poſita.

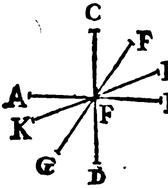


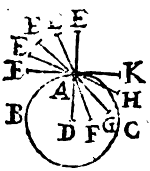
VERBI cauſa, ſint duo anguli A, quidem rectilineus; BCD, verò angulus (ſi modo ſit angulus) contactus: Vult prima decimi, ſi auferatur ab angulo A, maius, quàm dimidium, ac rurſus à reliqua parte maius, quam dimidium; ſicque continuo ex reſiduis partibus maius, quam dimidium; tandem relinqui minorem angulum, quam BCD. Cuius demonſtrationem hic non appono, cum ex ſequentibus pendeat. Nulla tamen in tota Geometria propoſitio eſt, quæ (vt ſic dicam) magis naturaliter vera ſit. Quod ex numeris (in quibus rerum omnium imagines) luce clarius euadit. Quis enim non videt, propoſitis duobus numeris 8. & 2. cum ab octonario maius quam dimidium abſtuleris, vt quinarium; tum à ternario reſiduo, maius quam dimidium, vt binarium; relinqui vnitatem poſito binario minorem? Neque verò ad rem facit, quod Campanus illic excipit, propoſitionis ſententiam de quantitatibus eiuſdem generis eſſe intelligendam. Hæc quippe conciliatio nulla eſt; quin etiam menti Euclidis contraria, vt nos, cum illuc ventum erit, manifeſtum faciemus. Immo & ipſe Campanus ſecum pugnat, cum in ſe-

Digitized by Google

cunda duodecimi demonſtranda, aliiſq; propoſitionibus nonnullis ſolidorum, à curuo rectum auferat.

NOS igitur hanc dubitationem ſic expediemus; vt dicamus, lineam rectam, quæ circulum tangit, cum peripheria angulum non efficere; ſcilicet B C D, nullo modo angulum dici debere. Omnis enim angulus in ſectione conſiſtit, non in contactu. Et vbi ceſſat ſectio, ceſſat quoque anguli forma. Atque vt vno verbo dicam, in decuſſatione (Decuſſationem hoc loco, & ſectionem ſine diſcrimine accipio) omnes angulorum ſpecies perficiuntur. Duabus enim lineis A B, & C D, ſe ſcindentibus in puncto E, ad angulos rectos, intelligatur C D, ſic moueri in orbem, ſcilicet ſuper puncto E, fixo, vt ex C D, fiat F G; hinc ſanè ex recto angulo A E C, fiet obtuſus A E F: Inde ex recto B E C, fiet acutus B E F. Cumque facta fuerit H K, hinc quidem angulus obtuſior fiet H E A, inde verò acutior B E H; ſicque continuo, donec peruenerit ad A B, & intra eoſdem terminos concludatur cum ea. Tum enim immerſa, vt ſic dicam, linea C D, in lineam A B, euaneſcet angulus. Neque diuerſa ratio eſt in curuo. Sit enim in circulo A B C A. cuius centrum D, linea D E, præteriens peripheriam, & ſecans ipſam in A, puncto fixo, ſuper quod circumducatur ipſa D E, per puncta F, G, H. Tum fient anguli continuo varij cum peripheria, in ipſo puncto A; donec ceſſante decuſſatione, linea E D, facta ſit E K, & tangat circulum. Ac tum linea D E, non iam inclinata intelligitur, ſed immerſa in lineam B A C, quantum ad angulum attinet: non aliter quam ſi B A H, eſſet linea recta; neque contra facit, quod deducantur lineæ, faciantque ſpatium C A K. Nam id ſola A C, linea efficit, quæ rectam refugit; ſed eam tamen in puncto A, amplectitur. Cum igitur omnis angulus in pluribus punctis non conſiſtat, quam vno; fit, vt punctum A, tum ſit ineptum angulo conſtituendo, quam modo erat punctum ſectionis E, linearum rectarum. Fortaſſe dices, punctum A, lineæ rectæ manere in ſuo recto, punctumque A. peripheriæ in ſuo rotundo; neque vtrumq; eſſe idem punctum; ſed lineas ſe tantum inter ſe veluti lambere, quia altera alteram penitus, omniq; puncto refugit; vt contraria contrapoſita fiant manifeſtiora; id vero ſenſus non recipit. Duo enim circuli ſeſe exterius tangentes, rectam lineam intermediam illibatam relinquerent: Scilicet, ſi intelligeremus circulum, qui in puncto A, tangeret ipſum A B C, circulum exterius: quod non patitur linearum natura. Sed demus id fieri poſſe, vt nihil in cogitationem cadat, quod ſemel vtpiam Geometria non repræſentet. Illud tamen minimè vrgebit; Imo tanto minus contactus linearum erit angulus.



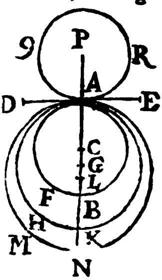


Habit

Videbit enim vtrinque ipſarum concurſus. Sed nos hæc Geometricis rationibus confirmemus per theoremata.

CONTACTVS duorum circulorum interior, quantitas non eſt.

SIT enim circulus A F B A, cuius centrum C, diameter verò A B, per cuius extremitatem A, ducatur linea D E, ad angulos rectos. Et conſtat, ex conſectario huius decimaſexta lineam D E, contingere ipſum A F B A, circulum: ac propterea D A F, eſſe minorem omni angulo acuto, ex ipſa Euclidis ſententia: ſcilicet per vltimam partem huiuſce decimaſexta. Iam verò inter puncta C, & B, ſuſcipiatur in diametro A B, centrum G, & ſpatio G A, deſcribatur alter maior circulus A H K A. Dico F A H, non eſſe quantitatem. Conſtat quippe circulum A H K A, tranſire inter rectam D A, & curuam A F, cum ſit ſemidiameter G A, maior ſemidiametro C A. Manifeſtum quoque eſt, lineam D E,



tangere ipſum A H K A, circulum, ex eodem huiuſce decimaſexta conſectario: ac propterea D A H, eſſe omni acuto minorem. Deſcribatur tertio, ſecundum maius ſpatium L A, circulus A M N A. Et erit ex eodem conſectario, D A M, omni acuto minor. Sicque in infinitum, erunt omnes contactus, quos efficiet linea D E, cum circulis ductis per A, punctum, quorum centra in A B, linea, minores omni acuto rectilineo: ac ſic omnes æquales, ſi modò æqualitas inter non quanta dici poſſit. Quapropter contactus D A M, erit æqualis contactui D A F: Fietque vt M A F, contactus interior circulorum, neque augeat, neque minuat contactum D A M. Igitur M A F, quantitas non eſt. Quod erat demonſtrandum.

SED & probabimus, contactum interiorem circulorum quantitatem non eſſe in hunc modum. Nempe cum omnes circuli ſint ſimiles, erunt & ſemicirculi ſimiles. Quapropter anguli, qui fiunt à diametro & peripheria, in omnibus circulis ſunt æquales, per conuerſam definitionis ſimilium ſectionum. (Nam ab hac æqualitate angulorum non excludentur anguli mixti.) Erit igitur angulus B A F, æqualis vtrique angulorum K A H, & N A M. Ac propterea contactus F A M, nihil addit ad angulum B A F. Quare F A M, quantitas non eſt. Quod fuit demonſtrandum. Hinc ſequitur alterum.

CONTACTVS lineæ rectæ cum circulo, quantitas non eſt.

MANENTE enim eadem conſtructione, ſi D A F, ſit quantitas; ipſa vtique diuidetur per lineam rectam, aut per obliquam. Non

Digitized by Google

per lineam rectam, repugnante vltima parte huius decimaſextæ: neq; per obliquam, vt per lineam A M. Eſſet enim F A M, pars ipſius D A F: Atqui F A M, quantitas non eſt, vt modo probauimus. Non eſt igitur F A M, pars ipſius D A F. Igitur D A F, neque per lineam rectam, neque per obliquam diuidi poteſt. Quare D A F, quantitas non eſt: quod erat probandum. Hinc exurgit tertium.

CONTACTVS duorum circulorum exterior, quantitas non eſt.

IN eadem conſtructione, protrahatur B A, diameter ad punctum P. Tum centro P, interuallo autem P A, deſcribatur circulus A Q R A, tangens circulum A B F A, exterius in puncto A. Dico contactum F A Q, non eſſe quantitatem. Id verò manifeſtum eſt ex poſteriori demonſtratione. Nam neque per lineam obliquam diuiditur, cum F A M, non ſit quantitas per primam harum; neque per rectam, cum neque D A F, ſit quantitas, per ſecundam earundem; neque D A Q, quantitas per eandem. Quare cum F A Q, partes nullas habeat, quantitas non erit: quod erat probandum.

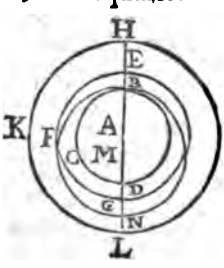
EX his emerget hoc pronunciatum, quod in Geometria nemo hactenus admittendum eſſe cogitauit.

ANGVLI, qui fiunt à diametro, & peripheria, ſiue intra, ſiue extra circulum, recti ſunt, & rectis rectilineis æquales.

VT in poſteriori figura, angulus B A F, æqualis eſt angulo B A D; cum ipſi nihil accreſcat ob contactum D A F, qui quantitas non eſt: & ob id Q A P, rectus quoque eſt, & æqualis ipſi D A P, cum D A Q, nihil addat: quod erat probandum.

HÆC Peletarius hoc in loco. In epiſtola autem, quam ad Cardanum ſcribit, affert aliam demonſtrationem, quam ipſe ait pleniorem eſſe. Hanc igitur hic ſubiicere ſtatui. In primis autem præmittit hoc theorema.

IN circulis anguli, qui fiunt à diametro & peripheria, ſunt æquales.



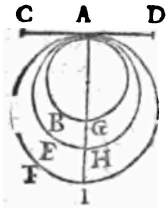
SINT enim ſuper centro A, duo circuli B C D B, & E F G E, quorum diametri B D, & E G; & ſecet E G, ambos circulos in punctis E, B, D, & G. Aio duos angulos C B D, & F E D, eſſe æquales. Nam ſi ſit F E D, maior ipſo C B D; (neque enim contra, C B D, maior vllo pacto erit ipſo F E D) ac deſcribantur plures circuli ſuper eodem centro A, quorum vnus hoc loco ſatis fuerit H K L H: fiet tandem ex continuo augmento, an-

ſo, angulus à diametro, & peripheria, verbi gratia, angulus K H L, maior recto: quod eſt contra ipſius Euclidis ſententiam, qui eos omnes angulos ponit recto minores. Sunt igitur anguli interiores, qui ad B, & E, inter ſe æquales: quod fuit oſtendendum. Idem de exterioribus iudicium. Neque in hac demonſtrandi ratione vllus eſt paralogiſmus. Licet enim nulla ſit comparatio angulorum quos vocant, contactus, ad angulos rectilineos; attamen erit angulorum, qui fiunt ex ſectione recta linea, & peripheria, aliqua collatio ad ipſos rectilineos. Eiuſmodi enim anguli, qui mixti dicuntur, manifeſte maiores, & minores ſunt.

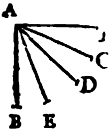
HIS ad hunc modum demonſtratis, aio contactum circulorum interiorem, non eſſe quantitatem. Super centro M, in eadem linea H L, poſito, deſcribatur circulus B F N B, tanto interuallo, quanto eſt circulus E F G E; poſita ſcilicet M B, ſemidiametro æquali ipſi A E; qui circulus tangat B C D B, circulum in puncto B. Et manifeſtum eſt, angulum F B D, æqualem eſſe angulo F E D, propter æqualitatem peripheriarum & diametrorum. Quapropter & idem ipſe F B D, erit angulo C B D, æqualis. Igitur C B F, contactus nihil addit ad ipſum C B D, angulum. Quare C B F, quantitas non eſt: quod fuit probandum. Atque hinc procedit demonſtratio eorum, quæ in tertio libro adduximus, theorematum.

HÆC igitur eſt Peletarij ſententia de angulo contactus, quæ omnino Euclidi eſt contraria. Si enim Euclides ſenſiſſet, angulum contactus nihil prorſus eſſe, & angulum ſemicirculi æqualem recto rectilineo: Quid, obſecro, tantopere deſudaſſet, vt demonſtraret, angulum contactus eſſe minorem omni acuto rectilineo, angulum verò ſemicirculi maiorem? Quid enim clarius, quam nihil, cuiuſmodi eſt angulus contactus, ex Peletarij ſententia, minus eſſe quocunque angulo? Quid quoque magis perſpicuum, quam angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum ſemicirculi, maiorem eſſe quolibet acuto? Quapropter angulum contactus vere eſſe angulum, ac quantitatem, affirmamus; atque adeo angulum ſemicirculi recto rectilineo minorem. Vnde diſſoluenda ſunt à nobis omnia Peletarij ſophiſmata, quæ in hac digreſſione adduxit, ad confirmandum, angulum contactus nihil eſſe.

PRIMVM igitur extra intelligentiam eſſe fatemur, vt inter quantitates minima dari poſſit: ſed inficiamur, nos aſſerere, angulum contactus eſſe minimam quantitatem; Imo verò aſſeueramus, quemuis angulum contactus, etſi ab Euclide minor oſtenſus eſt omni acuto rectilineo, diuidi poſſe in partes infinitas, non quidem per lineam rectam, vt Euclides demonſtrauit, & optimè; ſed per lineam circularem. Vt propoſito angulo contactus C A B, ſi per A, deſcribatur circulus A E H, maior circulo A B G, tangens rectam C D, in A; fiet angulus contactus C A E, minor angulo contactus C A B. Quod



ſi adhuc maior circulus A F I, deſcribatur, erit multo minor angulus contactus C A F, eodem angulo contactus C A B. Atque ita ſine fine ſemper minorem angulum contactus efficiemus. Reperitur igitur inæqualitas inter angulos contactuum, quamuis quilibet eorum minor ſit acuto rectilineo quocunque. Quemadmodum quiuis angulus acutus minor eſt recto, & tamen quolibet acuto dato, minor dari poterit; cum diuidi poſſit infinitè. Vt angulus acutus B A C, minor eſt recto B A F; & tamen ſi ducatur recta A D, inter A C, A B, fiet acutus minor B A D. Quod ſi alia recta A E, inter A B, A D, ducatur, erit multo minor acutus B A E, nec vnquam finis erit huius decrementi.



PARI ratione aſſerimus, angulum contactus augeri poſſe infinitè, ita vt quouis angulo contactus propoſito, dentur alij maiores ſine numero. Vt in ſuperiori figura circulari, angulo contactus C A F, maior eſt angulus contactus C A E, & multo maior angulus contactus C A B; Atq; ita deinceps, ſi minores ſemper circuli, quam A B G deſcribantur, tangentes rectam C D, in A, augebitur perpetuo angulus contactus; ſemper tamen minor exiſtet quouis rectilineo acuto. Quemadmodum quouis angulo acuto dato dantur alij acuti innumeri maiores. Vt in proxima figura, angulo acuto B A E, maior eſt acutus B A D, & multo adhuc maior acutus B A C. Quod ſi alia recta ducatur inter perpendicularem A F, & rectam A C, fiet adhuc maior angulus acutus, nec vnquam finis erit huius incrementi. Sicut igitur in huiuſmodi incremento nunquam peruenimus ad aliquem angulum acutum, qui ſit æqualis angulo recto, vel maior recto, niſi acutus angulus mutetur in rectum, vel obtuſum, ſed ſemper recto, vel obtuſo minor eſt angulus acutus: Ita quoque in accretione anguli contactus nunquam deuenimus ad aliquem angulum contactus, qui æqualis ſit acuto angulo rectilineo propoſito, vel maior acuto, niſi angulus contactus mutetur in alium angulum mixtum, (qui quidem efficitur à duabus lineis ſe ſecantibus; cuiuſmodi eſt angulus ſegmenti.) ſed angulus contactus acuto ſemper minor eſt.

EODEM modo negamus, nos ponere angulum ſemicirculi maximam quantitatem. Imò aſſerimus, quolibet angulo ſemicirculi propoſito, quamuis oſtenſus ſit ab Euclide maior omni acuto angulo rectilineo, infinitos dari poſſe maiores. Vt in eadem figura ſuperiori circulari, angulo ſemicirculi B A G, maior eſt angulus ſemicirculi E A H, & multò adhuc maior angulus ſemicirculi F A I: Atque ita deinceps, ſi maiores ſemper circuli deſcribantur, quàm A F I, tangentes rectam C D, in A, augebitur perpetuo angulus ſemicirculi, ſemper tamen minor exiſtet angulo recto C A I. E contrario verò, an-

gulo ſe-

Digitized by Google

gulo ſemicirculi F A I, minor eſt angulus ſemicirculi E A H, & multo adhuc minor angulus ſemicirculi B A G, nec vnquam finis erit huius decrementi, & tamen quilibet maior eſt quouis angulo acuto rectilineo, licet infinitè diminuatur, vt Euclides demonſtrauit. Quemadmodum quouis acuto angulo dato, inueniuntur alij quidem maiores, alij verò minores innumerabiles.

QVOD autem anguli contactus ſint inæquales inter ſe, non omnes æquales, vt vult Peletarius, ſimiliter & anguli ſemicirculorum, ex eo manifeſtum eſt, quod angulus quilibet conſiſtit in vnico puncto, & linearum inclinatione, quæ non in directum iacent, vt conſtat ex anguli plani definitione. Hinc enim fit, vt æqualitas angulorum eiuſdem generis requirat eandem inclinationem linearum, ita vt lineæ vnius conueniant omnino lineis alterius, ſi vnus alteri ſuperponatur; Ea enim æqualia ſunt, quæ ſibi mutuo congruunt, iuxta 8. pronunciatum. Cum igitur in angulis contactus, nec non in angulis ſemicirculorum, nequaquam reperiatur ſemper eadem inclinatio, quod (vno ſuperpoſito alteri) lineæ eorum non ſibi reſpondeant, ſed prorſus inter ſe diſſideant, vt ex figuris ſuperioribus perſpicuum eſt; non erunt omnes anguli huiuſcemodi inter ſe æquales. Imò quilibet angulus contactus augeri, & diuidi poterit infinitè per lineam curuam, licet per rectam ſecari nequeat, vt rectè oſtendit Euclides. Cuius etiam rei hæc afferri poteſt cauſa. Si enim linea contingens circulum concipiatur moueri circa punctum contactus immobile, continuo circulum ſecabit, donec iterum ipſum contingat: Tunc enim primum ſecare deſinet circulum. Quare ſi vel minimè inclinari intelligatur ſuper puncto illo contactus fixo, ſecabit circulum, cum in vno tantum puncto linea recta circulum poſſit tangere, vt ex 2. propoſ. huius lib. collegimus.

SOLVM igitur illi anguli contactus, pariterque illi duntaxat anguli ſemicirculorum æquales inter ſe erunt, qui efficiuntur à peripheriis æqualibus: In his enim tantummodo lineæ ſibi congruunt mutuo. Anguli verò contactus, qui efficiuntur à peripheriis minoribus, maiores erunt; Et qui à peripheriis maioribus, minores. Anguli denique ſemicirculorum maiorum maiores, minorum autem minores erunt, vt non obſcurè intelligi poteſt ex ſuperioribus figuris. Neque enim lineæ talium angulorum ſibi mutuo conueniunt.

CONSTAT ergo, quemuis angulum contactus habere partes: & vnum alteri poſſe æqualem exhiberi, ac rurſus inæqualem, nempe maiorem, vel minorem: quemadmodum & in reliquis angulis omnibus fieri cernimus. Quod etiam de quocunque angulo ſemicirculi dici poteſt. Non igitur rectè intellexit Peletarius, angulum contactus minimam eſſe quantitatem, angulum verò ſemicirculi maximam.

Q 4 DEIN-

Digitized by Google

DEINDE non eſt, quod anxium reddat Peletarium prima propoſitio decimi libri. Ea enim intelligenda eſt tam de quantitatibus eiuſdem generis, quam diuerſi, dummodo vtranis multiplicata alteram excedere poßit; cuiuſmodi non ſunt angulus contactus, & angulus acutus rectilineus. Nam angulus quilibet contactus ſiue bis ſumatur, ſiue ter, quaterve, ſiue denique quoties libuerit, ſemper minor eſt angulo acuto rectilineo. Si namque quotcunque anguli contactus, vt centum, inter ſe æquales angulum acutum rectilineum excederent, vel ſe illi æquarent; eſſet quoque vnus illorum maior, vel æqualis illi angulo acuto rectilineo, qui eſt centeſima pars propoſiti anguli acuti rectilinei; quod eſt abſurdum, cum quilibet angulus contactus minor ſit quocunque angulo acuto rectilineo, velut ab Euclide fuit demonſtratum. Quare nullo modo ex illa propoſitione colligere licebit, ſi ab angulo acuto maius, quam dimidium auferatur, ac rurſus ex reliquo maius, quam dimidium, idque continuo fiat, relinqui tandem angulum acutum minorem angulo contactus propoſito; quoniam angulus contactus, vt dictum eſt, per quemcunque etiam numerum multiplicatus, ſiue quantumuis auctus, ſemper minor exiſtit angulo acuto; nec vnquam ipſum ſuperare poteſt: quod tamen neceſſario requiritur ad demonſtrationem illius propoſitionis. Vt enim demonſtretur, multiplicanda eſt minor quantitas propoſitæ toties, donec excedat maiorem, vt videre licet apud omnes interpretes Euclidis. Vnde Campanus, vel potius ipſe Euclides per Campanum, quando in Stereometria à curuo rectum aufert, vel contra, vt vult prima propoſ. lib. 10. aſſumit ſemper tales magnitudines, quarum alterutra multiplicata alteram excedere poteſt.

IAM verò nulla ratione concedemus Peletario, angulum tantummodo effici à duabus lineis ſe ſecantibus. Sufficit enim, vt angulus efficiatur, duas lineas in plano adinuicem inclinari, ita tamen, vt non in directum iaceant, vt conſtat ex anguli plani deſcriptione tradita ab Euclide, quanquam ſe mutuo non ſecent, ſi producantur; cuiuſmodi ſunt peripheriæ ſe tangentes. Quare verè angulum efficiunt, vt antea diximus.

PORRO demonſtratio Peletarij, qua conatur oſtendere, contactum interiorem non eſſe quantitatem, nullius eſt momenti. Quamuis enim omnes anguli contactus, qui efficiuntur à linea tangente, & peripheria, minores ſint quolibet angulo acuto; non tamen propterea inter ſe omnes æquales eſſe neceſſe eſt, ſed poteſt alio alius maior eſſe, & minor, vt diximus: quemadmodum etiam omnes anguli acuti minores ſunt angulo recto, & tamen ipſi inter ſe non ſunt omnes æquales. Sic etiam omnes formicæ (vt ex rebus quoque naturalibus exemplum afferamus,) minores ſunt homine, vel monte, cum tamen ipſæ inter ſe valde ſint inæquales. Quare non rectè concludit Peletarius, contactum interiorem nihil eſſe.

NEGA-

Digitized by Google

NEGAMVS deinde, angulos ſegmentorum ſimilium æquales eſſe, ſicut ipſe aſſumit in ſequenti demonſtratione: Neque enim hoc Euclides ſignificauit in vltima definitione huius tertij libri; Sed docuit ea ſegmenta eſſe ſimilia, in quibus anguli rectilinei ſunt æquales, vel quæ angulos rectilineos capiunt æquales; non autem quorum anguli æquales exiſtunt. Immò magnum diſcrimen eſt inter angulos in ſegmentis, & angulos ſegmentorum, vt apertè conſtabit ex propoſ. 31. huius libri.

EX his facilè reijcientur reliquæ Peletarij demonſtrationes. Angulus enim contactus, qui efficitur à linea tangente, & peripheria, diuiditur per lineam circularem, ita vt contactus interior ſit verè pars eius, cùm contrarium nullo modo oſtenderit. Eodem pacto angulus contactus, quem conſtituunt duo circuli ſe exterius tangentes, diuiditur & per lineam circularem, & per rectam, quæ vtrumque tangit. Pari ratione theorema illud refellitur, quo aſſeruit, angulum ſemicirculi æqualem eſſe angulo recto rectilineo. Excedit namque rectus angulus angulum ſemicirculi, angulo illo contactus, quem efficit linea tangens, & peripheria. Poſtremò hallucinatus eſt quoque Peletarius in illa demonſtratione, quam ad Cardanum miſit. Etſi enim angulus ſemicirculi in maiori circulo maior eſt angulo ſemicirculi in circulo minori: non tamen propterea efficitur, vt aliquis angulus ſemicirculi maior ſit angulo recto. Semper enim rectus angulus ſuperabit quemuis angulum ſemicirculi, angulo illo contactus, qui efficitur à peripheria, & linea tangente. Quemadmodum etiam quouis angulo acuto propoſito, dari poſſunt alij maiores; nunquam tamen aliquis acutus rectum excedet, vt in præcedenti figura cernere licet. Conſtat igitur ex his, angulum contactus verè eſſe angulum, demonſtrationes autem Peletarij ſophiſticas eſſe, ac nullius momenti, homineq; Geometra prorſus indignas.

HAEC porrò mea de angulo contactus diſputatio adeò Peletarium commouit, atque perturbauit, vt læſam eſſe omnino, atque offenſam exiſtimationem putauerit ſuam. Quare annis ferè quinque poſt mei in Euclidem commentarij editionem, hoc eſt, anno 1579. vt ſe defenderet, Apologiam in me conſcripſit: in qua tamen neque auſus eſt ſolutiones meas hoc loco adductas infringere, aut impugnare, neque opinionem ſuam, nouam illam quidem, & inauditam, nouis rationibus (ſcilicet nullas habebat) confirmare, ſed verbis duntaxat, & conuitijs ſe defendere conatur, vt facilè ij, qui eam perlegerint, iudicabunt. Huic ego Apologiæ iam pridem non tam mei purgandi, quàm veritatis tuendæ gratia reſpondiſſem, niſi me ab hoc conſilio grauiſſima eruditiſſimorum hominum auctoritas, qui eam reſponſo omnino indignam iudicabant, reuocaſſet. Nunc verò quoniam locus hic à me poſtulare videtur, vt in ſecunda hac editione patrocinium veritatis iterum ſuſcipiam, non alienũ eſſe duxi, breuiter calumnias,

Digitized by Google

atque iniurias, quibus frequenter me in ea Apologia afficit, quanta potero modeſtia, depellere. Quamuis enim hoc à me factum iam ſit anno 1586 in meis triangulis ſphæricis, vbi neceſſariò de re ipſa, eiuſque Apologia mentio facienda fuit; quia tamen fortaſſis non omnes librum illum meum viderunt, operæpretium arbitratus ſum me facturum, ſi totam illam reſponſionem hic, vbi proprius eius locus eſt, interſeram, vt benignus lector intelligat, ſine cauſa cum tanto animi dolore, & iracundia, quantam præ ſe fert, contra me exarſiſſe, falſoq; mihi impoſuiſſe multa: me autem è contrario nullum verbum iniurioſum in illum effudiſſe, aut conuitium, quod fruſtra in epiſtola nuncupatoria criminatur, vbi me à conuitijs non abſtinere, apertè teſtatur. Atq; in illa Apologia nihil adeò me offendit, quàm quòd me Peletarius non ſyncerè, ſed animoſè, atque adeò inuidioſè feciſſe inſimulat, vt eum in meis commentarijs vel reprehenderem, vel laudarem: quæ ſanè vitia puſilli ſemper animi eſſe duxi, & ab homine liberaliter, Chriſtianéque educato alieniſſima. Verùm ea quàm longè abſint tum à noſtra Societatis diſciplina, tum à mea conſuetudine, nemo omnino, qui nos ac noſtra nouit, ignorat. Iis verò, qui noſtra minimè norunt, hic ipſe liber fidem faciet, ſyncerè omnia dici, nihil inuidioſè, nihil animoſè: planè vt veritatem quæſitam, non cuiuſque auctoritatem contemptam eſſe appareat. Neque enim mihi tantum derogo, (etſi nihil arrogo) vt mihi vni interdictum putem, ne, ſi quid in alienis ſcriptis falſum videatur, occaſione oblata, cur id mihi minùs probetur, oſtendam; modo (quod pudentium, ac bene moratorum hominum conſuetudo poſtulat) id ſine conuitio, atque irriſione faciam: Hoc autem liber ipſe, qui in medio eſt, ita à me factum eſſe clamat. Etenim vt totum hunc librum peruolutes, ne verbum quidem vnum reperias, quod vel ſpeciem maledicti habeat, atque conuitij. Nam in ſcholio hoc de angulo contactus iurare liquidò poſſem, nihil me minùs cogitaſſe, quàm vt Peletarium obtrectandi animo oppugnarem; ſed illud habuiſſe propoſitum, (ſi modò conſequi poſſem) vt ſuus eſſet veritatis locus. Quod quidem eò liberiùs feci, quòd Peletario ipſo non modò inuito, ſed etiam libenti exiſtimaui me eſſe facturum, quod vel ipſo auctore facerem: qui non à Cardano ſolùm, atque Campano, ſed etiam à Proclo, Theone, Apollonio, Erathoſthene, Pappo, Ptolemæo, Hippocrate Chio, Geometriæ luminibus, ab ipſo deniq; omnium magiſtro Euclide diſſentire non dubitauit. Nimirum quia, vt ab eodem in Apologia verè dictum eſt, in omni doctrina, præſertim verò in Geometria, non auctoritas eſt ſpectanda, ſed veritas: quanquam nõ video, qui amicus veritatis ſit is, apud quem veritas odium parit; niſi fortè aut decipi ſe non poſſe arbitratur, qui columina illa Geometriæ erraſſe interdum prædicat, aut veritatem in alienis rebus amat, ac quærit potiùs, quàm in ſuis. Equidem ſi quis me in re quapiam (quod pro humani ingenij imbecillitate fieri poſſe video) erraſſe oſtenderit, ne ego maxi-

mam

Digitized by Google

mam illi gratiam habuero, qui errantem in viam veritatis reduxerit. At enim probat ſtudium veritatis Peletarius, conuitia ferre non poteſt: quæ tandem conuitia? rogas? Demonſtrationes meas appellas ſophiſmata. Nunc demum, quæ conuitia dicat, intelligo. Nam alia nulla in meo hoc libro eſſe certò ſcio: ab his (ſi conuitia ſunt) fateor me non abſtinere. At ego homo ſimplex, & ignarus verborum, conuitia eſſe nunquam duxi, cùm verè dicerentur. Neque enim, quo alio vocabulo demonſtrationes planè fallaces, & adulterinas appellarem, habebam: neque verò Philoſophorum, ac Mathematicorum conſuetudo loquendi magis appoſitum mihi verbum ſuppeditabat. Accedit, quod cùm à Peletario, homine in loquendo conſideratiſſimo, germanas Campani, Cardanique demonſtrationes paralogiſmos appellari viderem, exiſtimaui in falſis eius demonſtrationibus refellendis impunius perſimili me vocabulo vſurum. Quod ſi ſophiſma contumelioſius verbum eſt, quàm paralogiſmus, in Gallia, ignoſcat conſuetudinis eius ignaro, atque exiſtimet, me paralogiſmos dicere voluiſſe. Atque vt planè intelligat Peletarius, me non contradicendi ſtudio illa ſcripſiſſe, mecum vnà conſideret, quantam mihi materiam ſui refellendi dederit, ſi hominem refellere potiùs, quàm rem, quæ tum agebatur, explanare in animo fuiſſet: quanquam occaſionem eius reprehendendi in ſinum delatam ſæpiùs omiſi, ne illum mihi delegiſſe viderer, in quem potiſſimùm incurrerem. Quàm præclara enim occaſio fuit in propoſ. 4. & 8. lib. 1. atq; in propoſ. 24. lib. 3. quam ipſe 23. facit? In his enim omnibus reÿcit demonſtrationes antiquiſſimas Euclidis, tanquam non Geometricas; quippe in quibus figuram vnam alteri ſuperponi concipere animo oporteat: quod ipſe à Geometria dignitate putat eſſe alienum, hac ſolùm inductus ratione, quod ſuperpoſitionem illam mechanicum quid eſſe arbitretur, & quòd omnes ferè propoſitiones hoc modo, vt ait, poſſint demonſtrari, etiam problemata, in quibus aliquid proponitur conſtruendum: atq; in huius rei exemplum adducit propoſ. 2. & 3. lib. 1. quæ problemata ſunt. Hic certè Peletarium iure carpere potuiſſem, ſi id mihi fuiſſet propoſitum, vt falsò criminatur; maximè in eo, quod eadem ratione vſui fore exiſtimauit ſuperpoſitionem in demonſtrandis problematibus, ac theorematibus. Nam non ſatis intellexiſſe videtur, quo pacto Geometræ ſuperpoſitionem illam vſurpent. Neque enim volunt, re ipſa faciendam eſſe ſuperpoſitionem, (hoc enim mechanicum quid eſſet) ſed cogitatione tantùm, ac mente, quod opus eſt rationis atque intellectus. Itaque in theorematibus quidem locum habebit genus hoc argumentandi, in problematibus verò non. Namq; in theorematibus, propter magnitudinum æqualitatē, inæqualitatémve, quæ, vt nota, ponitur, facilè intellectus cuiuſuis ſine vlla hæſitatione comprehendit, vnā vel nō excedere alteram, vel excedere, ſi animo concipiatur vna alteri eſſe ſuperpoſita, quamuis re ipſa non fiat illa ſuperpoſitio, vt in propoſ. 4. lib. 1. factū eſt:

At in

At in problematibus, in quibus magnitudinem quis alteri æqualem construere iubetur, licet mente cogitet magnitudinem propoſitam transferri in alium locum, non tamen propterea quicquam efficiet, cum re ipſa translatio nulla facta ſit: Vt mirum ſit, Peletarium ſibi perſuadere potuiſſe, propoſ. 2. & 3. lib. 1. & alias pene omnes per ſuperpoſitionem, ſiue translationem linearum, figurarúmve poſſe demonſtrari, ſi hoc modo argumentandi in Geometria vti liceret. Et certè hac in re non ſolum Euclidem in crimen vocat Peletarius, verùm etiam Archimedem, quo, omnium iudicio, acutior in demonſtrando, & ſubtilior fuit nemo, eiuſque commentatorem grauiſſimum, eumq; doctiſſimum Eutocium Aſcalonitam, qui eodem argumentandi genere vtuntur in æqueponderantibus, immò verò & omnes Geometras redarguat neceſſe eſt, qui non rarò hoc argumenti genus adhibent. Sed videamus, quò tandem egregius hic noſter Geometra, qui omnes alios Geometras reprehendit, ſit deuolutus. Viderat Peletarius, (neque enim rem adeò manifeſtam videre non poterat) ſi hunc modum argumentandi è medio tollat, vniuerſam ſe Geometriam funditus euertere, cùm plurima, eaque præcipua propoſitiones in Geometria demonſtrentur ex propoſitione 4. & 8. lib. 1. & ex 24. lib. 3. quæ quidem alio modo demonſtrari nequeunt, quam per illam figurarum ſuperpoſitionem, non quidem re ipſa exiſtentem, ſed cogitatione duntaxat, vt dixi, comprehenſam. Quò igitur ſe verteret? quid ageret? Excogitauit ſanè rem magis à Geometria alienam, quàm eſt ſuperpoſitio illa figurarum. Coactus enim eſt aſſerere, propoſitionem 4. lib. 1. eſſe definitionem angulorum æqualium, (& quis vnquam talem audiuit definitionem?) atque adeò concedendam eam eſſe ſine demonſtratione: propoſitionem verò 8. eiuſdem lib. principium eſſe per ſe quoque notum. Quod vt credibile magis efficiat, ita ſcribit in propoſitionem 4. lib. 1. (Etenim nulla euidentiori ſpecie æqualitas figurarũ dignoſcitur, quàm ex laterum æqualitate.) *Idemq; quaſi confirmat, & repetit in propoſitionem 8. eiuſdem lib. dum ita loquitur.* (Quis enim negauerit, duas ſuperficies eſſe æquales, quarum latera & quantitate, & numero ſunt æqualia?) *Hæc Peletarius, vt dictæ propoſitiones Euclidis ſine demonſtratione admittantur, commentus eſt, ſed quæ omnino falſa ſunt: vt magnoperè mirandum ſit, potuiſſe eum propoſitiones à Geometria prorſus alienas tam inconſideratè proferre. Scilicet verum eſt, quod Philoſophi aſſerunt; Dato vno abſurdo, cætera conſequuntur. Aſſumpſerat enim Peletarius propoſ. 4. & 8. lib. 1. pro principijs: quod quidem falſum eſt, atque abſurdum. Vnde ad eas abſurditates neceſſariò deuenit, quas etiam illi, qui vix adhuc principia Geometriæ attigerunt, vel facilè vitare potuiſſent. Nam quis non videt, Rhombum, & Quadratum, etiamſi latera habeant & quantitate, & numero æqualia, poſſe tamen inter ſe valde eſſe inæqualia? Id quod in Pentagonis quoque æquilateris, & in alijs figuris plurimum*

late-

laterum æqualium cerni poteſt: quod non eſt huius loci pluribus verbis explicare. Cùm ergo in omnibus figuris multilateris inæqualitas reperiatur, licet latera habeant & quantitate, & numero æqualia, demonſtrandum fuit neceſſariò Euclidi, æqualitatem triangulorum colligi ex laterum æqualitate, quandoquidem in aliis figuris ea non colligitur. Quare neque propoſitio 4. Definitio, neque propoſitio 8. principium erit; ac proinde omnes propoſitiones, quæ illis nituntur, quæ innumerabiles propemodum ſunt, corruant neceſſe eſt, niſi demonſtrationes Euclidis recipiantur in illis propoſitionibus, cum alio modo demonſtrari non poſſint. Demonſtratio enim noua propoſ. 4. quam Peletarius confinxit, nihil aliud eſt, quàm (vt cum Logicis loquamur) petitio principij. Id quod perſpicuum erit cuilibet, qui eam diligentiùs conſiderare voluerit. Nam in ea ſolùm conſtruitur, vnum triangulum poſteriori ex duobus datis æquale, immò idem, atque hoc ipſum quidem ineptiſſimè, cùm ad id præſtandum circulos deſcribat Peletarius, quibus tamen in demonſtratione non vtitur, quod vitioſum omnino eſt in Geometria: Deinde infert, triangulum hoc conſtructum, quod à poſteriori ex duobus propoſitis non differt, priori eſſe æquale, ſine vlla demonſtratione; certum autem eſt, hoc ab initio propoſitum fuiſſe, vt demonſtraretur. Quocirca manifeſtè principium petit, cum eadem facilitate ſtatim in principio concludere potuiſſet, etiamſi nullam adhibuiſſet conſtructionem, triangula propoſita eſſe æqualia; quippe cùm conſtructio illa ad rem non faciat. Idem dico de demonſtratione propoſ. 24. lib. 3. quam etiam nouam confinxit: quod eorum iudicio, ad quorum manus eius commentarij peruenerunt, relinquo. Prætereo alia loca innumerabilia, in quibus abutitur propoſitionibus Euclidis in demonſtrando, vt quod plerunque ſecundam propoſ. lib. 1. inſcitè pro tertia aſſumat, &c. Neque enim mihi in animo nunc eſt, eius commentarios examinare, ſed ſolùm calumnias, quas frequentes in ſua Apologia adhibuit, à me depellere. Quæ cùm ita ſint, quod ille falsò de me, verè ego de illo dicere poſſem, rubere me, (vt eius verbis vtar) Euclidi interpretem contigiſſe, qui nō iam Theonem, aut Campanum emendet, ſed ipſum Euclidem ſine cauſa reprehendat; quippe cùm ego Euclidem (vti par eſt) à calumniis ipſius defendam, omneſq; inſidias, ac fallacias, quas contra eum inſtruxerat, detegam ac refellam. Liquet igitur, me ea mente non fuiſſe, vt Peletarium redarguerem, cùm tot ac tantos errores diſſimulauerim: quos ego ne nunc quidem in lucem protuliſſem, niſi vellem omnes & intelligere, quantum Peletarius à me, de quo tam acerbè queritur, tum beneficium acceperit, & ex breui hac diſputatione fructus aliquid, vtilitatiſq; percipere. Nunc vt, quam diſpari ille animo in me fuerit, appareat, eius calumnias breuiter exponam, atque ita refellam ac diluam, vt omnes oculis videant, eas eſſe calumnias: In quo tamen eiuſmodi à me moderatio adhibebitur, vt modeſtia, quæ hominem reli-

Digitized by Google

religioſum decet, minimè obliuiſcar. Neque enim illi, vti prouocauit, reſpondebo.

PRIMVM itaque mihi obijcit Peletarius, quod in eius demonſtrationibus citandis ita me geſſerim, vt ſi quo modo nomen ipſius ſupprimere potuiſſem, id me oſtendam libenter fuiſſe facturum. Quod quam ſit falſum, facilè iudicabunt ij, qui meos commentarios legerint; cùm vbique eum honorificè appellem, eiq; plurimas demonſtrationes adſcribam, tanquam proprias, quas tamen aliter, quàm ipſe, & multò breuius demonſtro, & interdum etiam (quod maius eſt) vniuerſalius, vt liquidò conſtat ex ijs, quæ tum ad propoſ. 38. tum ad propoſ. 45. lib. 1. ex Peletario demonſtraui, vt alia interim taceam: quæ non iniuria mihi vendicare potuiſſem: vt mirer, quid illi in mentem venerit, id à me parum ſyncerè, atque adeò inuidioſè factum exiſtimare, quod ego verebar, ne nimis ambitioſè factũ quiſpiam iudicaret. Quod verò propoſ. 16. lib. 3. & in prioribus duabus definitionibus lib. 5. vt ipſe obijcit, animoſè, vt ego fateor, liberè, quid de eius demonſtrationibus ſentirem, expoſui, id feci, vt iam antè dixi, non cuiuſquam lædendi cauſa, ſed quærendæ veritatis. Ea enim eſt natura, & conditio eorum, qui liberalibus artibus dant operam, vt etiamſi alter alterius interdum ſententiam impugnet, non tamen idcirco odijs potiùs, quàm ingenijs inter ſe certare videantur. Qui ſit aliorum ſenſus ignoro, equidem, vt ſuprà dixi, ita ſum animo, vt ſi quis me alicuius erroris in demonſtrando commiſſi admoneret, ei quàm maximas gratias haberem: atque vt liberiùs id facerent, enixè rogaui non paucos, & nunc iterum eoſdem, atq; etiam alios amicè oratos volo. Scio enim, quàm facilè poſſit in ſuis quiſq; inuentis hallucinari; video (quod ipſe quoque Peletarius in Apologia ſapienter aſſeruit) omnibus hominibus commune eſſe, vt peccent. Deinde quod in additionibus ad propoſ. 47. lib. 1. eius mentionem non fecerim, non eſt, quod ægrè ferat, cùm illæ propoſitiones non ſint ab ipſo inuentæ. Quædam enim multo tempore ante ipſum demonſtrata ſunt vel à Campano, vel à Proclo, aut Theone, quaſdam verò demonſtraui egomet, antequam ipſius demonſtrationes vidiſſem; quòd adeò manifeſta ſint, & faciles, vt nulla probatione egeant, ſed ſint inſtar corollariorum propoſ. 47. Vt nulla prorſus laus, aut gloria illi acceſſura videretur, ſi maximè eas ab ipſo inuentas eſſe (quod tamen verum non eſt) prædicaſſem; cùm eas quilibet, modo primoribus labris ſtudia Mathematica deguſtarit, nullo negotio ex illa propoſ. 47. colligere poſſit: Vt non videam, cur tandem eas propoſitiones tanti ponderis eſſe dicat, cùm ſint omnium iudicio leuiſſimæ; adeò vt in pleriſque earum nec ipſe Peletarius demonſtrationem vllam, propter earum euidentiam, adducat, ſed eas nulla probatione egere fateatur. Denique non eſt, quod tantopere mihi ſuccenſeat idcirco, quod conſtructionem Pentagoni æquilateri, & æquianguli ſuprà datam rectam lineam finitam ei non tribuerim: quoniam in ea conſtru-

ſtru-

Digitized by Google

ſtructione nihil prorſus ab eo ſum mutuatus: quod iis diiudicandum relinquo, qui meam cum illius conſtructione contulerint. Nam & mea omnino diuerſa eſt, & ille in ſua mirificè (vt alia peccata taceã) abutitur propoſitione 9. lib. 3. cùm ex ea probet, punctum quoddam eſſe centrum circuli, qui nondum eſt deſcriptus. Geometra ſanè dixiſſet, punctum illud eſſe eiuſmodi, vt circulus ex eo deſcriptus ad interuallum cuiuslibet lineæ rectæ ex illis tribus, quæ ibi oſtenſæ ſunt æquales, tranſeat per extremitates reliquarum duarum linearum æqualium. Nam propoſitio 9. lib. 3. nihil eo loco ad rem facit, cùm propoſitum ex ipſa conſtructione poſſit concludi, & ex demonſtratis, vt proximè dixi, etiamſi propoſitio illa vera non eſſet, aut nuſquam demonſtrata. Idem peccatum committit Peletarius in omnibus propoſitionibus lib. 4. in quibus vel intra figuram rectilineã, vel circa eandem circulus deſcribendus eſt. Quòd ſi ideo ſum reprehendendus, quòd propoſitionem vnã, multò aliter à me, & breuius demonſtratam, ei non aſcripſerim, non video, quo pacto in idem ipſe vitium non incurrat, cùm problema hoc (Propoſitis duabus lineis inæqualibus, potentiam maioris ſupra minorẽ cognoſcere) *multis ſeculis ante ipſum à Theone demonſtratum ſibi arroget, hac ſolùm de cauſa, vt arbitror, quod illud alia ratione, longiore tamen, demonſtrauit. Mitto hoc aliud problema,* (Dato angulo rectilineo æqualem angulum curuilineum conſtituere.) *quod in Apologia ſuum proprium appellat, idemq́; hactenus deſideratum eſſe gloriatur; cùm tamen illud ipſum ego ex Proclo, qui multis ante eum ſeculis floruit, in defin. 5 lib. 5. multò breuiùs, & clariùs demonſtrauerim. Nam, vt eo in loco oſtendi, ſi rectæ lineæ datũ angulum rectilineum continentes ponantur æquales, & circa ipſas duo ſemicirculi (qui æquales erunt) verſus eaſdem partes deſcribantur, illico conſtitutus erit angulus curuilineus dato angulo rectilineo æqualis: Neq; opus eſt tot ambagibus vti, quot Peletarius ad eam rem demonſtrandam adhibet; quamuis robur demonſtrationis ipſius idẽ ſit, quod meæ. Et quod magis mirandũ eſt, fatetur Peletarius, ſe meam demonſtrationem vidiſſe, & eã nihilominùs ſibi audet, tanquam propriã, arrogare. En cur Peletarius clamet, me nõ paucas demonſtrationes parum honeſtè, vt mihi vendicem, ſibi ſubducere conatũ. Quis autẽ non videt, id eum in altero vituperare, quod ipſe ſibi glorioſum putat? Itaq; multò verius, ac iuſtius eodẽ illum crimine ego, quàm ille me, cõdemnare poſſum; cùm nunquã propoſitionũ illarum inuentorem me appellauerim, vt ipſe, ſed ſolũ eius nomen, ob rationes à me expoſitas, reticuerim.*

DEINDE *angulum contactus, & acutum rectilineum eiuſdem generis eſſe, contra me pluribus verbis conatur oſtendere. Sed neſcio quo modo aberrat, quod dicitur, à ſcopo. Solùm enim probat, vtrumque angulum eodem genere quantitatis contineri, hoc eſt, vtrumq; angulum planũ eſſe; quòd acutus angulus rectilineus, vel etiam rectus conſtare poſſit ex angulo contactus, & alio angulo mixto: quod ne-*

que

que ego, neque vllus vnquam Geometra negauit. Ego angulos illos eiuſdem eſſe generis negaui hac ſolùm de cauſa, quòd angulus contactus quantumuis multiplicatus angulum acutum rectilineum ſuperare nequeat, vt in ſcholio huius propoſ.16. euidenter oſtendi. Hinc enim fit, vt alter ad alterum proportionem non habeat, atque adeò quodammodo diuerſi generis ſint: quemadmodum eadem de cauſa linea recta finita, & infinita non cenſentur eſſe eiuſdem generis, cum altera ad alteram proportionem non habeat; quamuis ſub eodem genere magnitudinis; nimirum ſub linea recta, comprehendantur. Hoc itaque feriat, vt collimaſſe videatur: quanquam vt omnia faciat, collimabit nunquam; ita longè abeſt, quod eſt propoſitum. Magnitudines autem, quarum altera multiplicata alteram ſuperare nequit, non cenſeri eiuſdem generis, (quod ad proportionem attinet) licet ſub eodem genere quantitatis, hoc eſt, ſub longitudine, aut latitudine, aut profunditate, aut numero, collocentur, liquidò conſtat ex defin.5. lib.5. vbi Euclides ſatis perſpicuè explicat, cuiuſmodi debeant eſſe magnitudines eiuſdem generis, inter quas proportio reperitur. Quare viderint alij, Peletarius homo conſideratus quam cogitate me incogitantem hominem appellarit; quaſi non rectè intellexerim, quæ magnitudines ſint eiuſdem generis, quæ non ſint. Nunquam enim dixi (id quod mihi affinxit, vt carperet) duarum magnitudinum, quæ ſub diuerſis quantitatis generibus collocantur, quales ſunt linea, ſuperficies, corpus, ac numerus, alterutram ita poſſe multiplicari, vt alteram ſuperet: In quo, nemine reluctante, fruſtra ſeſe fatigat, vt doceat, id fieri non poſſe, ſed de illis duntaxat magnitudinibus ſum locutus, quæ cùm in eodem genere quantitatis verſentur, diuerſi tamen generis cenſeri poſſunt: quales ſunt ſuperficies rectilinea, & curuilinea, ſiue mixta: Itemq; linea recta, & curua. Hæ etenim ita differre inter ſe videntur, vt Ariſtoteles liquidò affirmarit, vnam alteri æqualem eſſe non poſſe: quod tamen (pace Ariſtotelis dictum ſit) verum vſquequaque non eſt; cùm Archimedes in lib. de lineis ſpiralibus demonſtrauerit, quanam linea recta æqualis poſſit eſſe circumferentiæ cuiuſuis circuli dati, idemq; nos in quadratura circuli oſtenderimus. Non igitur negare poterit Peletarius, ab Euclide defin.5. lib.5. aliquas quantitates à proportionis definitione excludi, diuerſiq; propterea eſſe quodammodo generis, quod ad proportionem attinet, licet in eodem magnitudinis genere ponantur: quales ſunt angulus contactus, & angulus rectilineus; Linea item recta finita, & infinita: Multas item magnitudines comprehendi in eadem definitione proportionis, quas plerique excludebant; cuiuſmodi ſunt curuilinea ſuperficies, & rectilinea; nec non linea circularis, & recta, vt paulò antè diximus, latiuſq; in defin.5. lib.5. exponemus. Verùm Peletarius, ne opinionem illam ſuam, quam de angulo contactus ſemel imbiberat, deſerere cogeretur, noluit hanc expoſitionem 5. defin. lib.5. recipere;

immò

immò eam vt oppugnet, omnes videtur in Apologia intendiſſe neruos, oblitus ſui, qui ferè eodem modo illam defin. in 5. lib. olim expoſuerat; niſi quod non rectè inde colligit, angulum contactus non eſſe quantitatem, propterea quòd multiplicatus nullam magnitudinem, vt dicit, poſſit excedere. Hoc enim (pace eius dixerim) falſum eſt. Nam licet angulus contactus multiplicatus angulum rectilineum non poſſit excedere, excedet tamen alium angulum contactus. Quare ex illa defin. ſolùm rectè colligitur, angulum contactus ad angulum rectilineum non habere proportionem vllam; ad angulum verò alium contactus quemcunque proportionem habere. Sed ſiue ita intellexerit eam defin. vt ex commentarijs eius in lib. 5. colligi poteſt, ſiue ſecus, vt in Apologia indicare videtur, non multum laboro: Certè ita illam eſſe intelligendam, vt expoſui, nemo qui verba Euclidis diligenter expenderit, negabit. Verum enim verò, ſi mihi fidem habere non vult Peletarius, habebit certè, (niſi arrogans haberi volet) aut Proclo grauiſſimo ſcriptori, qui lib. 2. in lib. 1. Euclidis ad definitionem anguli plani eodem modo definitionem illam intellexit, aut Petro Nonio Luſitano, quem tanti facit, (& meritò id quidem: fuit enim acerrimo vir ingenio, & nullo hac noſtra ætate in Mathematicis inferior) vt eum vnum pro multis millibus teſtem citet, & ſuarum demonſtrationum approbatorem, qui diſertiſſimis verbis tum in libro de Erratis Orontij, tum in Algebra ſua, illam definitionem explicat, vt à me eſt expoſita: quin etiam ibidem aſſerit ex ea defin. colligi, angulum contactus ad angulum rectilineum, & lineam finitam ad infinitam nullam habere proportionem; vt Petrus Nonius, quem teſtem produxerat pro ſe Peletarius, iam pro me teſtimonium dicat. Atq; ex hiſce duobus locis Petri Nonij facilè quiuis intelliget, quam ſine ratione, & quanto contradicendi ſtudio mihi inſultet Peletarius, cùm ſemel atque iterum odioſè percontatur, vndenam potuerim illi lineam infinitam deportare. In idem enim crimen (ſi crimen eſt, lineam infinitam exempli cauſa nominare) vocat etiam Petrum Nonium teſtem ſuum, atque adeò omnes Philoſophos, quorum eſt illa vox nemini inaudita, præterquam Peletario, finiti ad infinitum nullam eſſe proportionem. Deſinat igitur à me ſciſcitari, vnde lineam infinitam deportauerim: Inde enim reſpondebo, vnde eam Petrus Nonius, vnde Philoſophi omnes deportarunt. Quid? nonne ſophiſma illud Peletarij, ſemper in hoc erro, demonſtratio illa, volui dicere, & quidem palmaris, qua conatur oſtendere, propoſitionem 1. lib. 10. cum propoſ. 16. lib. 3. ſtare non poſſe; ſi angulus contactus concedatur eſſe quantitas, à Petro Nonio Peletarij cognitere eadem prorſus ratione, qua à me ipſo confutatur? Quæ ſi germana demonſtratio eſt, miror quid ſit, cur eam Nonius Geometriæ ſcientiſſimus, idemq; Peletarij approbator, minus probarit: Cur nihilo magis demonſtrationes eiuſdem, quibus planum facit, (vt putat) angulum contactus

quantitatem non eſſe, eundem illum Nonium nihil admodum mouerit? Id enim (niſi fallor) illa Nonij verba (Si quis ſententiam Peletarii de angulo contactus amplecti velit.) *declarant. Nam ſi demonſtrationes exiſtimaſſet, profectò Peletarij doctrinam in eo retinendam eſſe dixiſſet, Geometricæ enim demonſtrationes eiuſmodi ſunt, vt aſſenſum extorqueant, ac dubitationem omnem excludant, nulloq; modo quempiam ſinant ancipiti opinione diſtrahi ſic, vt tum aſſentiatur, ſi velit, tum, ſi nolit, diſſentiat. En cur Peletarius Nonij teſtimonio aliorum iudicia contemnat, en præclarum teſtimonium, quod Petrus Nonius eius demonſtrationibus dedit: quo æquiore animo ferat, eas à me nihilo magis, quàm ab illo ſuo approbatore, demonſtrationes putari.*

TERTIO, quod exiſtimare dixi Peletarium, angulum contingentiæ nihil eſſe, falſum eſſe clamat: Nuſquam enim dixiſſe ſe, nihil eſſe, ſed quantitatem non eſſe. Ita ne verò? at in prædicamento Quantitatis, quod neque eſt punctum. (quis enim inclinationem illam punctum eſſe dixerit?) neque quantitas, quo alio nomine vocetur, quàm Nihil? Sed vt vt dixit, profectò non modò mirabile eſt, ſed monſtri in Geometria ſimile, putare angulum contactus non eſſe quantitatem, qui poſtea additus alijs angulis efficiat curuilineum angulum rectilineo æqualem. Quis enim vnquam Geometrarum id, quod quantitas non eſt, magnitudini adiunxit, vt æqualem eam alteri efficeret? Prætereo, quòd figura trilatera curuilinea intra tres circulos ſe mutuò tangentes concluſa nullum haberet angulum ex Peletarij ſententia; quia tres illi contactus, anguli non ſunt: cum tamen tribus diuerſis lineis contineatur; quod omnino nouum eſt, & inauditum apud Geometras. Itemque, ſi quatuor, aut plures circuli ſe mutuò tangerent, vt fieret figura curuilinea quadrilatera, vel plurium laterum, illa nullum angulum haberet. Atque etiam, ſi duæ lineæ rectæ angulum continentes, vnum eundemque circulum tangerent, trilatera illa figura habens tertium latus curuum, vnicum tantùm haberet angulum. Quæ omnia ſi ſunt abſurda, conſentanea non eſt opinio Peletarij. Sed nimis fortaſſe multa ad Nihil illud Peletarij euertendum, ad quod tuendum ille nihil afferat. Quoniam verò, ne pro Nihilo ſuo nihil agere videatur, quando res non poteſt, mea verba carpit, verba defendam: quæ quidem ille neſcio quibus præſtigijs ita deprauat, vt dicere videar, Nihil eſſe minus quocunque angulo: atque (vt ſimplicem, credo, hominem irretiat) quærit ex me, quod tandem genus ſermonis ſit illud. Viderit is, cuius ex officina prodijt. Neq; enim ego eiuſmodi ſermonem agnoſco, qui, Nihil eſſe minus quocunque angulo, nuſquam dixerim, niſi ex ſententia Peletarij. Sed videlicet homo vehemens, vt ſuum illud Nihil vlciſceretur, aliud mihi Nihil affinxit, quo cum impune pugnaret: At quàm palæſtricè pugnat? quàm ſibi placet hoc loco, dum meum illud argumentum, quo petitus fuerat, in me ipſum mira venuſtate conuertit? Sic enim argumentatur. (Angulum

gulum

[N]ilus contactus nihil eſt: Angulus contactus angulo contactus maior eſt. Angulus igitur maior nihilo eſt: Atqui Clauius eundem ponit minorem nihilo. Eſt igitur angulus contactus nihilo maior, & idem nihilo minor.) *Mox quaſi Nihil illud ab ſe effictum iugulaſſet, exclamat.* (En Clauii argumenta, quæ vtrum tandem Peletarii ſophiſmata ſunt, an Clauii potiùs figmenta, cùm ipſe ſuum angulum contactus nihil eſſe dicat, non ego?) *Verum vt hominem fictum, atq; adumbratum nequicquam petere deſinat, virum oſtendam, qui cum, ſi velit, certare cum laude poſſit. Ego, vt oſtenderem, angulum contactus, ex Euclidis ſententia, verè eſſe angulum, & angulum ſemicirculi angulo recto rectilineo minorem; ita ſum argumentatus. Si Euclides ſenſiſſet, angulum contactus nihil prorſus eſſe, (hoc eſt, vt Peletarius intelligit, non eſſe angulum, vel non eſſe quantitatem) & angulum ſemicirculi æqualem recto rectilineo: quid, obſecro, tantoperè deſudaſſet, vt demonſtraret, angulum contactus eſſe minorem omni acuto rectilineo, angulum verò ſemicirculi maiorem? Quid enim clarius, quàm nihil, cuiuſmodi eſt angulus contactus, ex Peletarij ſententia, hoc eſt, quàm id, quod quantitas non eſt, minus eſſe quocunque angulo? Quid rurſus magis perſpicuum, quàm angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum ſemicirculi, maiorem eſſe quolibet acuto? Agnoſcat itaque Peletarius, Nihil illud ſuum malè à nobis acceptum, idque ita vlciſcatur, vt meum hoc argumentum refellat: in quo ego ſi angulum contactus dixi eſſe nihil, & non potiùs eum nihil eſſe aſſerat ex ſententia Peletarij, libenter manus dabo. Videtur Peletarius aut non intellexiſſe meum argumentum, aut intelligere noluiſſe: niſi eum quis dicat, dedita opera verba mea voluiſſe cauillari; quod & pleriſque alijs in locis facere videtur. Numquam enim dixi, angulum contactus minorem eſſe, aut maiorem nihilo: Solum affirmaui, angulum contactus quemcunque minorem eſſe, aut maiorem aliquo alio angulo contactus; quem non ego dixi nihil eſſe, ſed Peletarius, eundemq; Euclides minorem quolibet acuto rectilineo rectè demonſtrauit. Vt autem intelligat Peletarius, me, quod ipſe negat, didiciſſe Dialecticam, illum ipſum tam lepidum, atq; acutũ ſyllogiſmum, quo nihil illud ab ſe confictum mira venuſtate confinxit, paulisper conſiderabimus; vt quàm ſuo iure Dialecticæ ignaros alios vocet, appareat. Nam mihi quidem malè tornatus ille ipſe ſyllogiſmus videtur, incudique reddendus. Etenim cùm verſetur in tertia figura, in eo maior extremitas (vt Dialectici loquuntur) quæ eſt, Nihil, de minori extremitate, quæ eſt, angulo contactus maior, in rectè prædicari deberet, hoc pacto. Angulus contactus nihil eſt: Angulus contactus angulo contactus maior eſt. Igitur aliquid, quod angulo contactus maius eſt, nihil eſt. Quæ quidem concluſio rectè ſequitur ex præmiſſis, quarum prior Peletarij eſt, non mea, poſterior autem mea, & Procli, immò & Euclidis. Concluſio autem illa Peletarij,*

Angulus igitur maior nihilo eſt, nulla ratione ex præmiſſis inferri poteſt. Nam ſi, angulum cùm dicit, intelligit Peletarius angulum contactus, aſſumitur medius terminus, qui in vtraque præmiſſa ſubijcitur: quod nefas eſſe, Ariſtoteles in prioribus Anal. & Dialectici omnes clamant. Si autem alium angulum intelligit, aſſumitur in concluſione terminus, cuius nulla facta eſt mentio in præmiſſis: quod nihilo magis licere, nèmo eſt tam plumbeus in Dialecticis, qui neſciat. Neque contendat Peletarius, mentionem factam eſſe anguli in minore extremitate, vbi dictum eſt, angulum contactus angulo contactus maiorem eſſe. Nam angulus in minore extremitate poſitus eſt in obliquo, qui in concluſione ſubijcitur in recto: quod, vt auctore Ariſtotele docent omnes Logici, ſine peccato fieri non poteſt. Quod, vt planum fiat, vtemur ea palæſtra, quam ab illo didicimus. Si quiſpiam ita argumentetur; Angulus in ſemicirculo rectus eſt: Angulus in ſemicirculo angulo acuto maior eſt. Angulus igitur acutus maior recto eſt; quis, modò ſit imbutus Dialecticis, eiuſmodi argumentationem probet, cùm præmiſſæ veræ ſint, concluſio autem falſa? Talis ille ſyllogiſmus eſt Peletarij, qui apud imperitam multitudinem alter Chryſippus videri voluit. Concluſio, quæ rectè ex præmiſſis inferretur, hæc eſſet. Igitur aliquis angulus, qui acuto maior eſt, rectus eſt. Sed tamen ei veniam dandam puto, quòd ſe Geometricum Dialecticum, ex alio quodam Dialecticorum genere, profitetur, cuius ego me Dialecticæ, ſi ab Ariſtotelica abhorret, planè fateor ignarum. Fatetur deinde Peletarius, ſe non intelligere, quo pacto dicere poſſim, angulum rectilineum minimum dari non poſſe, & tamen angulum contactus eſſe omni acuto rectilineo minorem, (ipſe vt aliquid addat de ſuo, dicit, omni minimo acuto rectilineo minorem; cùm tamen verbum illud, minimo, ego non addiderim) cupítque ſcire, quid aliud ſit, angulum contactus minorem eſſe omni rectilineo acuto, quàm angulum contactus eſſe acutorum rectilineorum minimum. Qua in re morem geram homini non grauatè, etſi è ſcholio huius propoſ. 16. potuit id, quod cupit, cognoſcere. Nempè ea ratione me illud potuiſſe dicere, qua dicimus: angulum obtuſum rectilineum minimum dari non poſſe, & tamen angulum rectilineum acutum eſſe omni obtuſo rectilineo minorem. Item quemadmodum aliud eſt, angulum rectilineum acutum minorem eſſe omni rectilineo obtuſo, quàm angulum rectilineum acutum eſſe obtuſorum rectilineorum minimum: propterea quòd angulus acutus non eſt obtuſus, ſicut nec angulus contactus rectilineus eſt, aut acutus. Id quod etiam clariſſimè docet Proclus lib. 2. in primum Euclidis ad defin. anguli recti, obtuſi, & acuti. Sed hæc puerilia ſunt; & quæ magis ad Grammaticos ſpectent, quàm ad Geometras. Quod etiam, ne librum meum parum ſpiſſum viderer feciſſe, ſuas demonſtrationes ad verbum me recitaſſe queritur, id in me reprehendit, quod ego in ipſo deſidero. Id enim eo à

me con-

me conſilio factum eſt, ut omnes planè viderent, ſyncerè me, ac fideliter eius opinionem retuliſſe, nullumq; omnino verbum immutaſſe. Quod utinam in meis verbis recitandis ipſe facere in animum induxiſſet, Multò enim minùs ſpiſſam Apologiam ſuam facere potuiſſet. Nam ego, quid erat, cur laborarem meum librum Peletarij verbis magis ſpiſſum efficere? Qui enim parum ſpiſſum iudicarem librum eum, qui nec raras, nec inanes in libros omnes Euclidis commentationes contineret, cùm Peletarius ſuum librum, qui ſex priorum duntaxat librorum demonſtrationes complectitur, ſatis ſpiſſum ſit arbitratus? Sed eo ſum æquior Peletario, quod ex ſe alios iudicat. Nam in Apologia ſua, ne inanis rerum videretur, tres demonſtrationes nihil penitus ad eam pertinentes inſerſit: quarum priorem immeritò ſuam propriam facit, ut ſuprà dixi: poſteriorem verò, quam mirum in modum gloriatur ſe clariorem feciſſe, ego & longè breuiùs, & dilucidiùs (niſi meorum me amor fallat) iam pridem demonſtraui, ut mox, Deo adiuuante, ex Geometria mea Practica clariſſimè apparebit. Sed licuerit Peletario ſua Apologia, ne incomitata prodiret, nouo more comites ac pediſſequas adiungere: mihi cur non liceat, quod omnibus ſemper licuit, aliorum ſententias totas meis ſcriptis intexere? Aut igitur omnes reprehendat, atque inprimis Petrum Nonium laudatorem ſuum, qui idem fecit in refellendis paralogiſmis Orontij, aut ſine cauſa id ſe mihi vitio dediſſe fateatur. Quòd ſi, poſtquam tam fideliter eius verba propoſui, Peletarius criminatur, me eius ſententiam perperam eſſe interpretatum, quid facturus fuiſſet, ſi alienis verbis eius opinionem in medium adduxiſſem? Equidem facilè ſibi perſuadebit quis, nullum eum verbum relicturum fuiſſe, quod non reprehendiſſet.

QVARTO ut leuiora hæc omittat, illud putat palmare, quod me laborare oſtendit, ut probem, angulos contactus alios alijs eſſe inæquales: proptereà quòd ſcripſi æqualitatem angulorum eiuſdem generis requirere eandem inclinationem linearum, ita ut lineæ vnius conueniant omnino lineis alterius, ſi alter alteri ſuperponatur, iuxta octauum pronunciatum. Qua in re dupliciter me peccare ait. Primum quod dicam, ad æqualitatem angulorum eiuſdem generis requiri eandem linearum inclinationem; cùm tamen angulus rectilineus oſtenſus ſit à me æqualis curuilineo, atque adeò eiuſdem generis cum illo, licet non ſit in vtroque eadem linearum inclinatio. Deinde, quòd putem angulos contactus ideo inter ſe inæquales eſſe, quod ſibi mutuò non congruant. Equidem ſi quid in eo à me peccatum eſſe intelligerem, & peccatum (quod eſt ingenuo, & liberaliter educato homine dignum) agnoſcerem, & Peletario correctori, & emendatori meo (quocunque id animo fecerit) gratias agerem. Nunc verò, cum, tota re etiam atque etiam conſiderata, nihil omninò vitij ineſſe videam, ita, quæ obijciuntur, diluam, ut tamen gratiam habeam Peletario,

tario, qui occaſionem dedit eius loci diligentiùs explicandi. Ego igitur eo loco intellexi angulos eiuſdem generis illos, qui vnam lineam habent rectam, & alteram circularem, quales ſunt anguli contactus, & ſemicirculorum, de quibus tunc agebamus. Quare cùm linea recta vnius congruat lineæ rectæ alterius, circularis verò circulari non item, niſi circuli ponantur æquales, efficitur, angulos illos eſſe inæquales inter ſe, quippe cùm alter alterum excedat. Eadem ratione, ſi dentur duo anguli curuilinei æqualium circulorum æquales, neceſſe eſt, lineas vnius lineis alterius congruere, ſi alter alteri ſuperponatur. Quòd ſi Peletarius hanc doctrinam oppugnat, ſciat, ſe iam bellum mouere non mihi, ſed Proclo, qui lib. 3. in primum Euclidis ad propoſ. 4. idem prorſus docet, quod ego. Ait enim (Angulorum autem æqualitatem ſumemus iuxta conuenientiam laterum in rectilineis: in cæteriſque omnibus, qui eiuſdem ſunt ſpeciei, vt in Lunaribus, in Syſtroidibus, atque in vtrinque conuexis, &c.) *Et infra.* (Quæ æqualia data ſunt, ſibi inuicem congruunt. Hoc autem non in omnibus verum eſt, ſed in ijs, quæ ſpecie ſimilia ſunt. Specie autem ſimilia hæc dico, vt recta linea rectæ lineæ, & circumferentia circumferentiæ circuli eiuſdem, & anguli, qui à ſimilibus ſimiliter iacentibus lineis comprehenſi ſunt. Horum autem dico, quòd quæ æqualia data fuerint, ſibi inuicem congruunt.) *Nonne luce clarius ex his colligitur, Proclum illos ſolùm angulos contactus concedere æquales, quorum recta linea, & curua ſibi mutuò congruunt? Temerè igitur Peletarius mihi obijcit angulum rectilineum, & curuilineum, triangulum & quadratum, atque alia huiuſmodi, de quibus eo loco ſermo non erat; quippe quæ non ſint eiuſdem ſpeciei, atque adeò æqualitatem tueantur, etiamſi alterum alteri non congruat. Vt iam vereri incipiam, ne Peletarius noſter contentionis ſit cupidior, quàm veritatis.*

POSTREMO, vt nihil intactum relinquat, me non modò Geometriæ ignarum vocat, ſed etiam Logices: propterea quòd lib. 5. dixi, non rectè à quibuſdam diuidi Proportionem rationalem in proportionem æqualitatis, atque inæqualitatis; quòd multæ proportiones inæqualitatis ſint etiam irrationales. Ego verò (etſi non is ſum, qui mihi quicquam vllo in genere arrogem) tamen in hiſce ſtudijs, in quibus mediocriter verſatus ſum, planè rudem non eſſe, præ me ſemper tuli. Quantulum autem ſit id, quod in vtroque poſſim, cæteri melius, qui vacant amore, & odio, iudicabunt: Peletario quidem ipſi ita me adhuc reſpondiſſe arbitror, vt iam minùs fortaſſe ignarus Geometriæ, ac Dialecticæ videar, quàm putarat. Nunc, vt perſpiciat, neq; me pertinacem eſſe, neq; illa, quæ exagitat, à Dialecticorum præceptis abhorrere, libenter ei concedo, diuiſionem illam, quam à me reprehenſam criminatur, probam eſſe, ita tamen ſi in quolibet diuiſionis membro Diuiſum intelligatur: neque verò hoc vnquam negaui,

cùm

Digitized by Google

tiam alibi ſimiles diuiſiones vſurpem. Solùm id eo loci contendi, rectiùs meo iudicio, diuidi Proportionem in vniuerſum duplici diuiſione, priori quidem in proportionem rationalem, & irrationalem; poſteriori verò in proportionem æqualitatis, atque inæqualitatis, (quod veriſſimum eſſe, neminem negaturum cenſeo, qui rem diligentiùs expenderit) cùm tam priora duo membra diuidentia, quàm poſteriora totum Diuiſum, (vt Logici loquuntur) exhauriant: quàm ſi prius membrum prioris diuiſionis, hoc eſt, proportio rationalis, ſecetur in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis, cùm hæc membra diuidentia latiùs pateant, quàm Diuiſum, niſi in illis Diuiſum intelligatur. Atque eò magis duplex illa diuiſio mihi probatur, quòd non deſint, qui primùm partiantur Proportionem in proportionem æqualitatis & inæqualitatis; poſteriorem deinde hanc in proportionem rationalem, & irrationalem: contrario ſcilicet modo, quàm priores. Vt igitur hanc controuerſiam dirimerem, ac dubitationem, vtri rectiùs faciant, priores ne, an poſteriores, tollerem, ſtatui duabus diuiſionibus ſecandam eſſe Proportionem, quarum vtraque abſolutiſſima eſt, ac perfectiſſima. Non aliter arbitror, omnes magis eſſe probaturos, ſi corpus duplici diuiſione ſecetur, primùm quidem in viuens, & non viuens; deinde verò in album, nigrum, ac mixto colore affectum: quam ſi corpus viuens diuidatur in album, nigrum, ac mixto colore affectum; ob cauſam iam dictam: licet hæc ſubdiuiſio bona ſit, ſi Diuiſum ſemper intelligatur. Huiuſmodi diuiſiones ſexcentas adducere poſſem: ſed ſatis eſt, me prudenti lectori inſtitutũ meum in diuiſione Proportionis expoſuiſſe, & cur duplicem illam diuiſionem ſubdiuiſioni aliorum prætulerim. Quòd ſi tam acres, & ſeueri iudices ſingulorũ verborum aut improprietatum, quæ per incogitantiã interdum excidunt, eſſe velimus, nã ſcriptorum nullus aliquo vitio carebit, neq; ipſe quidem Peletarius, vt partim ex ijs, quæ dicta ſunt, conſtat, partim etiam ex alijs eius demonſtrationibus apparere poteſt: quas ſi liberet ad certam illam Dialecticorum normam exquirere, profectò reprehendendi materia non deeſſet. Verùm non eſt hoc noſtri conſilij, refellendi ſtudio vitia aliena ſcrutari, ſed vbi ſeſe occaſio obtulerit, meam (qualiſcunque eſt) de aliorum ſententijs ſententiam exponere: Solùm ab eo peto, (quoniam ſe tam acutum Dialecticum iactat, vt alios contemnere videatur; quanquam ex ſuperiore ſyllogiſmo, quem in me conuertit, liquidò conſtat, quam ſit Dialectica peritus) ex qua Logica hanc argumentationem hauſerit; Omnes anguli contactus ſunt minores quolibet angulo acuto rectilineo: ergo omnes inter ſe ſunt æquales. Itemque hanc; Anguli ſemicirculorum, quo à maioribus circulis fiunt, eo ſunt maiores: igitur tandem ad aliquem perueniemus, qui recto rectilineo maior ſit; in qua quidem ad Cardanũ ſcribit, nullum eſſe paralogiſmum. Ego ſanè vehementer miror, qua ratione in tam apertas hallucinationes, & viro Geometra omnino indignas, incidere

 potue-

Digitized by Google

potuerit. Sed argumentationes eiuſmodi ſatis ſuperq; in ſcholio huius propoſ.16. à me ſunt confutatæ, adductis contra ipſas euidentiſſimis inſtantijs. Deinde quòd me perſtringit, quaſi parum intellexerim, quæ ſit proportio rationalis, & quæ irrationalis, non multum laboro. Conſtat enim, eum ſtudio mihi detrahendi id dixiſſe, cùm has proportiones vbique ex ſententia grauiſſimorum ſcriptorum definierim, neque verò ipſe vllum peccatum à me ea in re eſſe commiſſum, poterit oſtendere. Certè commentarius meus in lib.10. Euclidis abundè declarat, num illas intellexerim, nec ne. Denique quod criminatur, me in definitionibus lib.5. proportionis nomen confundere cum Rationis nomine, nullo modo verum eſt. Perſpicuis enim verbis docui in defin.4. lib.5. me in commentario comparationem duarum quantitatum, Proportionem cum pluribus Geometris appellaturum, habitudinem autem proportionum, Proportionalitatem; licet in textu cum interprete illam dicam Rationem, hanc verò, Proportionem. Neque enim quicquam in textu Euclidis volui immutare. Itaque nulla in meis verbis poteſt eſſe ambiguitas.

EX his, quæ diximus, ſatis (vt opinor) apparet, doctiſſimos illos viros, de quibus initio memini, non ſine cauſa Apologiam Peletarij inanem, ac reſponſionis indignam iudicaſſe. Ego tamen, ne contemnere hominem viderer, quem ſemper laudandum eſſe duxi, occaſione inuitatus reſpondendum amicè putaui. Exiſtimet ille, angulum contactus quantitatem non eſſe, atque adeò angulum ſemicirculi recto rectilineo eſſe æqualem, ego certè contrariam ſententiam tuebor, donec aliud mihi demonſtratum ab aliquo fuerit: rationes enim Peletarij fallaces ſunt, nihilq; continent in ſe probabilitatis, vt in ſcholio huius propoſ.16. oſtendi, vbi omnes diſſolui, neque meis ipſe ſolutionibus vel vnum verbum (exceptis ijs, quæ ſuprà ex lib.10. adduxi) reſpondit; quod tamen maximè ad Apologiam pertinebat: Vt non ſine cauſa permulti exiſtimauerint, eum non veritatis ſtudio eam Apologiam ſcripſiſſe, ſed ne veritati ceſſiſſe videretur. Nec verò quiſquam putet, me vnum exiſtimare, angulum contactus verè eſſe angulum, & angulum ſemicirculi recto rectilineo minorem. Multos enim eius rei auctores, eoſq; grauiſſimos laudare poſſum, Theonem, Campanum, Petrum Nonium, & (vt Nonius refert) Archimedem, atq; Iordanũ: quin etiam (quod plurimi facio) Euclidem ipſum, eiusq; commentatorem celeberrimum Proclum; vt taceam ex Gallis præſtantiſſimos, atque eruditiſſimos viros non paucos, è quorum numero inprimis eſt Franciſcus Candalla ex illuſtriſſima Fluſſatum familia oriundus, qui inſigne volumen in elementa Geometrica Euclidis edidit, vbi ad propoſ. hanc 16. apertiſſimè docet, angulos contingentiæ verè eſſe angulos, ex definitione anguli plani, aliosq; alijs eſſe maiores, æquales, ac minores: Eos autem, qui aliter ſentiunt, (Peletarium proculdubio intelligit. Præter eum enim ad hunc diem nemo hac de re ſcripſit) abſurdè

multa

Digitized by Google

multa ex falſis ſuppoſitis concludere affirmat. Huc accedat etiam Henricus Monantholius Mathematicarum artium profeſſor regius, qui, cum Apologiam Peletarij in me conſcriptam vidiſſet, opuſculum eruditum aduerſus Peletarium de angulo contactus edidit. Vt autem ſtudioſus lector videat, quid in hoc negotio ſentiat Proclus, afferam in medium pauca quædam ex eius commentariis in lib. 1. *Euclidis, quæ obiter notaui, & ex quibus liquido conſtabit, eius ſententiam eſſe Peletarij commento prorſus contrariam. Primum itaque ita ſcribit lib.* 2. *in primum Euclidis, ad definitionem anguli plani.* (Duæ namque circumferentiæ ſe inuicem ſecando, vel ſeſe contingendo, angulos efficiunt. Quin etiam à recta linea, & conuexa circumferentia angulus continetur, vt Cornicularis.) *Intelligit autem nomine Cornicularis anguli angulum contactus mixtum. Paulo enim ante dixerat, angulum Cornicularem eſſe omni rectilineo minorem: quod ſolius anguli contactus proprium eſt. Deinde in eodem libro ad definitionem anguli recti, obtuſi, & acuti ita habet.* (Cornicularis namque angulus omni recto eſt minor, quandoquidem & acuto, nec tamen acutus eſt: Semicircularis itidem quocunque recto eſt minor, acutus tamen non eſt.) *Quid clarius, quam Proclum hic aſſerere, angulum ſemicirculi minorem eſſe recto? Rurſus lib.* 3. *ad propoſ.* 4. *lib.* 1. *Euclidis ita ſcribit.* (Addiſcemus enim, quòd angulus Cornicularis acuto ſemper inæqualis eſt, & nunquam æqualis; Et ſemicircularis ſimiliter, tranſitusque à maiori ad minus nòn omnino per æquale fit.) *En quam apertè docet, angulum ſemicirculi æqualem eſſe non poſſe angulo rectilineo, tranſitumque propterea fieri à maiori ad minus non per æquale: quorum vtrumque Peletarius negat, audetque poſterius appellare paralogiſmum. Denique eodem lib.* 3. *ad propoſ.* 23. *hæc verba habentur.* (Cum autem nullus angulus mixtus rectilineo æqualis eſſe poſſit, &c.) *Et Peletarius tamen non dubitat angulum ſemicirculi, qui mixtus eſt, angulo recto rectilineo facere æqualem, contra Procli ſententiam. Ex his liquere arbitror, vt de cæteris taceam, idem ſentire Proclum de angulo contactus, & ſemicirculi, quod ego contra Peletarium ſcripſi; quis autem neget, maiorem eſſe auctoritatem, meliora argumenta Procli, quam Peletarij?*

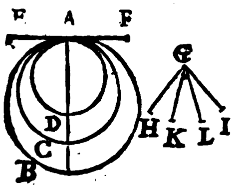
OBITER quoque hoc loco monendum lectorem cenſeo, id quod de angulo contactus, qui fit in circulis, ex ſententia Euclidis, & Procli docui, verum etiam eſſe de angulo contactus, qui in conicis ſectionibus efficitur, nimirum in Parabola, Hyperbola, & Ellipſi. Vt enim Apollonius Pergæus demonſtrat lib. 1. *propoſ.* 32. *in locum, qui inter coni ſectionem, & rectam lineam tangentem interiicitur, altera recta linea non cadit, atque adeo angulus ille contactus minor etiam eſt omni acuto rectilineo, & reliquus angulus ex recto (ſi nimirum ex puncto contactus ad lineam tangentem excitetur perpendicularis)*

Digitized by Google

omni acuto rectilineo maior. Si igitur, vt opinatur Peletarius, angulus contactus quantitas non eſt, (eadem enim hic eſt ratio, quæ in circulo) erunt omnes anguli contactus inter ſe æquales, hoc eſt, vt ipſe vult, non inæquales, & reliquorum angulorum ſinguli recto rectilineo æquales. Vbi ſanè maior abſurditas apparet, quo ad ſenſum, in ea Ellipſi, quæ perexiguam habeat latitudinem, & in ea Hyperbola, quæ ferè linea recta eſſe videatur. Valde enim inæquales cernuntur anguli ad verticem illius Ellipſis, & Hyperbolæ conſtituti; vt incredibile omnino ſit, niſi firma ratione demonſtretur, angulos illos contactus ad vertices ſectionum conſtitutos inter ſe, & reliquos ex rectis inter ſe quoque eſſe æquales; propterea quod in ea Ellipſi linea tangens magis recedere perſpicatur à circumferentia Ellipſis, quam in circulo; in illa verò Hyperbola minus. Sed hæc alio tempore examinanda relinquamus: nunc ad interruptam expoſitionem Euclidis reuertamur.

EX CARDANO.

ALIQVA quantitas poteſt continuè, & infinitè augeri, altera verò infinitè minui; & tamen augmentum illius, quantumcunque ſit, minus ſemper erit decremento huius.



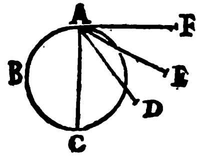
PROPONANTVR enim angulus contactus B A E, & acutus H G I. Si igitur deſcribantur alij circuli minores A C, A D, tangentes rectam E F, in A, augebitur continuè angulus contactus, vt dictum eſt. Si rurſus inter rectas G H, G I, alia recta cadant G K, G L, diminuetur continuè angulus acutus: Et tamen ſemper angulus contactus, quantumlibet augeatur, minor eſt angulo acuto, quantumuis diminuatur.

EX CAMPANO.

CÆTERVM ex hac propoſ. 16 perſpicuum eſt, vitioſam eſſe argumentationem hanc, qua vſus eſt Briſon in quadrando circulo, vt auctor eſt Ariſtoteles. Videlicet.

TRANSITVR à minori ad maius, vel contra, & per omnia media; ergo per æquale. Vel, contingit reperire maius hoc, & minus eodem; ergo contingit reperire æquale.

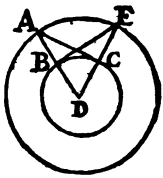
DESCRIBATVR enim circulus A B C, cuius diameter A C, moueri intelligatur circa extremum punctum A, fixum, per puncta D, E, F, donec circulum contingat in A. Hoc conceſſo, manifeſtum eſt, quam-



eſt, quamdiu recta A C, ſecat circulum, fieri angulum acutum minorem angulo ſemicirculi; quamprimum verò ſecare ceſſat, effici angulum rectum maiorem eodem angulo ſemicirculi. Cum igitur factus ſit tranſitus per omnes angulos rectilineos intermedios, patet vitium prioris argumentationis. Similiter quia nullus angulus rectilineus æqualis reperitur angulo ſemicirculi; (Rectus enim, vel obtuſus, maior eſt; & acutus, minor,) conſtat quoque vitioſam eſſe poſteriorem conſequentiam.

PROBL. 2. PROPOS. 17. xvj.

A DATO puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.



EX puncto A, ducenda ſit linea, quæ tangat circulum B C, cuius centrum D. Ducatur recta A D, ſecans circulum B C, in B. Deinde centro D, interuallo autem D A, deſcribatur circulus A E, & ex B, educatur B E, perpendicularis ad A D, ſecans circulum A E, in E. Ducta denique recta E D, ſecante circulum B C, in C, connectatur recta A C: quam dico tangere circulum B C, in C. Cum enim duo latera D E, D B, trianguli B D E, æqualia ſint duobus lateribus D A, D C, trianguli C D A, vtrumque vtrique, vt conſtat ex circuli definitione; angulusque D, contentus dictis lateribus ſit communis: Erunt *a* & baſes B E, C A, & anguli D B E, D C A, ſuper ipſas, æquales. Eſt autem D B E, rectus ex conſtructione. Igitur & D C A, rectus erit. Itaque C A, cum ſit perpendicularis ducta ad C, extremum ſemidiametri C D, tanget circulum, per corollariũ præcedentis propoſitionis. A dato ergo puncto A, ducta eſt A C, recta tangẽs circulum B C, in C, quod faciendum erat. a 4.

SCHOLIVM.

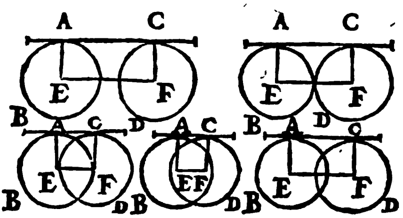
PRAXIS huius problematis ex ipſa demonſtratione facile elicitur. Faciliorem tamen praxim, ad propoſ. 31. huius lib. inuenies.

SED & ſequens problema cum Cardano abſoluemus.

PROPOSITIS duobus circulis, quorum neuter alterum includat; rectam lineam ducere, quæ vtrumque tangat circulum.

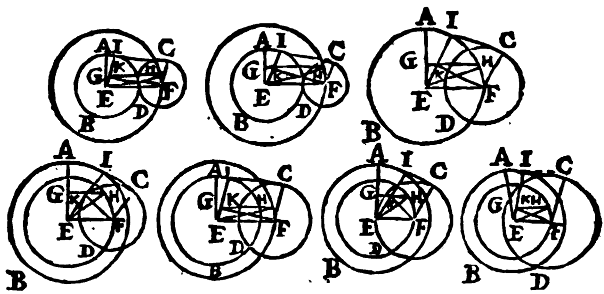
SINT primum duo propoſiti circuli æquales A B, C D, quorum centra E, & F, recta iungantur E F, ad quam ducantur perpendiculares E A, F C, ſecantes circumferentias in punctis A, & C. Dico re-

ctam per



ctam per A, & C, edu-
ctam vtrumq; circu-
lum tangere. Cũ enim
E A, F C, ſemidiame-
tri circulorum æqua-
a 28. pri mi. lium ſint æquales, a &
parallelæ, quod anguli
b 33. pri mi. E, & F, recti ſint;
b Erunt quoque E F, A C, æquales & parallelæ; Ideoque c & anguli
c 29. pri mi. A, & C, recti. Quare, per coroll. propoſ. 16. huius lib. recta A C, vtrumque circulum tanget, cum rectos angulos conſtituat in extremitatibus ſemidiametrorum.

SINT deinde duo circuli propoſiti inæquales A B, C D, quorum rurſus centra E, & F, iungantur recta E F, ad cuius interuallum ex E, centro maioris circuli circulus deſcribatur F H, ſi maior non tranſeat per centrum minoris. Deinde ducta ad E F, perpendiculari E A, abſcindatur ex ea portio A G, ſemidiametro minoris circuli C D, æqualis; & ex G, ipſi E A, perpendicularis ducatur G H, vſque ad circumferentiam circuli F H, proxime deſcripti. Ducta autem recta H E, fiat angulo H E A, angulus F E I, æqualis; atque per F, aga-



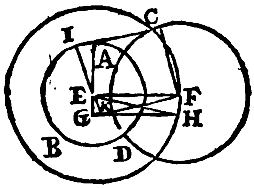
tur ipſi E I, parallela recta F C. Dico rectam per puncta I, & C, ductam vtrumque circulum A B, C D, contingere. Abſcindatur enim ex I E, recta I K, ipſi A G, vel ſemidiametro F C, minoris circuli, æqualis, vt ſint reliquæ E G, E K, æquales quoque, ducaturque recta K F. Quoniam igitur latera H E, E G, trianguli H E G, æqualia ſunt lateribus F E, E K, trianguli F E K, & anguli ipſis contenti æquales,
d 4. pri. ex conſtructione: d Erunt anguli H G E, F K E, æquales: Ac proinde,
e 33. pri. cum H G E, rectus ſit, ex conſtructione, erit & F K E, rectus. Rurſus
f 29. pri mi. quia C F, I K, æquales ſunt, & parallelæ, ex conſtructione, e erunt quoque I C, K F, æquales & parallelæ; Atq; propterea angulus E I C,
g 29. pri mi. f cum æqualis ſit externo F K E, rectus erit; g Ideoque & I C F, rectus exiſtet. Quocirca, per coroll. propoſ. 16. huius lib. recta I C, vtrumque circulum

Digitized by Google

circulum continget, cum rectos angulos efficiat in extremitatibus ſemidiametrorum. Quod erat propoſitum.

SATIS autem conſtat, ſi circuli propoſiti æquales fuerint, id quinque modis poſſe fieri. Aut enim alius extra alium cadit, aut ſe mutuo contingunt, aut ſe inuicem per centra ſecant, aut non, ita tamen, vt vel centra conſiſtant in communi eorum ſegmento, vel certe extra illud.

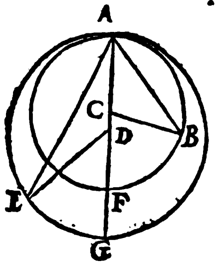
ITEM ſi circuli propoſiti fuerint inæquales, id contingere poſſe ſeptem modis. Aut enim minor totus extra maiorem cadit, aut ipſum tangit, aut ipſum ſecat, ita vt vel centrum eius ſit in circumferentia maioris, vel intra ipſum circulum, hac tamen lege, vt circumferentia minoris citra centrum maioris tranſeat, vel centrum minoris ſit extra circulum maiorem, vel iterum ita intra, vt circumferentia minoris per maioris centrum incedat, vel denique ita intra, vt circumferentia minoris includat centrum maioris.



QVONIAM verò circulis inæqualibus exiſtentibus, initium conſtructionis ſumpſimus ſemper à maiori, ſi quis maluerit à minori incipere, id efficiet eadem conſtructione, demonſtrationeq́ue, niſi quod rectæ A E, I E, protrahendæ ſunt ad G, & K, vt A G, I K, æquales ſint ſemidiametro F C, maioris circuli; Addito inſuper, angulos H E G, F E K, contentos lateribus H E, E G; F E, E K, idcirco æquales eſſe, quod H E A, F E I, reliqui duorum rectorum, æquales ſint ex conſtructione. Denique angulum E I C, eſſe rectum, ex 29. propoſ. lib. 1. quod & E K F, inter parallelas I C, K F, rectus ſit oſtenſus.

QVIA verò & per punctum in circumferentia circuli datum, & per punctum extra circulum exiſtens lineam rectam, quæ circulum tangat, ex iis, quæ demonſtrata ſunt, ducere poſſumus; per punctum quidem in circuli circumferentia poſitum, ex coroll. propoſ. 16. per punctum verò extra circulum ex hac propoſ. 17. Item oſtenſum eſt hoc ſcholio, rectam duci poſſe, quæ duos circulos tangat, dummodo alter eorum in altero non totus includatur; non alienum erit hoc loco demonſtrare, quo pacto per datum punctum circulus alium datum circulum tangens, ſiue interius, ſiue exterius, deſcribendus ſit: Item qua ratione deſcribendus ſit circulus tangens duos alios circulos, quorum vnus non ſit totus intra alium.

SIT ergo primum in circulo A B, cuius centrum C, datum punctum A, in circumferentia, per quod deſcribendus ſit circulus, circulum A B, tangens in A. Ducta ex A, per centrum C, recta A C, ſumatur in ea quoduis punctum D, ex quo ad interuallum D A, circulus deſcribatur A E, qui circulum A B, in A, tanget; Et ſi quidem punctum D,



ctum D, fuerit vltra centrum C, cadet circulus A E, totus extra circulum A B; intra verò, ſi punctum D, in ſemidiametro A C, extiterit, vt ſcholio propoſ. 13. huius lib. demonſtrauimus.

DEINDE extra eundem circulum A B, datum ſit punctum G, per quod deſcribendus ſit circulus circulum A B, tangens. Ducta ex G, per centrum C, recta G C A, eaque ſecta bifariam in D, deſcribatur ex D, per A, circulus A E, qui per datum punctum G, tranſibit, tangetque circulum A B, in A, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 13. huius lib. demonſtrauimus.

ALITER. Sit datum rurſus punctum E, extra circulum A B. Ducta recta E A, vtcunque ex puncto dato E, quæ circulum ſecet, & non per centrum tranſeat, ducatur ex A, per centrum C, recta A C; eritque angulus E A C, acutus, cum pars ſit anguli ſemicirculi, qui recto minor eſt. Angulo ergo E A C, in E, æqualis conſtituatur A E D: coibitque recta E D, cum A C, in D, ob duos angulos D A E, D E A, duobus rectis minores. Quoniam igitur anguli D A E, D E A, æquales ſunt, a erunt & latera D A, D E, æqualia. Circulus ergo ex D, per A, deſcriptus per datum punctum E, tranſibit, tangetque circulum A B, in A, ex iis, quæ in ſupradicto ſcholio propoſ. 13. huius lib. demonſtrauimus.

a 6. pri.

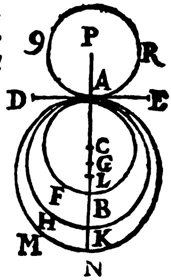
TERTIO datum ſit punctum F, intra circulum A E. Ducta ex F, per centrum D, recta F A; eaque ſecta bifariam in C, deſcribatur ex C, per A, circulus A B, qui per datum punctum F, tranſibit, tangetque ex dicto ſcholio circulum A E, in A.

ALITER. Sit datum rurſus punctum B, intra circulum A E, cuius centrum D. Ducta recta quæcunque A D, per centrum D, & non per datum punctum B, tranſeunte, quæ cum recta coniuncta A B, faciet angulum acutum B A D, vtpote minorem angulo ſemicirculi, qui recto minor eſt. Angulo ergo B A D, in B, æqualis fiat A B C: coibitque recta B C, cum A D, in C, ob duos angulos B A C, A B C, duobus rectis minores. Quoniam igitur anguli B A C, A B C, æquales ſunt, b erunt & latera C A, C B, æqualia. Circulus ergo ex C, per A, deſcriptus per datum punctum B, tranſibit, tangetque circulum A E, in A, per ea, quæ à nobis ſcholio propoſ. 13. huius lib. demonſtrata ſunt.

b 6. pri.

QVOD ſi per punctum N, extra circulum Q A R, datum deſcribendus ſit circulus tangens circulum Q A R, exterius, ita vt neuter intra alium cadat, ducatur ex N, puncto dato ad centrum P, circuli Q A R, recta N P, ſecans circumferentiam circuli in A. Diuiſa deinde recta N A, bifariam in L, deſcribatur ex L, per A, circulus, qui per

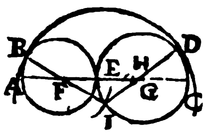
datum

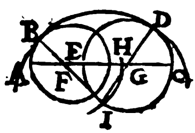


datum punctum N, tranſibit, tangetque circulum Q A R, in A, propterea quod vterque circulus rectam D E, quæ per A, ducitur ad N P, perpendicularis, tangit in A, ex coroll. propoſ. 16 huius lib.

EODEM modo, ſi in circumferentia circuli Q A R, datum ſit punctum A, deſcribemus circulum, qui circulum Q A R, exterius tangat in A. Ducta enim ex centro P, recta P A C, per datum punctum A, ſi ex quolibet puncto huius rectæ, per A, circulus deſcribatur, nimirum A M N, ex centro L, tanget hic circulum Q A R, vt dictum eſt, in A.

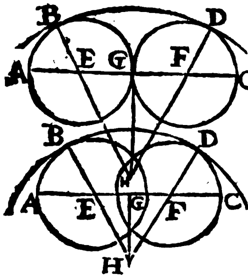
EX his liquet, per idem punctum datum plures poſſe circulos deſcribi alium datum circulum tangentes, (ſi nimirum ex datis punctis E, B, in priori figura ducantur aliæ rectæ, quæ à rectis E A, B A, differant; Item ex punctis datis F, G, emittantur aliæ lineæ non per centra C, D, tranſeuntes, ſed circulos ſecantes; ac tandem in recta A G, eiuſdem figuræ, vel in P A C, poſterioris figuræ, quando punctum A, in circumferentia datur, alia centra à centris C, D, L, diuerſa aſſumantur) cum tamen per punctum datum extra circulum vna ſola linea ad eaſdem partes duci poſſit circulum tangens. Quo pacto autem circulus duos circulos tangens, quorum vnus non ſit totus intra alium, deſcribendus ſit, hac ratione cum Ioan. Bapt. Benedicto demonſtrabimus.





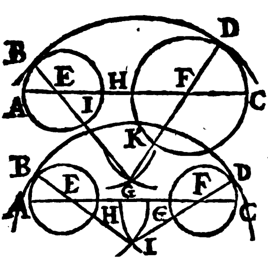
SINT primum duo circuli ſe mutuo tangentes, aut ſecantes inæquales, A B, minor, & C D E, maior, quorum centra F, G, per quæ recta ducatur F G, occurrens circumferentiis in A, C, quæ, ſi circuli ſe tangant in E, per contactum E, tranſibit. Abſciſſa recta E H, ex ſemidiametro maioris circuli, quæ ſemidiametro minoris ſit æqualis, deſcribatur ex F, centro minoris ad interuallum rectæ H C, quæ maior eſt, quam ſemidiameter minoris, arcus ſecans circumferentiam maioris in I; & ex I, per centra F, G, rectæ ducantur I F, I G, occurrentes circumferentiis in B, D. Et quia C H, ipſi I F, & H E, ipſi F B, æqualis eſt, per conſtructionem; erunt tota C E, I B, æquales. Cum ergo & diameter I D, diametro C E, æqualis ſit, erit quoque I B, ipſi I D, æqualis. Circulus ergo ex I, per B, deſcriptus tranſibit per D. Cum ergo idem, ex ſcholio propoſ. 13. huius lib. extra vtrumque circulum cadat totus, tanget vtrumque circulum in B, D. Quod eſt propoſitum. 212.

SINT



SINT deinde duo circuli ſe mutuo tangentes, vel ſecantes æquales, A B, C D, per quorum centra E, F, recta educatur A C. Diuiſa deinde recta E F, inter duo centra bifariam in G, (Quando circuli ſe mutuo tangunt, diuiditur recta E F, bifariam in puncto contactus, propter ſemidiametros æquales æqualium circulorum) excitetur in G, ad E F, perpendicularis G H: in qua ſumpto puncto H, vtcunque, ducantur ex eo per centra E, F, rectæ occurrentes circumferentiis in B, D. Quoniam igitur duo latera G E, G H, duobus lateribus G F, G H, æqualia ſunt, anguloſque a 4. pri. *comprehendunt æquales, nimirum rectos; a erunt & baſes H E, H F, æquales: Et additis ſemidiametris æqualibus E B, F D, totæ lineæ H B, H D, æquales erunt. Circulus igitur ex H, per B, deſcriptus tranſibit per D, cadetq́; extra vtrumque circulum, ex ſcholio propoſ. 13. huius lib. Quare vtrumque tanget in B, D. Quod eſt propoſitum.*

TERTIO ſint duo circuli ſiue æquales, ſiue inæquales, A B, C D, quorum alter extra alterum ſit totus. Per eorum centra E, F, ducatur recta A C. Et ſi circuli ſunt inæquales, deſcribatur ex E, centro minoris ad interuallum diametri maioris C H, arcus, quem in G, ſecet alter arcus ex F, centro maioris deſcriptus ad interuallum recta F I, compoſita ex ſemidiametro maioris F H, & H I, ſemidiametro minoris æquali. Ponamus enim nunc hos arcus ſe interſecare; quando autem ſe non ſecant, dicemus mox, quid agendum ſit. Ex G, autem per centra E, F, rectæ ducantur ſecantes circumferentias in B, D. Et quia F G, ipſi F I, æqualis eſt:



ablatis æqualibus F K, F H; reliquæ æquales erunt K G, H I. Eſt autem H I, ſumpta æqualis ſemidiametro minoris E B. Igitur & K G, ipſi E B, æqualis erit. Cum ergo & E G, diametro maioris K D, ſit æqualis; erunt totæ rectæ G B, G D, æquales. Quare circulus ex G, per B, deſcriptus tranſibit per D, cadetque extra vtrumque circulum ex ſcholio propoſ. 13. huius lib. ac proinde vtrumque tanget in B, D. Quod eſt propoſitum.

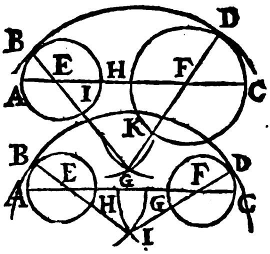
VERVM quia non ſemper duo illi arcus ex E, & F, deſcripti ſe interſecant, quod accidit propter nimiam circulorum diſtantiam vnius ab altero, abſoluemus problema hoc alio modo, qui generalis eſt, ſiue circuli ſe tangant, ſiue non, etiamſi non ſe ſecent, & ſiue æquales ſint, ſiue inæquales. Ducta recta A C, per circulorum centra,

ſumantur

Digitized by Google

ſumantur rectæ æquales *A G, C H*, ita vt quælibet ſemiſſem ipſius *A C*, ſuperet: & ex centro *E*, per *G*, arcus *G I*, deſcribatur, quem ſecet in *I*, alius arcus *H I*, ex centro *F*, per *H*, deſcriptus: ac denique ex *I*, per centra *E, F*, rectæ emittantur circumferentiis occurrentes in *B, D*. Et quoniam *E G, E I*, æquales ſunt; ſi addantur æquales *A E, B E*, fient tota *A G, B I*, æquales. Eadem ratione erunt *C H, D I*, æquales. Cùm ergo *A G, C H*, poſita ſint æquales, erunt quoq; *B I, D I*, æquales. Circulus igitur ex *I*, per *B*, deſcriptus tranſibit per *D*, totusq; extra vtrumque circulum cadet, ex ſcholio propoſ. 13. huius lib. ac propterea vtrumque tanget in *B, D*. Quod eſt propoſitum.

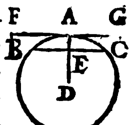
IAM verò eadem arte deſcribemus circulum datæ magnitudinis, qui duos circulos propoſitos tangat, dummodò ſemidiameter circuli deſcribendi maior ſit ſemiſſe rectæ *A C*, per centra circulorum vſque ad circumferentias ductæ. Nam ſi ſemidiametro dati circuli rectas æquales abſcindamus *A G, C H*, reliqua perficiemus, vt proximè dictum eſt.



PORRO manifeſtum etiam eſt, ſi ex puncto medio rectæ *A C*, per centra circulorum vſque ad circumferentias ductæ, deſcribatur circulus per *A*, & *C*, eum circulum tangere vtrumque circulum *A B*, & *C D*, in *A*, & *C*, ex ſcholio propoſ. 13. huius lib.

EX PELETARIO.

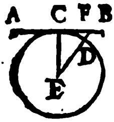
LINEÆ rectæ, quæ circulum ſecet, lineam parallelam ducere, quæ eundem circulum tangat.



CIRCVLVM enim *A B C*, cuius centrum *D*, ſecet recta *B C*, cui ducenda eſt parallela tangens circulum *A B C*. Ducatur ex centro *D*, recta *D E*, perpendicularis ad *B C*, extendaturq; ad punctum *A*, in circumferentiam; & ex *A*, ducatur *F G*, perpendicularis ad *A D*. a Erit igitur *F G*, parallela ipſi *B C*, tangetq; circulum in *A*, per corollarium propoſ. 16. huius lib. quod erat faciendum. a 28. primi.

THEOR. 16. PROPOS. 18. xvij.

SI circulum tangat recta quæpiam linea, à centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiuncta fuerit, ad ipſam contingentem perpendicularis erit.



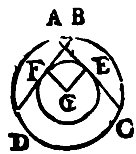
RECTA linea AB, tangat in C, circulum C D, cuius centrum E, & ex E, ad C, recta ducatur E C. Dico E C, perpendicularem eſſe ad A B. Si enim non eſt, ducatur E F, perpendicularis ad A B, ſecans circumferentiam in D. Quoniam igitur in triangulo C E F. a duo anguli E C F, E F C, minores ſunt duobus rectis; Et eſt
a17.primi. E F C, rectus, ex conſtructione erit E C F, minor. Quare b maior erit recta E C, hoc eſt, E D, quàm E F, pars quàm totum. quod eſt
b19.primi. abſurdum. Eſt igitur E C, perpendicularis ad A B. Quare ſi circulum tangat recta quæpiam linea, &c. Quod demonſtrandum erat.

ALITER. Si E C, non eſt perpendicularis ad A B, erit alter angulorum ad C, obtuſus, & alter acutus. Sit ergo B C B, acutus, qui cùm maior ſit angulo ſemicirculi E C D, erit angulus ſemicirculi minor angulo aliquo acuto: quod eſt abſurdum. Omnis
c16.tertij. ſiquidem angulus ſemicirculi c maior eſt omni acuto.

SCHOLIVM.

HINC licebit demonſtrare ſequens theorema ad ea, quæ ſequuntur, non inutile: Videlicet.

DVOBVS circulis ex eodem centro deſcriptis; erunt omnes rectæ lineæ interiorem circulum tangentes, & vſque ad circumferentiam exterioris circuli extenſæ, inter ſe æquales, bifariamque in punctis contactuum ſecabuntur.



SINT duo circuli A B C D, E F, ex eodem centro G, deſcripti, quos tangant rectæ A C, B D, in punctis E, F. Dico rectas A C, B D, eſſe æquales, bifariamq; ſecari in E, F. Ducantur enim ex centro G, ad puncta contactuum E, F, rectæ G E, G F, d *quæ*
d18.tertij. *ad A C, B D, perpendiculares erunt; ac proinde, per defin. 4. huius lib. rectæ A C, B D, æqualiter à centro G, in circulo*
e14.tertij. *A B C D, diſtabunt, cùm perpendiculares G E, G F, æquales ſint. Igitur* e *rectæ A C, B D, æquales ſunt. Diuiduntur autem* f *& bifariam*
f3.tertij. *in E, F, à perpendicularibus G E, G F. Conſtat ergo id, quod propoſitum eſt.*

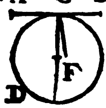
xviij. THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI circulum tetigerit recta quæpiam linea, à contactu autem recta linea ad angulos rectos ipſi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

TANGAT recta A B. circulum C D E, in C; & ex C, ducatur C E, perpendicularis ad A B. Dico in C E, eſſe centrum circuli Si enim eſt extra C E, ſit F, centrum, à quo ad C, ducatur recta F C. quæ

Digitized by Google

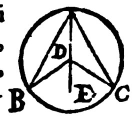
quæ *a* perpendicularis erit ad A B. Quare rectus angulus F C B, recto angulo E C B, æqualis erit, pars toti: quod eſt abſurdum. Non igitur extra C E, centrum circuli exiſtet. Itaq; ſi circulum tetigerit recta quæpiã linea, &c. Quod erat demonſtrandum. a 18. tertij.



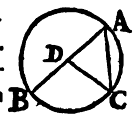
THEOR. 18. PROPOS. 20. xxi.

IN circulo, angulus ad centrum duplex eſt anguli ad peripheriam, cùm fuerit eadem peripheria baſis angulorum.

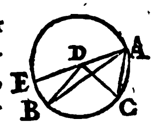
IN circulo A B C, cuius centrum D, ſuper baſin B C, conſtituatur angulus B D C, ad centrum; & ſuper eandem baſin angulus B A C, ad peripheriam. Dico angulum B D C, duplum eſſe anguli B A C. Includant enim primũ duæ A B, A C, duas D B, D C; & per centrum D, recta extendatur A E. Quoniam igitur rectæ D A, D B, æquales ſunt, *b* erunt anguli D A B, D B A, æquales: Eſt autem externus angulus B D E, *c* æqualis duobus angulis internis D A B, D B A. Quare B D E, duplus erit alterius eorum, vt anguli D A B. Eodem modo duplus oſtendetur angulus C D E, anguli D A C. Quapropter totus B D C, duplus erit totius B A C. Quando enim duæ magnitudines duarum ſunt duplæ, ſingulæ ſingularum, eſt quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum. Conſtat ergo propoſitum. b 5. primi. c 32. primi.



DEINDE non includant rectæ A B, A C, rectas D B, D C, ſed A B, per centrum extendatur. Quoniam igitur externus angulus B D C, *d* æqualis eſt duobus internis D A C, D C A: Hi autem duo *e* inter ſe ſunt æquales, quòd latera D A, D C, ſint æqualia; erit angulus B D C, duplus alterius eorum, nempe anguli B A C. Quod eſt propoſitum. d 32. primi. e 5. primi.



TERTIO recta A B, ſecet rectam D C, & per centrum D, extendatur recta A E. Quoniam igitur angulus E D C, ad centrum, & angulus E A C, ad peripheriam, habent eandem baſin E C, & recta A E, extenditur per centrum; erit angulus E D C, duplus anguli E A C, vt oſtenſum eſt in ſecunda parte. Simili modo erit angulus E D B, duplus anguli E A B; habent enim hi anguli eandem baſin E B. Reliquus igitur angulus B D C, duplus erit reliqui anguli B A C. *f* Quando enim totum totius eſt duplum, & ablatum ablati; eſt & reliquum reliqui duplum. In circulo igitur angulus ad centrum duplex eſt, &c. Quod erat demonſtrandum. f 20. pre num.



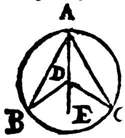
Digitized by Google

SCHOLIVM.

AD primam partem huius propoſ. demonſtrandam aſſumptum eſt hoc principium. (Si duæ magnitudines duarum magnitudinum ſint duplæ, ſingulæ ſingularum; erit quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum) *In tertia verò partis demonſtratione hoc aliud principium adhibitum eſt.* (Si totum totius eſt duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum) *Quorum vtrumq; ab Euclide vniuerſaliter demonſtratur in omni genere multiplicium, & de quotcunque magnitudinibus, libro 5. propoſ. 1. & 5. Non tamen propterea demonſtratio huius propoſ. cenſenda eſt vitioſa, quaſi aſſumat ea, quæ nondum ſunt demonſtrata: quia & duo illa principia lumine naturali ita cognita ſunt in duplis magnitudinibus, vt facilè à quouis ſine vlla demonſtratione concedantur, & vtraque illa propoſitio lib. 5. demonſtrari poteſt ante tertium hunc librum, cùm ex eo non pendeant: adeò vt duo illa principia iure optimo adhiberi poſſint hoc loco, tanquam demonſtrata. Neque verò hac in re circulus ab Euclide committitur, cùm duo illa principia, per quæ propoſ. 20. huius lib. demonſtratur, hac eadem propoſitione non nitantur, aut alijs propoſitionibus, quæ ex hac 20. pendent.*

VERVM, ſi placet, demonſtrabimus primam partem huius propoſ. ſine priore illo principio, & tertiam ſine poſteriore, (ſecunda enim pars neutro eorum indiget) hac ratione. Repetatur prima figura. Et quoniam a *tam anguli D A B, D B A, inter ſe æquales ſunt, quàm anguli D A C, D C A; erit totus angulus B A C, duobus angulis B C, ſimul ſumptis æqualis, ac proinde tres anguli B A C, B, & C, ſimul ſumptis dupli erunt anguli B A C. Quia verò angulus BDC, æqualis eſt ijſdem tribus angulis B A C, B, & C; (Nam* b *cùm B D E, duobus internis, B, & D A B, & C D E, duobus internis C, & D A C, æqualis ſit, erit totus B D C, omnibus quatuor, hoc eſt, tribus B A C, B, & C, æqualis.) erit angulus quoque B D C, duplus anguli B A C. quod eſt propoſitum.*

a 5. primi.



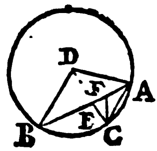
b 32. primi.

ALITER. Quoniam c *ſex anguli triangulorum A B D, A C D, ſunt æquales quatuor rectis, ſunt autem & tres anguli B D C, C D A, A D B, quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propoſ 15 lib. 1. erunt hi tres illis ſex æquales: ablatisq; communibus A D B, A D C,* d *reliquus B D C, reliquis B A C, B, & C, æqualis erit. Quare vt prius, erit B D C, ipſius B A C, duplus.*

c 32. primi.

d 3. pronun.

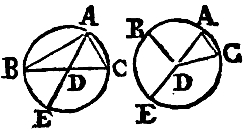
REPETATVR quoque tertia figura, vbi recta DC, rectam A B, ſecat, vt in E. Quoniam ergo, ducta recta A D, e *duo anguli D A C, D C A, æquales ſunt, eſtq; angulus D A C, angulo E A C, maior, erit quoq; angulus D C A, eodem angulo E A C, maior. Si igitur fiat angulus A C F, angulo*



e 5. pronun.

gulo E A C, æqualis, ſecabit C F, rectam A E, ut in puncto F, a angulusq; E F C, æqualis erit internis angulis F A C, F C A, ac proinde anguli B A C, duplus. Quia verò b anguli D A C, D C A, æquales ſunt, & ablati quoque F A C, F C A; erunt & reliqui D A B, E C F, æquales. Cùm c ergo D A B, ipſi D B A, æqualis ſit; erit quoq; E C F, eidem D B E æqualis: Sunt autem, d & anguli D E B, F E C, ad verticem E, æquales. Igitur & reliqui anguli B D E, E F C, æquales erunt, ex coroll. 1. propoſ. 32. lib. 1. Cùm ergo angulus E F C, oſtenſus ſit anguli B A C, duplus; erit quoque angulus B D C, anguli B A C, duplus. quod eſt propoſitum.

a 32. primi.
b 5. primi.
c 5. primi.
d 15. primi.



QVOD ſi rectæ B D, C D, in centro angulum non conſtituant ad partes baſis B C; quod tum demum ſit, quando ſegmentum B A C, eſt vel ſemicirculus, vel ſegmentum minus; nihilominus ſpatium illud ad centrum duplum erit anguli ad circumferentiam, qui eandem habeat baſin, quam ſpatium illud. Ducta enim recta A E, per centrum, erit tam angulus B D E, ad centrum duplus anguli B A E, ad circumferentiam, quam angulus C D E, ad centrum, anguli C A E, ad circumferentiam, vt oſtenſum eſt. Spatium igitur ad centrum D, baſin habens B E C, conſtansq; ex duobus angulis B D E, C D E, duplum eſt totius anguli B A C. Quod eſt propoſitum.

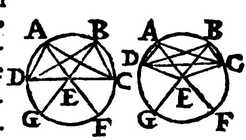
THEOR. 19. PROPOS. 21. XXI.

IN circulo, qui in eodem ſegmento ſunt, anguli, ſunt inter ſe æquales.

IN circulo A B C D, cuius centrum E, exiſtant anguli A, & B, in ſegmento D A B C. Dico eos eſſe æquales. Sit enim ſegmentum D A B C, primum ſemicirculo maius; & ducantur rectæ D E, C E, ad centrum E. Quoniam igitur angulus D E C, ad centrum *e* duplus eſt tam anguli D A C, quàm D B C, ad peripheriã, cùm omnes habeant eandem baſin D C; erunt anguli A, & B, dimidiatæ partes anguli E. *f* Quare inter ſe æquales erunt. Eademq; ratione omnes alij anguli exiſtentes in ſegmento D A B C, oſtendentur eſſe æquales.



e 20. tertij.
f 7. pronun.



SIT deinde ſegmentum D A B C, vel ſemicirculus, vel ſemicirculo minus. Ducantur per centrum E, rectæ A F, B G, & in ſegmento minori connectantur rectæ D E, C E. Quoniam igitur angulus D E F, ad centrum, *g* duplus eſt anguli D A F, ad peripheriam: Similiter angulus C E F, an-

g 20. tertij.

guli C A F; ac proinde duo anguli ſimul D E F, C E F, duorum angulorum ſimul D A F, C A F, dupli erunt, hoc eſt, totius anguli D A C: Sunt autem anguli D E G, G E F, æquales angulo D E F: erunt quoq; tres anguli D E G, G E F, F E C, ſimul dupli anguli D A C. Eadem ratione erunt iidem tres anguli dupli anguli D B C. a Quare æquales erunt anguli D A C, D B C.

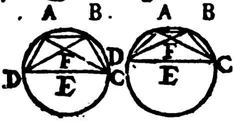
a 7. pronun.

ALITER. Quoniam, vt in ſcholio propoſ. præcedentis demonſtrauimus, ſpatium ad centrum E, cuius baſis D G F C, duplum eſt vtriuſque anguli D A C, D B C, ad circumferentiam: b Erunt ipſi anguli D A C, D B C, inter ſe æquales.

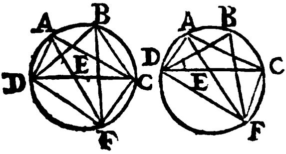
b 7. pronun.

ALITER. Secent ſeſe rectæ A C, B D, in F, & connectatur recta A B. Quoniam igitur tres anguli trianguli A F D, æquales ſunt tribus angulis trianguli B F C; quoniam tam illi, quàm hi c æquales ſunt duobus rectis: Si auferantur anguli A F D, B F C, d qui æquales ſunt; erunt reliqui A D F, D A F, reliquis B C F, C B F, æquales. Atqui & anguli A D F, B C F, æquales ſunt oſtenſi in ſegmento maiori A D C B. Ergo & anguli reliqui D A C, C B C, æquales ſunt.

c 32. primi.
d 15. primi.



ALITER. Ductis rectis D F, C F, ad punctum in circumferentia quoduis F, includentibus centrum E, ita vt tam D A B C F, quàm F D A B C, ſit ſegmentũ maius; iungantur quoq; rectæ A F, B F. Quia igitur anguli D A F, D B F, in eodem ſegmento maiori D A B C F, æquales ſunt; nec non & anguli F A C, F B C, in ſegmento etiam maiori F D A B C, exiſtentes: ſi hi illis addantur, fiet totus angulus D A C, toti angulo D B C, æqualis. Itaq; in circulo, qui in eodem ſegmento ſunt, &c. Quod erat oſtendendum.



SCHOLIVM.

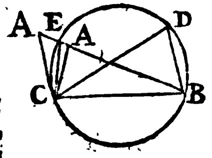
FACILE quoq; theorema iſtud conuertemus hoc modo.

SI à duobus punctis quatuor rectæ lineæ ducantur, ex ſingulis binæ, quæ ad eaſdem partes contineant angulos duos æquales: circulus per duo illa puncta, & alterutrum illorum angulorum deſcriptus, per alterum quoque angulum tranſibit.

EX duobus enim punctis B, C, educantur quatuor rectæ lineæ B A, C A, B D, C D, bina ex ſingulis, conſtituentes ad eaſdem partes duos æquales angulos A, D. Dico circulum per puncta B, C, & angulum D, deſcriptum, tranſire quoq; per angulum A. Si enim non tranſit, tranſibit

Digitized by Google

ibit vel ultra A, vel citra ſecans rectam AB, in E. Ducta ergo recta CE, a erunt anguli E, D, æquales. Cùm ergo & angulus A, angulo D ponatur æqualis; erunt anguli CAB, CEB, æquales, externus, & internus, quod eſt abſurdum. b *Externus enim interno maior eſt. Tranſit ergo circulus per A, quod eſt propoſitum.*



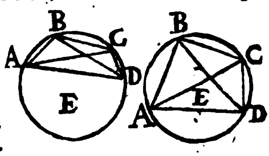
a 21. tertij.

b 16. primi.

THEOR. 20. PROPOS. 22. xxj.

QVADRILATERORVM in circulis deſcriptorum anguli, qui ex aduerſo, duobus rectis ſunt æquales.

IN circulo, cuius centrum E, inſcriptum ſit quadrilaterum ABCD. Dico duos angulos oppoſitos ABC, CDA: Item BCD, DAB, æquales eſſe duobus rectis. Ductis enim diametris duabus quadrilateri AC, BD, c erunt duo anguli ABD, ACD, in eodem ſegmento ABCD, æquales. Similiter erũt duo anguli CBD, CAD, in eodem ſegmento CBAD, æquales. Quare duo anguli ABD, CBD, hoc eſt, totus angulus ABC, æqualis eſt duobus angulis ACD, CAD. Addito igitur communi angulo CDA, erunt duo anguli ABC, CDA, æquales tribus angulis ACD, CAD, CDA. d Sed hi tres æquales ſunt duobus rectis. Igitur & duo ABC, CDA, duobus erunt rectis æquales. Eodem modo oſtendemus, angulos BCD, DAB, duobus eſſe rectis æquales. Nam rurſus duo anguli ABD, ACD, ſunt æquales: Item duo BCA, BDA; ac propterea totus angulus BCD, duobus angulis ABD, BDA, æqualis erit. Addito igitur communi angulo BAD; erunt duo anguli BCD, BAD, æquales tribus angulis ABD, BDA, DAB. e Sed hi tres ſunt æquales duobus rectis. Igitur & duo BCD, DAB, duobus rectis æquales erunt. Quadrilaterorum igitur in circulis deſcriptorum, &c. Quod demonſtrandum erat.



c 21. tertij.

d 32. primi.

e 32. primi.

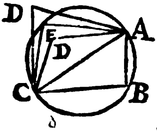
SCHOLIVM.

CONVERSVM quoque huius theorematis demonſtrari poteſt, hoc modo.

SI in quadrilatero anguli, qui ex aduerſo, duobus rectis ſint æquales; circulus, qui per tres quoſcunque eius angulos deſcribitur, tranſibit etiam per reliquum

quartum angulum; Atq; adeò circa ipſum quadrilaterum circulus deſcribi poteſt.

IN quadrilatero enim ABCD, ſint anguli oppoſiti B, & D, duob. rectis æquales, & per angulos A, B, C, circulus deſcribatur; (Quo modo autem hoc fieri poſſit, ad 25. propoſ. huius lib. & ad 5. quarti lib. oſtendetur.) quem dico tranſire etiam per D. Si enim non, tranſibit vel vltra D, vel citra. Ducantur ergo rectæ CE, AE, ad circumferentiam, ita vt non ſecent rectas CD, AD. Quo facto, a erunt anguli B, & E, æquales duobus rectis: Erant autem & anguli B, & D, duobus rectis æquales. Igitur duo anguli B, E, æquales ſunt duobus angulis B, D.



a 32. primi,

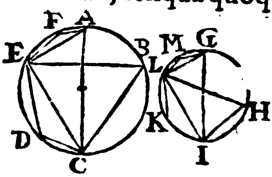
b 21. primi.

Quocirca ablato communi B, remanebunt anguli D, & E, æquales; quod eſt abſurdum. Ducta enim recta AC, b erit angulus D, maior angulo E, vel contrà, angulus E, maior angulo D. Tranſit igitur circulus per punctum D. Quod eſt propoſitum.

SATIS autem eſt, ſumere duos tantùm angulos oppoſitos æquales duobus rectis, vt theorema hoc verum ſit: quia ſi duo oppoſiti ſunt æquales duobus rectis, erunt neceſſariò & reliqui duo oppoſiti duobus rectis æquales; cùm omnes quatuor ſint quatuor rectis æquales, vt ad propoſ. 32. lib. 1. demonſtrauimus.

EX hac etiam propoſ. facilè demonſtrabimus theorema hoc inſequens, quod frequenter vſurpari ſolet, tanquam principium, à Mathematicis, ſcilicet.

SI ex ſemicirculis, aut circulis ſegmenta ſimilia detrahantur; reliqua quoque ſegmenta ſimilia erunt.



SINT primùm in circulis ABCDEF, GHIKLM, arcus ſimiles CDE, IKL. Dico & reliquos arcus EFABC, LMGHI, ſimiles eſſe. Sumptis enim in dictis arcubus, punctis vtcunq; D, B, K, H, iungantur rectæ DC, DE, BC, BE, KI, KL, HI, HL. Quia igitur arcus CDE, IKL, ſimiles ſunt, erunt, ex definitione ſegmentorum ſimilium, anguli CDE, IKL, æquales. Cùm ergo duo anguli CDE, CBE, duobus angulis IKL, IHL, ſint æquales; c quòd tam illi, quàm hi ſint æquales duobus rectis: d erunt & reliqui anguli CBE, IHL, æquales; ac propterea, ex defin. 10. huius lib. arcus EBC, LHI, ſimiles erunt.

c 22. tertij.

d 3. pronun.

DEINDE in ſemicirculis AEC, GLI, ſimiles ſint arcus EC, LI. Dico & reliquos arcus AE, GL, eſſe ſimiles. Sumptis enim punctis D, F, K, M, vtcunq; in ijs arcubus, iungantur rectæ CD, DE, CE, EF, FA, AE; IK, KL, IL, LM, MG, GL. Itaq; quia arcus EC, LI,

ſimiles

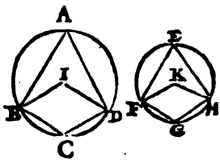
ſimiles ſunt, erunt ex defin. anguli C D E, I K L, æquales. Cum ergo & duo anguli C D E, E A C, duobus angulis I K L, L G I, æquales ſint; a quòd tam illi, quàm hi ſint duobus rectis æquales: erunt & reliqui anguli E A C, L G I, æquales. Sunt autem & anguli A E C, G L I, in ſemicirculis, hoc eſt, in ſegmentis ſimilibus A E C, G L I, æquales, ex definitione ſegmentorum ſimilium. Igitur in triangulis A E C, G L I, & reliqui anguli A C E, G I L, ex coroll. 1. propoſ. 32. lib. 1. æquales erunt. Cum ergo duo anguli A C E, E F A, duobus angulis G I L, L M G, æquales ſint; b quod tam illi, quàm hi duobus ſint rectis æquales; erunt quoque anguli reliqui E F A, L M G, æquales: ac proinde, ex defin. ſimilium ſegmentorum, arcus A E, G L, reliqui in ſemicirculis, ſimiles erunt. Quod erat oſtendendum.

a 22. tertij.
b 22. tertij.

QVANDO autem de ſegmentis ſimilibus ſermo hic incidit, non videntur omittenda hoc loco tria theoremata tum Geometricis rebus, tum præſertim Aſtronomicis pernecesſaria, quorum primum ſit hoc, quod nos ad defin. 10. huius lib. demonſtrandum recepimus: videlicet.

ANGVLI inſiſtentes arcubus circulorum ſimilibus ſiue ad centra, ſiue ad circumferentias, ſunt inter ſe æquales. Et contra, arcus, quibus anguli æquales ſiue ad centra, ſiue ad circumferentias inſiſtunt, ſimiles ſunt.

SINT in circulis A B C D, E F G H, quorum centra I, K, primum arcus ſimiles B C D, F G H, quibus ad centra inſiſtant anguli I, K, ad circumferentias verò anguli A, E. Dico tam illos, quàm hos inter ſe æquales eſſe. Conſtituantur enim in illis arcubus anguli C, G, qui ex defin. ſegmentorum ſimilium, æquales erunt. c Sunt autem tam duo anguli C, A, quàm duo G, E, duobus rectis æquales. Ablatis igitur æqualibus C, G, erunt quoque reliqui A E, æquales. Quorum d cum dupli ſint anguli I, K, e erunt hi quoque æquales. Quod eſt propoſitum.



c 22. tertij.
d 20. tertij.
e 6. pronun.

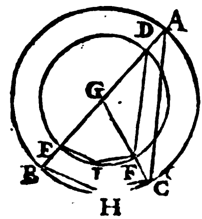
DEINDE ſint tam anguli I, K, quàm A, E, inſiſtentes arcubus B C D, F G H, inter ſe æquales. Dico arcus B C D, F G H, eſſe ſimiles. Nam ſi A, & E, ſint æquales: ſint f autem tam duo anguli A, C, quàm duo E, G, duobus rectis æquales; erunt & reliqui C, G, æquales; ac propterea, ex defin. ſimilium ſegmentorum, arcus B C D, F G H, quibus anguli æquales A, E, ad circumferentias inſiſtunt, ſimiles. Si verò anguli I, K, ad centra ſint æquales, g erunt quoque eorum dimidia æqualia, hoc eſt, anguli A, E. Quare vt prius, arcus B C D, F G H, ſimiles ſunt. Quod erat oſtendendum.

f 22. tertij.
g 7. pronun.

SECVNDVM autem, quod nos etiam in ſphæra ad finem primi cap. demonſtrauimus, huiuſmodi ſit.

SI duo aut plures circuli ex eodem centro deſcribantur, atque ex centro duæ, aut plures rectæ lineæ ducantur; erunt arcus inter quaſcunque duas lineas intercepti, ſimiles.

DVO circuli ABC, DEF, ex eodem centro G, deſcripti ſint, & ex centro G, duæ rectæ educantur GB, GC. Dico arcus EF, BC, eſſe ſimiles. Producta enim BG, ad A, iungantur rectæ AC, DF; item ſumptis punctis H, I, vtcunque ducantur rectæ BH, CH, EI, FI.



a 20. tertij. b 7. pronun. c 22. tertij. d 3. pronun.

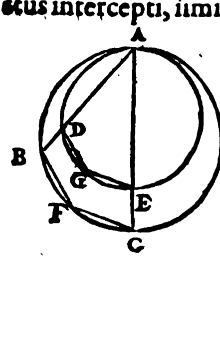
Quoniam igitur angulus G, ad centrum arcubus EF, BC, inſiſtens a duplus eſt tam anguli EDF, quam anguli BAC; b erunt anguli EDF, EIF, duobus angulis BAC, BHC, æquales; quod c tam illi, quam hi duobus rectis ſint æquales. Ablatis igitur æqualibus angulis EDF, BAC, d reliqui EIF, BHC, æquales erunt: ac proinde ſegmenta EF, BC, in quibus ſunt, ſimilia erunt, ex defin. ſimilium ſegmentorum. Quod erat oſtendendum.

e 7. pronun. f 20. tertij. *BREVIVS ſic. e Quoniam anguli A, D, æquales ſunt, quod vtriuſque f duplus ſit angulus G, ad centrum; erunt per antecedens theorema, arcus BC, EF, quibus ad circumferentias inſiſtunt, ſimiles. Quod eſt propoſitum.*

VEL adhuc breuius. Quoniam arcubus EF, BC, æquales anguli in centro inſiſtunt, imò vnus & idem angulus BGC; erunt per antecedens theorema arcus EF, BC, ſimiles. Atque in hac demonſtratione non eſt opus vlla conſtructione, vt manifeſtum eſt.

TERTIVM denique, quod aliter quoque in noſtro Aſtrolabio oſtendimus, hoc ſit.

SI duo, aut plures circuli ſe mutuo tangant interius in vno puncto, à quo duæ, aut plures rectæ educantur; erunt & arcus inter quaſcunque duas lineas intercepti, & arcus inter quamcunque lineam, & punctum contactus intercepti, ſimiles.



TANGANT ſe mutuo interius duo circuli ABC, ADE, in puncto A, à quo duæ rectæ educantur AB, AC. Dico tam arcus DE, BC, quam AD, AB, & AED, ACB, ſimiles eſſe. Sumptis enim duobus punctis vtcunque F, G, iungantur rectæ BF, CF, DG, EG. Quoniam igitur duo anguli DAE, DGE, duobus angulis BAC, BFC, æquales ſunt, quod g tam illi, quàm

g 22. tertij.

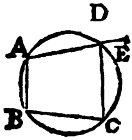
illi, quàm hi ſint duobus rectis æquales: ablato communi angulo B A C, a erunt reliqui anguli D G E, B F C, æquales; ac proinde arcus D E, B C, ſimiles erunt ex defin. ſegmentorum ſimilium. a 3. pronun.

BREVIVS ſic. Quoniam angulus A, communis vtrique arcui D E, B C, ad circumferentias inſiſtit, erunt, ex demonſtratis ante proximè antecedens theorema, arcus D B, B C, quibus inſiſtit, ſimiles. Quod eſt propoſitum.

QVIA verò, ſi per circulorum centra ducta cogitetur recta A C, b hæc in contactum A, cadit, ſuntque eodem pacto arcus D E, B C, ſimiles, fit, vt hiſce ſimilibus ablatis ex ſemicirculis ſimilibus, reliqui arcus A D, A B, ſimiles quoque ſint: atque his ablatis ex totis circumferentiis ſimilibus, ſimiles quoq; ſint reliqui arcus A E D, A C B, vt paulo ante demonſtrauimus. Quod eſt propoſitum. b 11. tertij.

HVC etiam referri poteſt hoc theorema.

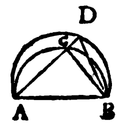
SI vnum latus quadrilateri in circulo deſcripti producatur, erit angulus externus angulo, qui angulo ei deinceps opponitur, æqualis.



IN circulo A B C D, deſcriptum ſit quadrilaterum quodcunque A B C D, cuius latus A D, producatur ad E. Dico angulum E D C, angulo B, æqualem eſſe. Cum enim c duo anguli ad D, æquales ſint duobus rectis: Item d duo B, & D, in quadrilatero; erunt duo illi his duobus æquales. Ablato ergo communi angulo A D C; reliquus E D C, externus reliquo B, æqualis erit. Quod eſt propoſitum. c 13. primi. d 22. tertij.

THEOR. 21. PROPOS. 23. xxiij.

SVPER eadem recta linea, duo ſegmenta circulorum ſimilia, & inæqualia, non conſtituentur ad eaſdem partes.

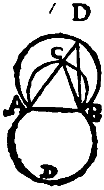


SI enim fieri poteſt, ſuper recta A B, conſtituantur ad eaſdem partes duo ſegmenta ſimilia, & inæqualia A C B, A D B. Perſpicuum eſt autem, quod ſe ſolum interſecent in punctis A, & B; e Circulus enim circulum non ſecat in pluribus punctis, quam duobus. Vnde peripheria vnius ſegmenti tota erit extra peripheriam alterius. Ducatur igitur recta A D, ſecans circumferentias in C, & D, & connectantur rectæ C B, D B. Quoniam igitur ſegmenta ponuntur ſimilia, erit per 10. defin. huius lib. angulus A C B, æqualis angulo A D B, externus interno: f quod eſt abſurdum. Non igitur ſegmenta ſunt ſimilia: Quare ſuper eadem recta linea, &c. Quod erat demonſtrandum. e 10. tertij. f 16. primi.

SCHO-

Digitized by Google

SCHOLIVM.

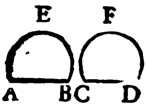


EADEM ratione, neque ad diuerſas partes ſuper eadem recta linea duo ſegmenta circulorum ſimilia, & inæqualia conſtituentur. Nam ſi alterum eorum intelligatur moueri circa lineam A B, vt iam ambo ſint ad eaſdem partes, in idem abſurdum incidemus, vt figura indicat, quoniam alterum alteri non congruet, propter inæqualitatem.

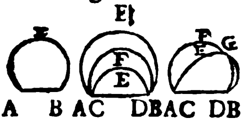
xxiiij.

THEOR. 22. PROPOS. 24.

SVPER æqualibus rectis lineis, ſimilia circulorum ſegmenta ſunt inter ſe æqualia.



SVPER rectis lineis æqualibus A B, C D, conſtituta ſint ſegmenta ſimilia A E B, C F D. Dico ea inter ſe eſſe æqualia. Lineæ enim A B, C D, cum ſint æquales, cōgruent inter ſe, ſi altera alteri ſuperponatur. Dico igitur & ſegmentū A E B, ſegmento C F D, congruere. Si enim non congruit, cadet



aut extra, aut intra, aut partim extra, partim intra. Quod ſi extra cadat, aut intra, cōſtituentur ſuper eadem recta CD, duo ſegmenta AE B, AFB, ſimilia, & inæqualia, quorum vnum totum extra aliud cadit, quod eſt abſurdum. *a* Demonſtratum enim eſt contrarium. Quod ſi partim extra cadat, partim intra, ſecabunt ſeſe in pluribus punctis, quam duobus, nimirum in A, B, G. Quod eſt abſurdum. *b* Circuli enim non ſe ſecant in pluribus punctis, quam duobus. Congruet igitur ſegmentum A E B, ſegmento C F D, atque adeo ipſa inter ſe æqualia erunt. Quocirca ſuper æqualibus rectis lineis, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 23. tertij.
b 10. tertij.

SCHOLIVM.

NON ſolum in hac propoſitione oſtenditur, ſegmenta ſimilia A E B, C F D, eſſe æqualia, ſuper æquales baſes A B, C D; verum etiam ipſas peripherias, eo quod, vt demonſtratum eſt, ſibi mutuo congruant.

CONVERSVM quoque huius propoſ. & præcedentis, facile demonſtrabitur. Nimirum, ſegmenta circulorum æqualia ſuper æquales lineas, vel ſuper eandem conſtituta, eſſe ſimilia. Nam propter æqualitatem, alterum alteri congruet; quare ſimilia erunt, cum hac ratione omnes anguli in ipſis conſtituti æquales ſint. Quod ſi quis dicat, non ſibi mutuo congruere ſegmenta, ſecabit neceſſario vna circumferentia alteram. Vna enim extra alteram non cadet. Inæqualia namque

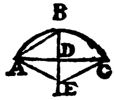
Digitized by Google

namque forent ſegmenta, quod eſt contra hypotheſin. Sint ergo ſegmenta A F B, A G B, æqualia ſuper eandem rectam A B, ſecentque ſe mutuo in G. Igitur circuli A F B, A G B, ſecant ſeſe in punctis A, G, B, pluribus quam duobus, quod eſt abſurdum. a Circuli enim non a 10. ter
ſe interſecant in pluribus punctis quam duobus. Eodem modo res de- tij.
monſtrabitur, ſi æqualia ſegmenta ſuper æquales rectas ſint conſtituta: ſi nimirum altera alteri ſuperponatur, &c.

PROBL. 3. PROPOS. 25. xxiv.

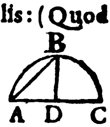
CIRCVLI ſegmento dato, deſcribere circulum, cuius eſt ſegmentum.

SIT ſegmentum circuli A B C, quod perficere oporteat. Subtendatur recta A C, quæ biſariam ſecetur in D, puncto, per quod perpendicularis ducatur D B, connectaturque A B. Angulus igitur D B A, vel maior eſt angulo D A B, vel æqualis, vel minor. Sit primum maior, (quod quidem continget, quando ſegmentum A B C, minus fuerit ſemicirculo: Tunc enim, quia B D, tranſit per centrum, ex corollario propoſ. 1. huius lib. quod eſt extra ſegmentum, cum



ponatur eſſe minus; erit D A, maior, quam D B, cum D B, perficiens diametrum *b* ſit omnium minima, quæ ex puncto D, in cir- b 7. ter.
cumferentiam cadunt. Quare angulus D B A, *c* maior erit angu- c 18. pri.
lo D A B.) fiatque angulus B A E, æqualis angulo D B A, & ſecet recta A E, rectam B D, productam in E. Dico E, eſſe centrum circuli, cuius ſegmentum A B C. Ducta enim recta E C, erunt latera A D, D E, trianguli A D E, æqualia lateribus C D, D E, trianguli C D E, & anguli contenti, recti. *d* Quare baſes E A, E C, d 4. pri.
æquales erunt; *e* Eſt autem & E A, æqualis ipſi E B, quod anguli e 6. pri.
E A B, E B A, æquales ſint. Igitur tres lineæ E A, E B, E C, æqua-
les erunt, *f* ac propterea E, centrum erit circuli A B C, quando- f 9. ter.
quidem ex E, plures quam duæ rectæ æquales cadunt in circumferentiam.

SIT deinde angulus D B A, angulo D A B, æqualis: (Quod demum continget, quando ſegmentum A B C, ſemicirculus fuerit. Tunc enim erit A C, diameter, & D, centrum, atque adeo rectæ D A, D B, æquales; quare

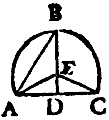


g & anguli D A B, D B A, æquales erunt.) *h* Erunt igi- g 5. pri.
tur rectæ D A, D B, æquales: Erat autem & D C, æqualis ipſi D A, h 6. pri.
quòd recta A C, ſecta ſit biſariam. Quapropter cum tres rectæ D A, D B, D C, cadant ex D, in circumferentiã, *i* erit D, centrum. i 9. tert.

SIT tertio angulus D B A, angulo D A B, minor, (quod quidem eueniet, ſi ſegmentum A B C, ſemicirculo maius extiterit. Tunc enim, quoniam B D, tranſit per centrum, ex corollario pro-

poſ. 1.

Digitized by Google



poſ. 1. huius lib. quod quidem intra ſegmentum, cum maius eſſe ponatur, exiſtit; *a* erit D B, omniũ, quæ ex D, in circumferentiam cadunt, maxima; maior igitur erit quam D A, *b* ideoq́; angulus DAB, maior angulo D B A.) fiatque angulus B A E, æqualis angulo D B A, & ſecet recta A E, rectam B D, in E, puncto, quod oſtendetur eſſe centrum eodem modo, quo id ipſum oſtendimus, quando angulus D B A, maior erat angulo D A B, vt conſtat, ſi recta ducatur E C. Circuli igitur ſegmento dato, deſcripſimus circulum, cuius eſt ſegmentum. Quod facere oportebat.

a 7. ter.
b 18. primi.

SCHOLIVM.

SED fortaſſis hæc demonſtratio Euclidis, quæ per omnia tria circuli ſegmenta progreditur, ita facilius inſtituetur. Diuiſa recta A C, bifariam in D, erectaque perpendiculari D B, & ducta A B; aut D B, minor eſt, quàm D A, aut æqualis, aut maior. Si minor, c erit angulus D B A, maior angulo B A D. Conſtituto igitur angulo B A E, æquali ipſi A B D; oſtendemus, vt prius, E, centrum eſſe. Atque hoc euenit, quando ſegmentum eſt ſemicirculo minus.

c 18. primi.

SI verò D B, æqualis eſt ipſi D A; erunt omnes tres D A, D B, D C, æquales; d ac proinde D, centrum. Quæ ratio locum habet in ſemicirculo.

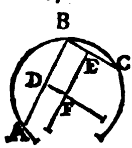
d 9. ter.

SI deniq; D B, maior eſt, quàm D A; e erit angulus D B A, minor angulo D A B. Conſtituto ergo angulo B A E, æquali ipſi A B E; oſtendetur E, eſſe centrum, vti prius. Hoc autem maiori ſegmento accidit.

e 18. pri.

ALITER idem problema hoc modo abſoluetur. Poſitis iiſdem, quæ prius, fiat angulo D B A, æqualis angulus E A B. Et ſi quidem recta A E, cadit infra A C, erit ſegmentum ſemicirculo minus, vt in prima figura. Si verò A E, cadit ſupra A C, erit ſegmentum ſemicirculo maius, vt in tertia figura: ſemper autem E, centrum erit, vt demonſtratum eſt. Si denique recta efficiens cum A B, in A, angulum æqualem angulo A B D, coincidit cum A C, erit ſegmentum ſemicirculus, punctumque D, centrum erit, vt in ſecunda figura.

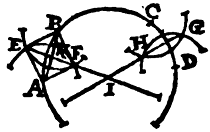
BREVIVS tamen inuenietur centrum ſegmenti propoſiti cuiuslibet, ſiue illud ſemicirculo minus ſit, ſiue æquale, ſiue maius, hac ratione.



Aſſumantur in peripheria ſegmenti tria puncta vtcunque A, B, & C, quæ duabus rectis coniungantur A B, B C, quæ bifariam ſecentur in D, & E. Deinde ex D, & E, educantur ad A B, B C, perpendiculares D F, E F. Quoniam igitur per corollarium propoſ. 1. huius lib. tam D F, quam E F, incedit per centrum circuli, cuius A B C, eſt ſegmentum, coibunt ambæ in centro, vt in F. Quare centrum eſt inuentum. Quod eſt propoſitum.

ALITER, vt Mechanici ſolent. Accipiantur in circumferentia duo

via duo puncta vtcunque A, & B, à quibus deſcribantur duo arcus ad idem interuallum quodcunque, qui ſe interſecent in E, & F. Poſtea ex alijs duobus punctis C, & D, alij duo arcus ſe ſecantes in G, & H, deſcribantur ad quoduis interuallum, ſiue idem quod prius, ſiue diuerſum. Si igitur agantur rectæ E F, G H, tranſibunt ambæ per centrum. Quare punctum I, in quo coeunt, erit centrum. Quod autem lineæ E F, G H, per centrum tranſeant, ita demonſtrabitur. Ducantur rectæ A E, A F,



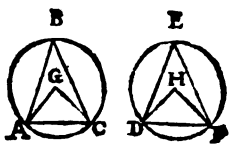
B E, B F, quæ inter ſe æquales erunt, ob æqualitatem circulorum. Quoniam igitur latera A E, E F, trianguli A E F, æqualia ſunt lateribus B E, E F, trianguli B E F; & baſes quoque A F, B F, æquales: a Erunt anguli A E F, B E F, æquales. Rurſus ducta recta A B, quæ ſecet E F, in K: quoniam latera A E, E K, trianguli A E K, æqualia ſunt lateribus B E, E K, trianguli B E K; & anguli A E K, B E K, oſtenſi quoque æquales; b erunt & baſes A K, B K, & anguli A K E, B K E, æquales, ideoque recti. Quare cum E F, diuidat rectam A B, in circulo bifariam, & ad angulos rectos, tranſibit per centrum, ex corollario propoſ. 1. huius lib. Eadem ratione oſtendetur G H, tranſire per centrum. Debent autem quatuor puncta A, B, C, D, in talis ſitu accipi, vt rectæ E F, G H, non in directum ſibi occurrant, ſed vt ſe mutuo ſecent. Quòd ſi quando contingat, rectas E F, G H, in directum eſſe conſtitutas, diuidenda erit recta intra circumferentiam comprehenſa, bifariam. Punctum enim diuiſionis erit centrum circuli: propterea quòd tunc recta illa eſt diameter circuli, quandoquidem per centrum tranſit, ex coroll. propoſ. 1. huius lib.

a 8. pri.
b 4. pri.

THEOR. 23. PROPOS. 26. XXV.

IN æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripheriis inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant.

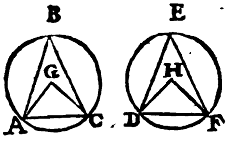
IN circulis æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, H, conſtituti ſint primũ ad centra anguli æquales A G C, D H F. Dico peripherias A C, D F, quibus inſiſtunt, ſiue ſuper quas aſcenderunt, eſſe æquales. Sumantur enim in



peripherijs A B C, D E F, duo puncta B, E, ad quæ rectæ ducantur A B, C B, D E, F E, connectanturque rectæ A C, D F. Quoniam igitur c anguli B, & E, dimidij ſunt æqualium angulorum G, & H; erunt & ipſi æquales inter ſe. Quare ex definitione ſegmenta A B C, D E F, ſimilia erunt. Et quia latera A G, G C, trianguli, A G C, æqua-

c 20 tertij.

Digitized by Google



æqualia ſunt lateribus D H, H F, trianguli D H F, propter circulorum æqualitatem; & anguli, quos continent, G, H, æquales, ex hypotheſi; *a* erunt baſes A C, D F, æquales. Cum igitur ſegmenta ſimilia A B C, D E F, ſint ſuper

a 4. *pri.*

b 24. *tertij.*

lineas æquales A C, D F, *b* erunt ipſa inter ſe æqualia. Quare ſi à circulis æqualibus demantur, remanebunt & ſegmenta A C, D F, inter ſe æqualia; atque adeo peripheriæ A C, D F. Quod eſt propoſitum.

SINT deinde ad peripherias conſtituti duo anguli æquales B, & E; Dico rurſus, peripherias A C, D F, ſuper quas aſcenderunt, eſſe æquales. Erunt enim, vt prius, ſegmenta A B C, D E F, ſimilia. Cum igitur ſint ſuper æquales lineas A C, D F: (cum enim anguli G, H, æquales ſint, *c* quod ſint dupli angulorum æqualium B, & E; erunt, vt prius, rectæ A C, D F, æquales) *d* erunt ipſa inter ſe æqualia. Si igitur à circulis æqualibus detrahantur, remanebunt & ſegmenta A C, D F, æqualia. In æqualibus itaque circulis, æquales anguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

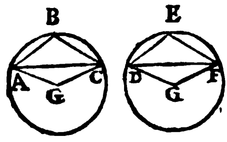
c 20. *tertij.*

d 24. *tertij.*

SCHOLIVM.

HÆC ſecunda pars breuius ita demonſtrabitur. Quoniam anguli G, H, dupli ſunt angulorum æqualium B, E, erunt ipſi inter ſe æquales. Quare, vt oſtenſum eſt prius, peripheriæ A C, D F, ſuper quas aſcenderunt, æquales erunt.

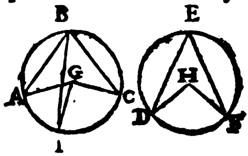
IAM verò ſi quando contingat, rectas A G, C G; D H, F H, non conſtituere angulos in centris ſupra baſes A C, D F, ſed ſupra baſes A B C, D E F, vt ſubiecta hæ figuræ monſtrant: ita ſecunda pars huius propoſ. demonſtranda eſt. Quoniam ſpatia ad centra G, H, inſiſtentia arcubus A C, D F, æqualia inter ſe ſunt, cum ex ſcholio propoſ. 20 huius lib. dupla ſint angulorum B, E, ad circumferentias; erunt etiam anguli A G C, D H F, reliqui quatuor rectorum, quibus tam ſpatium circa G, quam ſpatium circa H, æquale eſt, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. inter ſe æquales. Quare, vt prius, oſtendemus, baſes A C, D F, triangulorum A G C, D H F, æquales eſſe, ideoque ſegmenta ſimilia A B C, D E F, ob æqualitatem angulorum B, E, ſuper æquales baſes A C, D F, eſſe æqualia, &c.



HINC etiam fit, ſpatia æqualia in centris, inſiſtere arcubus æqualibus. Nam ſi ſpatia in centris G, H, inſiſtentia arcubus maioribus A C, D F, æqualia ſunt; erunt quoque, vt oſtendimus, anguli A G C, D H F, æquales. Igitur, vt in prima parte propoſitionis demonſtratum

ſtratum eſt, erunt & arcus A C, D F, maiores & minores A B C, D E F, inter ſe æquales.

QVOD ſi dicti anguli fuerint inæquales, maior inſiſtet maiori peripheria, quam minor. In circulis enim æqualibus A B C, D E F, ſit angulus A G C, ad centrum maior angulo D H F, ad centrum: Item angulus A B C, ad circumferentiam, maior angulo D E F, ad circumferentiam. Dico peripheriam A C, maiorem eſſe peripheria D F. Si enim fiat angulus C G I,



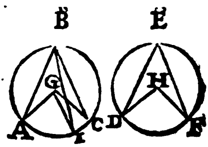
angulo D H F, & angulus C B I, angulo D E F, æqualis; erunt vt oſtenſum eſt, peripheria C I, D F, æquales. Ac propterea A C, maior, quam D F.

PORRO propoſitio hac, & tres proximè ſequentes intelligendæ etiam ſunt in eodem circulo. Hoc eſt. In eodem circulo æquales anguli æqualibus peripheriis inſiſtunt, &c. vt ex demonſtratione huius propoſ. & ſequentium trium liquido conſtat. Eadem enim ſemper demonſtratio, quæ duobus, pluribusve circulis accommodatur, locum habet in vno eodemque circulo.

THEOR. 24. PROPOS. 27. xxvj.

IN æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripheriis inſiſtunt, ſunt inter ſe æquales, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant.

IN circulis æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, H, inſiſtant primum anguli ad centra A G C, & D H F, æqualibus peripheriis A C, D F. Dico angulos A G C, & D H F, æquales eſſe. Si enim non ſunt æquales, ſit angulus G, maior,



fiatque angulus A G I, æqualis angulo D H F. *a* Erunt igitur peripheriæ A I, D F, æquales. Cum igitur peripheria A C, æqualis ponatur peripheriæ D F, erunt peripheriæ A I, A C, inter ſe æquales, pars, & totum; quod eſt abſurdum. Sunt ergo anguli A G C, D H F, æquales. *a 26. tertij.*

INSISTANT deinde eiſdem peripheriis æqualibus A C, D F, anguli B, & E, ad peripherias; quos rurſus dico æquales eſſe. Nam ſi alter, vt A B C, maior eſt; fiat angulo E, æqualis angulus A B I, *b* eruntque peripheriæ A I, D F, æquales. Quare, vt prius, erunt peripheriæ A I, A C, æquales, pars & totum; quod eſt abſurdum. Sunt ergo anguli A B C, D E F, æquales. In æqualibus igitur circulis, anguli, qui æqualibus peripheriis inſiſtunt, &c. Quod demonſtrandum erat. *b 26. tertij.*

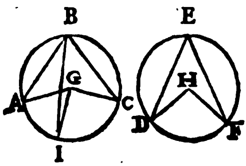
Digitized by Google

SCHOLIVM.

HÆC ſecunda pars ita quoque demonſtrabitur, quando rectæ A G, C G; D H, F H, in centris angulos conſtituunt ſupra baſes A C,
a 20. tertij. D F. Quoniam a anguli A B C, & E, dimidij ſunt angulorum A G C, & H, quos iam oſtendimus eſſe æquales; erunt & ipſi inter ſe æquales.

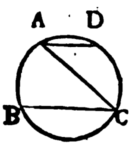
EODEM modo ſpatia in centris G, H, inſiſtentia arcubus A B C, D E F, æqualibus, æqualia erunt. Nam ablatis æqualibus A B C, D E F, ex circulis æqualibus, reliqui fient æquales arcus A I C, D F; ideoque vt oſtendimus, anguli A G C, D H F, æquales erunt: quibus ablatis ex ſpatiis circa centra G, H, quæ æqualia ſunt, cum quodlibet ſit quatuor rectis æquale, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. reliqua erunt & ſpatia in centris G, H, inſiſtentia arcubus A B C, D E F, æqualia.

SI verò peripheriæ fuerint inæquales, inſiſtet maiori maior angulus, ſiue ad centrum, ſiue ad circumferentiam, quam minori. In figura enim ſcholij præcedentis ſit peripheria A C, maior, quam peripheria D F. Dico angulum A G C, maiorem eſſe angulo D H F, & angulum A B C, maiorem angulo D E F. Si enim fiat peripheria C I, æqualis peripheriæ D F, ducanturque rectæ I G, I B, erunt, vt oſtenſum eſt, tum anguli ad centrum C G I, D H F, quam anguli ad circumferentiam C B I, D E F, æquales. Quare & angulus A G C, angulo D H F, & angulus A B C, angulo D E F, erit maior.



QVOD etiam de ſpatiis ad centra G, H, inſiſtentibus arcubus A B C, D E F, intelligendum eſt. Nam eodem modo demonſtrabimus ſpatium ad H, arcui D E F, inſiſtens maius eſſe ſpatio ad G, quod arcui A B C, inſiſtit, ſi arcus D E F, maior ponatur arcu A B C.

EX hac porro propoſitione colligemus, duas rectas lineas, quæ in eodem circulo æquales arcus intercipiunt, ſe mutuo non ſecantes, eſſe parallelas. Et ſi ſint parallelæ, ab ipſis arcus æquales intercipi. In circulo enim ABCD, rectæ A D, B C, intercipiant arcus æquales A B, D C. Dico A D, B C, eſſe parallelas. Ducta namque recta A C, cum arcus A B, D C, ponantur æquales,



b 27. tertij.
c 27. primi. b erunt anguli A C B, C A D, ipſis inſiſtentes, æquales; qui cum ſint alterni, c erunt A D, B C, parallelæ.

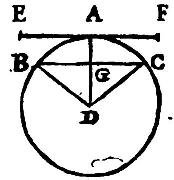
SINT iam A D, B C, parallelæ. Dico arcus interceptos A B, D C,
d 29. primi eſſe æquales. Cum enim ſint parallelæ A D, B C, d ducta recta A C; erunt anguli alterni A C B, C A D, æquales; d Ac proinde arcus A B,
e 26. tertij. D C, quibus inſiſtunt, æquales erunt.

VISVM eſt quoque hoc loco apponere ſequens theorema ad ea quæ ſequuntur, non inutile: videlicet.

LINEA

LINEA recta, quæ ex medio puncto peripheriæ alicuius ducitur tangens circulum, parallela eſt rectæ lineæ, quæ peripheriam illam ſubtendit.

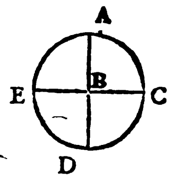
IN circulo A B C, cuius centrum D, ducantur ex A, puncto medio peripheriæ B A C, linea E F, tangens circulum. Dico E F, parallelam eſſe rectæ B C, arcum B A C, ſubtendenti. Ducta enim ex centro D, ad punctum contactus A, recta D A, ſecante rectam B C, in G, connexiſque rectis D B, D C, a erunt anguli A D B, a27.tertij.



A D C, circumferentiis æqualibus A B, A C, inſiſtentes, æquales: Sunt autem & latera B D, D G, trianguli B D G, lateribus C D, D G, trianguli C D G, æqualia, vtrumque vtrique. b Igitur & anguli ad G, æquales ſunt ſuper baſes G B, G C, ac propterea recti. Igitur & A G B, A G C, illis deinceps recti ſunt: Sunt autem & anguli G A E, G A F, recti, c quòd D A, perpendicularis ſit ad E F. d Ergo E F, B C, parallelæ ſunt. Quod eſt propoſitum. b4.pri. c18.primi. d28.primi.

EX demonſtratis in hac propoſ. & antecedente, colligitur etiam hoc theorema, quod ad initium quoque triangulorum rectilineorum demonſtrauimus.

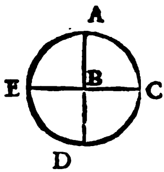
ANGVLVS rectus in centro inſiſtit quadranti; acutus verò arcui quadrante minori; & obtuſus arcui quadrante maiori. Et contra, angulus in centro quadranti inſiſtens, rectus eſt; inſiſtens verò arcui quadrante minori, acutus; & arcui quadrante maiori, obtuſus.



RECTVS angulus A B C, inſiſtat arcui A C, in centro B, circuli A C D E. Dico arcum A C, quadrantem eſſe, &c. Productis enim rectis A B, C B, ad D, E, erunt quoque anguli A B E, C B D, recto A B C, deinceps, recti, ex defin. 10. lib. 1. nec non & angulus D B E, rectus, e cum æqualis ſit recto angulo A B C, ad verticem. e15.pri.
Omnes ergo quatuor anguli ad centrum B, æquales ſunt, vtpote recti: ac propterea f arcus A C, C D, D E, E A, quibus inſiſtunt, æquales erunt. Quilibet igitur eorum quadrans eſt. Et quoniam recta cum A B, in B, conſtituens angulum acutum, cadit in arcum A C: recta verò cum eadem A B, in B, continens angulum obtuſum, cadit in arcum C D; liquido conſtat, angulum acutum inſiſtere arcui quadrante minori, obtuſum verò maiori. f26 tertij.

SED inſiſtat iam quadranti A C, angulus A B C, in centro B. Dico angulum A B C, eſſe rectum, &c. Productis enim rurſum rectis A B,

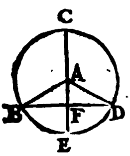
Digitized by Google



C B, ad D, E; quoniam tam C A E, quam A C D, & A E D, ſemicirculus eſt, eſtq; A C, quadrans; erit tam A E, quàm C D, quadrans quoque, ac proinde & D E, in ſemicirculo A E D, quadrans erit: Sunt ergo quatuor arcus A C, C D, D E,
a 27. tertij. *E A, æquales, a ac proinde anguli ad centrum B, illis inſiſtentes, æquales erunt. Quare cum omnes quatuor ſint quatuor rectis æquales, erit eorum quilibet rectus. Et quia recta cum A B, auferens minorem arcum quadrante A C, facit in centro B, cum A B, minorem angulum recto angulo A B C; recta verò cum eadem A B, auferens maiorem arcum quadrante A C, conſtituit in centro B, angulum recto angulo A B C, maiorem; perſpicuum eſt, angulum minori arcui quadrante inſiſtentem, eſſe acutum; maiori verò, obtuſum. Quod eſt propoſitum.*

PARI ratione & hoc theorema ex demonſtratis elicitur, quod in ſinubus etiam demonſtrauimus.

RECTA linea è centro circuli ducta, ſecansque aliam rectam non per centrum ductam bifariam, ſecabit & arcum, cui hæc recta ſubtenditur, bifariam. Et contra, ſi ſecet arcum bifariam, ſecabit & rectam ei ſubtenſam bifariam.



EX centro A, circuli B C D E, recta egrediens A E, ſecet rectam B D, bifariam in F. Dico & arcum B E D, in E, ſectum eſſe bifariam, &c. Ductis enim rectis A B, A D; quoniam duo latera A B, A F, duobus lateribus A D, A F, æqualia ſunt, vtrumq; vtrique, baſisque B F, baſi D F, æqualis po-
b 8. pri. *nitur; b erit angulus B A F, angulo D A F, æqualis. Igitur c arcus*
c 26. tertij. *B E, arcui D E, æqualis erit. Sectus ergo eſt arcus B D, in E, bifariam.*

SECET iam recta A E, arcum B D, in E, bifariam. Dico rectam quoq; B D, in F, bifariam eſſe ſectam. Ductis enim rurſum rectis A B,
d 27. tertij. *A D: quoniam arcus B E, D E, ponuntur æquales; d erunt & anguli B A E, D A E, in centro æquales. Itaq; quia duo latera A B, A F, duobus lateribus A D, A F, æqualia ſunt, vtrumq; vtriq; angulosq; con-*
e 4. pri. *tinent æquales, vt oſtendimus; e erunt quoq; baſes B F, D F, æquales: ac proinde recta B D, in F, ſecta eſt bifariam. Quod erat oſtendendum.*

NEQVE verò omittenda hoc loco videtur eximia quædam proprietas circuli, quam Ioannes Baptiſta Benedictus ex Cardano lib. 16. cap. 1. de ſubtilitate deſumptam demonſtrat: Videlicet.

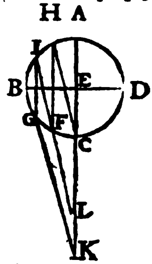
SI in circulo, ductis duabus diametris ſe ſe ad angulos rectos ſecantibus, altera earum producatur, eique ex

vna par-

Digitized by Google

vna parte quotquot parallelæ agãtur diuidentes vtrumque Quadrantem in partes æquales, ac denique ex puncto extremo alterius diametri per extremum punctum proximæ parallelæ recta ducatur conueniens cum diametro producta: Erit tota recta inter punctum concurſus, & concauam peripheriam circuli, omnibus parallelis vna cum diametro, quæ producta eſt, ſimul ſumptis, æqualis.

IN circulo A B C D, ſecent ſe ad rectos angulos diametri A C, B D, & A C, producatur verſus C, quantumlibet. Diuiſo autem Quadrante B C, in quotuis partes æquales C F, F G, G B, & Quadrante B A, in totidem, iungantur rectæ F H, G I, quæ ex ſcholio huius propoſ. 27. ipſi A C, parallelæ erunt, cum arcus æquales intercipiant. Ex B, per G, denique extendatur recta B G, occurrens A C, productæ in K. Dico rectam A K, æqualem eſſe omnibus parallelis A C, H F, I G, ſimul ſumptis. Ductis enim rectis H C, I F, & productis, donec cum A K, conueniant; a quoniam a 27. *tertij.*
anguli C H F, H F I, arcubus æqualibus C F, H I, inſiſtentes, ſunt æquales; b erunt rectæ H C, I L, parallelæ: Eſt autem & F H, ipſi C L, parallela. Parallelogrammum ergo eſt C H F L; c ac proinde recta C L, rectæ F H, æqualis. b 27. *primi.* c 34. *primi.*

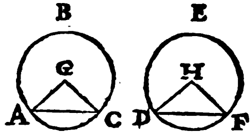


Eadem ratione erit K L, ipſi G I, æqualis: & ſic deinceps, ſi ſint plures. Addita ergo communi A C, fiet tota A K, omnibus A C, H F, I G, ſimul ſumptis æqualis. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 25. PROPOS. 28. xxviij.

IN æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

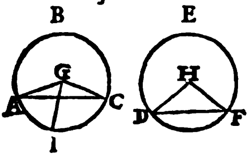
IN circulis æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, & H, ſint rectæ æquales A C, D F. Dico maiorem peripheriam A B C, æqualem eſſe maiori D E F, & minorem A C, minori D F.



Ductis enim rectis A G, G C, D H, H F; erunt latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H, H F, trianguli D H F. Ponuntur autem & baſes A C, D F, æquales. Igitur *d* anguli G, & H, æquales erunt: Ac propterea peripheriæ A C, D F, quibus inſiſtunt, *e* æquales erunt; quæ ablatæ ex totis æqualibus, relinquent etiam æquales A B C, D E F. In æqualibus ergo circulis æquales rectæ lineæ, &c. Quod erat demonſtrandum. d 8. *primi.* e 26. *tertij.*

SCHOLIVM.

QVOD ſi fuerint lineæ inæquales in circulis æqualibus, auferet maior linea, maiorem peripheriam, quam minor, ſi loquamur de ſegmentis circuli minoribus ſemicirculo. Nam ſi de ſegmentis circuli maioribus ſermo habeatur, maior linea auferet minorem peripheriam, quàm minor. In circulis enim æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, & H, ſit recta A C, maior, quam D F. Dico peripheriam A C, ſemicirculo minorem, maiorem eſſe peripheria D F: At peripheriam A B C, minorem peripheria D E F. Ductis enim rectis A G, G C, D H, H F, erunt latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H, H F, trianguli D H F. Ponitur autem baſis A C, maior baſe D F. Igitur a *angulus A G C, maior erit angulo D H F. Fiat angulus C G I, angulo D H F, æqualis; eritque propterea* b *peripheria C I, peripheria D F, æqualis; Ac proinde peripheria A I C, maior, quam peripheria D F: Ideoque reliqua A B C, minor, quam reliqua D E F.*

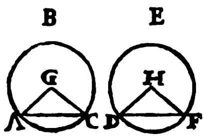


a 25. primi.
b 26. tertij.

xxviij.

THEOR. 26. PROPOS. 29.

IN æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ ſubtendunt.

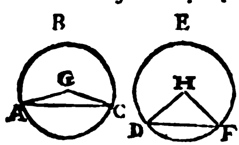


IN circulis eiſdem æqualibus ponantur æquales peripheriæ AB C, D E F; Item A C, & D F. Dico rectas A C, D F, quæ eas ſubtendunt, eſſe æquales. Ductis enim lineis, vt prius, erunt latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H, H F, trianguli D H F: Sunt autem & anguli G, H, *c* æquales, quod æqualibus peripheriis A C, D F, inſiſtant. Igitur *d* baſes A C, D F, æquales erunt. In æqualibus ergo circulis, æquales peripherias, &c. Quod erat oſtendendum.

c 27 tertij.
d 4. primi.

SCHOLIVM.

SI autem fuerint peripheriæ inæquales, ſubtendet maiorem maior linea, quam minorem, ſi de ſegmentis ſemicirculo minoribus fiat ſermo. Nam ſi de ſegmentis maioribus ſemicirculo loquamur, ſubtendet maiorem minor linea, quam minorem. In circulis enim æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, & H, ſint peripheriæ ſemicirculo minores A C, D F; ſitque A C, maior, quam D F; Ac proinde A B C, minor quam D E F. Dico lineam A C, maiorem eſſe, quam D F. Ductis enim rectis A G, G C, D H, H F;



Digitized by Google

D H, H F; erit angulus A G C, maior angulo D H F, ex ſcholio propoſ. 27. huius lib. Cum igitur latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia ſint lateribus D H, H F, trianguli D H F, a erit baſis A C, maior baſe D F, &c. a 4. pri.

SVNT autem proximè antecedentes quatuor propoſitiones 26. 27. 28. & 29. intelligendæ etiam in eodem circulo, vt in ſcholio propoſ. 26. monuimus, quemadmodum conſtat ex demonſtrationibus adductis. Eadem enim locum habent in vno eodemq́; circulo.

ITAQVE eædem quatuor propoſitiones magis vniuerſales fient, ſi ita proponantur.

IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales anguli æqualibus peripheriis inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant.

IN æqualibus circulis, vel eodem, anguli qui æqualibus peripheriis inſiſtunt, ſunt inter ſe æquales, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant.

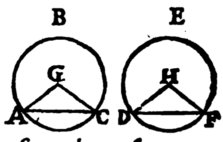
IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales peripherias æquales rectæ lineæ ſubtendunt.

SED & ſequentes propoſitiones demonſtrare, non fuerit inutile.

I.

CIRCVLI, è quibus æquales rectæ lineæ auferunt ſimiles circumferentias, æquales ſunt.



EX circulis A B C, D E F, rectæ lineæ æquales A C, D F, abſcindant ſimiles circumferentias A B C, D E F. Dico circulos ipſos æquales eſſe. Nam ſi ſegmenta A B C, D E F, ſimilia ſunt, erunt & reliqua ſegmenta A C, D F, ſimilia, vt ad propoſ. 22. demonſtrauimus. Rurſus quia ſuper rectas æquales A C, D F, conſtituta ſunt ſimilia ſegmenta A B C, D E F, b ipſa inter ſe æqualia erunt. Eadem ratione æqualia erunt ſegmenta A C, D F, quæ ſimilia ſunt demonſtrata. Toti ergo circuli æquales erunt. Simili modo, ſi rectæ æquales A C, D F, dicantur auferre ſimiles circumferentias A C, D F, erunt ex iis, quæ ad propoſ. 22. demonſtrauimus, & ſegmenta A B C, D E F, ſimilia. c Tam ergo illa, quam hæc inter ſe æqualia erunt: ac proinde & toti circuli æquales erunt inter ſe. Quod eſt propoſitum. b 24. tertij. c 24. tertij.

T 4 EX cir-

Digitized by Google

II.

EX circulis inæqualibus æquales rectæ lineæ circumferentias diſſimiles auferunt.

IN eadem figura ponantur recta A C, D F, æquales, at circuli A B C, D E F, inæquales. Dico circumferentias A B C, D E F, diſsimiles eſſe. Si enim ſimiles eſſent, circuli ipſi, vt proximè demonſtrauimus, eſſent æquales. Quod pugnat cum hypotheſi. Diſsimiles ergo ſunt circumferentiæ A B C, D E F. Eadem ratione circumferentiæ A C, D F, erunt diſsimiles. Quod erat oſtendendum.

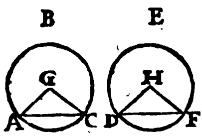
III.

EX circulis inæqualibus lineæ rectæ, quæ circumferentias ſimiles auferunt, inæquales ſunt.

IN eadem figura ponantur circuli inæquales, at circumferentiæ A B C, D E F, ſimiles. Dico rectas A C, D F, inæquales eſſe. Si enim dicantur eſſe æquales, erunt, ex primo theoremate, circuli æquales, quod eſt abſurdum, cum ponantur inæquales. Sunt ergo rectæ A C, D F, inæquales. Eodem modo, ſi ſimiles dicantur circumferentiæ A C, D F, demonſtrabitur, rectas lineas A C, D F, inæquales eſſe.

IV.

RECTÆ lineæ, quæ ex quibuſcunque circulis circumferentias ſimiles inæquales auferũt, inæquales ſunt.



IN eadem figura ponantur circumferentiæ A B C, D E F, ſimiles & inæquales. Dico rectas A C, D F, inæquales eſſe. Aut enim circuli æquales ſunt, vel inæquales. Sint primum æquales. Si ergo rectæ A C, D E, dicantur æquales, a erunt circumferentiæ A B C, a 28. tertij.
D E F, ablatæ æquales, quod eſt contra hypotheſim. Non ergo æquales ſunt rectæ A C, D F. Sint deinde circuli inæquales. Igitur rectæ A C, D F, auferentes circumferentias A B C, D E F, ſimiles, inæquales ſunt, vt in tertio theoremate demonſtratum eſt. Non aliter oſtendemus, rectas A C, D F, inæquales eſſe, ſi circumferentiæ A C, D F, ponantur ſimiles, & inæquales.

V.

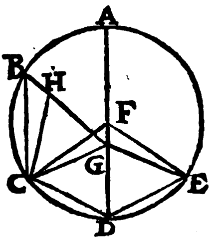
SI in diametro circuli præter centrum punctum ſumatur, ab eoque in peripheriam duæ rectæ non in eaſdem partes cadentes efficiant ad diametrum angulos æquales, rectæ illæ lineæ æquales erunt, & arcus abſcindent æquales. Et ſi lineæ ſint æquales, conſtituent rectæ

illæ ad

Digitized by Google

illæ ad diametrum angulos æquales, abſcindentq; æquales arcus. Si denique arcus æquales abſcindant, erunt rectæ illæ æquales, conſtituentq; ad diametrum angulos æquales.

IN circulo ABCDE, cuius centrum F; ſumatur in diametro AD, punctum G, præter centrum, conſtituanturq; primùm duo anguli æquales CGD, EGD. Dico tam rectas GC, GE, quàm arcus CD, ED, æquales eſſe. Quoniam enim a *tam duo anguli CGD, CGF, quàm duo EGD, EGF, duobus rectis æquales ſunt, ſi demantur æquales CGD, EGD; erunt & reliqui CGF, EGF, æquales. Ductis igitur rectis CF, EF, ad centrum, erunt duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, æqualia, angulíq; FGC, FGE, æqualibus lateribus oppoſiti æquales. Cùm ergo reliquorum angulorum FCG, FEG, vterque ſit recto minor; (Ducta enim recta CD, erit angulus FCD, in Iſoſcele FCD, acutus; ex 3. coroll. propoſ. 17. lib. 1. ac propterea à fortiori FCG, acutus erit. Eodemq; modo, ducta recta DE, angulus FEG, acutus erit,) erit ex ijs, quæ ad finem lib. 1. demonſtrauimus, baſis GC, baſi GE, æqualis, & angulus CFG, angulo EFG;* b *ac proinde arcus CD, ED, æquales erunt. Conſtat ergo propoſitum.* a 13. primi. b 26. tertij.



DEINDE ſint lineæ GC, GE, æquales. Dico & angulos CGD, EGD, æquales eſſe, & arcus CD, ED. Si enim lineæ GC, GE, ſunt æquales, erunt duo latera GC, GF, æqualia duobus lateribus GE, GF: Eſt autem & baſis FC, baſi FE, æqualis. c *Igitur anguli FGC, FGE, æquales erunt, ac proinde & ex duobus rectis reliqui CGD, EGD, erunt æquales. Rurſus quia duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, æqualia ſunt, baſeſq; æquales ponuntur GC, GE,* d *erunt & anguli CFD, EFD, æquales,* e *atq; idcirco & arcus CD, ED, æquales erunt. Quod eſt propoſitum.* c 8. primi. d 8. primi. e 26. tertij.

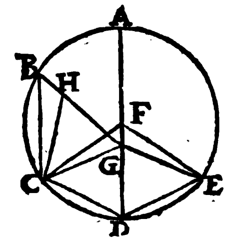
TERTIO ſint arcus CD, ED, æquales. Dico & lineas GC, GE, & angulos CGD, EGD, eſſe æquales. Si enim arcus CD, ED, æquales ſunt, f *erunt & anguli CFD, EFD, æquales. Quare cùm duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, ſint æqualia, anguloſq; æquales contineant;* g *erunt & baſes GC, GE, æquales, & anguli FGC, FGE; ac proinde ex duobus rectis reliqui CGD, EGD. Quæ omnia demonſtranda erant.* f 27. tertij. g 4. primi.

HOC tamen theoremate multò vniuerſalius eſt Lemma 21. lib. 1. noſtri Aſtrolabij.

Digitized by Google

V.

SI in diametro circuli præter centrum ſumatur punctum quodpiam, in quo ad eaſdem partes duo anguli æquales conſtituantur, inſiſtent hi anguli æquales arcubus inæqualibus, maiorque erit ille, qui à maiori portione diametri remotior eſt.



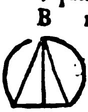
IN eadem figura proxima ſint anguli æquales G G D, duo C G B. Dico arcum B C, arcu C D, maiorem eſſe. Ductis enim rectis B C, C D, a *quoniam recta G B, maior eſt, quàm recta G D, abſcindatur G H, ipſi G D, æqualis, iungaturq́; recta C H. Quia igitur duo latera G H, G C, duobus lateribus G D, G C, æqualia ſunt, anguloſq́; continent æquales;* b *erunt & baſes C H, C D, æquales, & angulus G H C, angulo G D C, æqualis. Eſt autem G D C, in Iſoſcele F C D, acutus, ex 3. coroll. propoſ. 17. lib. 1. Igitur & G H C, acutus erit; ac proinde ex duobus rectis reliquus C H B, obtuſus erit. Cùm ergo* c *duo anguli C H B, C B H, ſint duobus rectis minores, erit C B H, acutus. Quare* d *latus B C, latere C H, maius erit. Eſt autem C H, recta oſtenſa ipſi C D, æqualis. Igitur recta B C, maior quoq́; erit quàm C D; ac propterea ex ſcholio propoſ. 28. huius lib arcus B C, arcu C D, maior erit. Quod erat oſtendendum.*

a 7. *tertij.*
b 4. *primi.*
c 17. *primi.*
d 19 *primi.*

xxix. PROBL. 4. PROPOS. 30.

DATAM peripheriam biſariam ſecare.

SIT peripheria A B C, ſecanda biſariam. Ducatur recta ſubtendens A C, qua diuiſa biſariam in D, erigatur perpendicularis D B, quæ peripheriam A B C, biſariam ſecabit in B. Ductis enim rectis A B, C B, erunt latera A D, D B, trianguli A D B, æqualia lateribus C D, D B, trianguli C D B: Sunt autem & anguli ad D, æquales, nempe recti. Igitur *e* & baſes A B, C B, æquales erunt; Ac propterea *f* peripheriæ A B, C B, erunt æquales. Datam ergo peripheriam biſariam ſecuimus. Quod erat faciendum.



e 4. *primi.*
f 8. *tertij.*

PRAXIS.

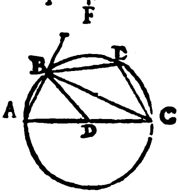
NON differt praxis diuidendi datam peripheriam biſariam à praxi diuidendi rectam lineam biſariam, quam ad propoſ. 10. lib. 1. tradidimus. Si namq́; quicunq́; arcus proponatur, vt A B C, intelligenda ſemper eſt recta linea eum ſubtendens A C, etiamſi ducta non ſit; atq́; ex punctis A, & C, deſcribendi arcus eodem interuallo ſe mu- tuò

tuò interſecantes ſupra & infra puncta A, & C, &c. non ſecus, ac ſi dicta recta A C, ſecanda eſſet biſariam. Recta enim diuidens rectam A C, biſariam, ſecabit quoq; arcum datum biſariam.

THEOR. 27. PROPOS. 31. xxx.

IN circulo angulus, qui in ſemicirculo, rectus eſt: qui autem in maiore ſegmento, minor recto: qui verò in minore ſegmento, maior eſt recto. Et inſuper angulus maioris ſegmenti, recto quidem maior eſt: minoris autem ſegmenti angulus, minor eſt recto.

CIRCVLI enim A B C, cuius centrum D, diameter ſit A C, conſtituaturq; in ſemicirculo angulus A B C, exiſtetq; angulus B A C, in maiori ſegmento C A B. Conſtituatur quoq; in C E B, minori ſegmento angulus B E C. Dico angulum A B C, in ſemicirculo rectum eſſe; angulum verò B A C, in maiore ſegmento, minorem recto: & angulum B E C, in minori ſegmento, maiorem recto. Item angulum maioris ſegmenti comprehenſum recta B C, & peripheria B A C, eſſe recto maiorem. At angulum minoris ſegmenti comprehenſum recta B C, & peripheria B E C, recto minorem.



Ducatur enim recta B D, ad centrum, & extendatur A B, in F. Quoniam igitur rectæ DA, DB, æquales ſunt, *a* erit angulus D B A, angulo D A B, æqualis. Eadem ratione erit angulus D B C, angulo D C B, æqualis, ideoq; totus angulus A B C, duobus angulis B A C, B C A, æqualis erit. *b* Eſt autem & angulus F B C, externus eiſdem duobus internis angulis B A C, B C A, in triangulo A B C, æqualis. Quare æquales erunt inter ſe anguli A B C, F B C; ac propterea vterque rectus. Rectus igitur eſt angulus A B C; quod eſt primum.

a 5. primi.
b 32. primi.

QVONIAM verò in triangulo A B C, *c* duo anguli A B C, & B A C, ſunt duobus rectis minores; Et eſt angulus A B C, oſtenſus rectus: Erit angulus B A C, in ſegmento maiori, recto minor; quod eſt ſecundum.

c 17. primi.

RVRSVS quia in quadrilatero A B E C, intra circulum deſcripto, *d* duo anguli oppoſiti B A C, & B E C, ſunt duobus rectis æquales; Et angulus B A C, oſtenſus eſt recto minor: Erit B E C, angulus in ſegmento minore, recto maior; quod eſt tertium.

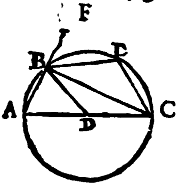
d 22. tertij.

SATIS autem eſt, demonſtraſſe, vnum angulum in ſemicirculo, nimirũ A B C, rectum eſſe: & in maiori ſegmento, qualis eſt B A C, recto minorem: ac deniq; in ſegmento minori, cuiuſmodi eſt B E C, maiorem recto. Cùm enim omnes anguli in eodem ſegmento ſint inter ſe æquales, perſpicuum eſt, ſi vnus angulus in ſemicirculo rectus ſit, omnes in eodem ſemicirculo eſſe rectos: Et ſi in maiore

ſeg-

Digitized by Google

ſegmento vnus ſit recto minor, omnes in eodem ſegmento eſſe recto minores: Et ſi denique in minore ſegmento vnus ſit maior recto, omnes in eodem ſegmento maiores eſſe recto. Hoc idcirco dixerim: quia



Euclides non probat abſolutè, quemcunq; angulum in ſegmento maiore B A C, eſſe recto minorem, vt conſtat, ſi alius angulus in eo ſegmento conſtitueretur; cùm is non contineretur à diametro, quemadmodum angulus B A C. Quare quicunque alius oſtendetur eſſe etiam recto minor, quia a *æqualis eſt angulo B A C, in eodem*

a 21. *ter tij.* *ſegmento maiore, qui recto minor eſt oſtenſus ab Euclide.*

AMPLIVS cùm angulus rectus A B C, pars ſit anguli ſegmenti maioris B A C, qui comprehenditur recta B C, & peripheria B A C; erit angulus ſegmenti maioris, recto maior, quod eſt quartum.

POSTREMO, cùm angulus ſegmenti minoris, comprehenſus recta B C, & peripheria B E C, pars ſit quoque anguli recti F B C; Erit angulus ſegmenti minoris, recto minor; quod eſt quintum. In circulo igitur angulus, qui in ſemicirculo, rectus eſt, &c. Quod erat demonſtrandum.

ALIA demonſtratio huius propoſitionis. In ſemicirculo, cuius diameter A C, & centrum D, ſit angulus A B C, quem dico eſſe



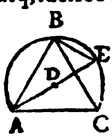
b 5. *pri mi* rectum. Ducta enim recta B D, *b* erunt anguli D B A, D A B, æquales, quòd rectæ D A, D B, æquales ſint.

c 32. *pri mi.* Cùm igitur angulus B D C, externus *c* æqualis ſit duobus angulis internis D B A, D A B, in triangulo A B D; Erit angulus B D C, duplus anguli D B A. Eodem modo erit angulus A D B, duplus anguli D B C, atque adeò duo anguli

d 13. *pri mi.* ad D, dupli erunt totius anguli A B C. Cùm igitur *d* anguli ad D, ſint duobus rectis æquales; erit angulus A B C, eorum dimidium, rectus: quod eſt primum.

e 5. *pri mi.* Vel ſic. Quoniam *e* angulus D A B, angulo D B A, & angulus D C B, angulo D B C, æqualis eſt; erunt duo anguli A, C, angulo A B C, æquales in triangulo A B C: ac proinde angulus A B C, dimidium erit trium angulorum A, C, & A B C, eiuſdem

f 32. *pri mi.* trianguli. Quocirca *f* cùm tres anguli in triangulo A B C, ſint æquales duobus rectis; erit A B C, dimidium duorum rectorum, atq; idcirco rectus.

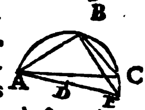


SIT rurſus in ſegmento maiori, cuius centrum D, angulus A B C, quem dico eſſe recto minorem. Ducta enim diametro A E, & coniuncta recta B E; erit angulus A B E, in ſemicirculo rectus, vt demõſtratum eſt. Quare angulus A B C, pars recti, recto minor erit: quod eſt ſecundum: Atq; hæc demonſtratio in omnem

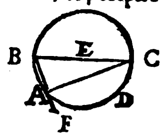
Digitized by Google

nuem angulum in minori ſegmento quadrat: quod de ſuperiori demonſtratione dici non poterat, vt ibidem monuimus.

SIT iterum in ſegmento minori, cuius centrum D, angulus A B C, quem dico eſſe recto maiorẽ. Ducta enim diametro A E, occurrens peripheriæ productæ in E, & coniuncta recta B E; erit angulus A B E, in ſemicirculo rectus, vt demonſtratũ eſt; qui cùm ſit pars anguli A B C, erit angulus A B C, recto maior: quod eſt tertium.



IAM verò proponatur ſegmentum maius A B C, & ſegmentum minus A D C; quorum centrum E. Dico angulum C A B, ſegmenti maioris, qui videlicet conſtituitur à recta C A, & peripheria A B C, eſſe recto maiorem; At angulũ C A D, ſegmenti minoris, qui fit à recta eadem C A, & peripheria A D C, recto minorem. Ducta enim diametro C B, & recta B A F, cadet eius ſegmentum B A, duo puncta B, A, coniungens, a intra circulum, reliqua verò pars A F, extra circulum; eritq; angulus B A C, in ſemicirculo rectus, atque adeò ei deinceps F A C, rectus quoq;. Cùm igitur angulus rectilineus rectus B A C; ſit pars anguli C A B, ſegmenti maioris, qui nimirũ ſub recta C A, & peripheria A B C, continetur, & angulus C A D, ſegmenti minoris, contentus videlicet ſub recta C A, & peripheria A D C, pars quoque anguli recti F A C; conſtat vtrumque. a 2. tertij.



COROLLARIVM.

HINC manifeſtum eſt, quòd angulus trianguli, qui reliquis duobus æqualis exiſtit, rectus eſt: eo quòd illi contiguus (qui producto latere extra triangulum fit) eiſdem ſit æqualis. Quod quidem conſtat ex priore demonſtratione. Vel eo quod dimidium ſit trium angulorum trianguli, qui duobus rectis æquiualent. Quod ex poſteriore demonſtratione manifeſtum eſt.

EX CAMPANO.

EX hac propoſitione perſpicuum quoque eſt, non valere duas illas argumentationes, quas impugnauimus ad propoſ. 16. huius lib. quarum vna eſt.

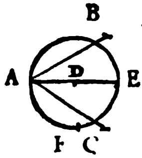
TRANSITVR à maiore ad minus, & per omnia media; ergo per æquale.

ALTERA verò eſt eiuſmodi.

CONTINGIT reperire maius, & minus eodem; Igitur continget reperire æquale.

IN circulo enim A B C, cuius centrum D, & diameter A E, ducatur recta, A B, b Erit angulus A B E ſegmenti maioris, recto maior. Quare ſi A B, moueatur verſus A E, circa A, punctum fixum, b 31. tertij.

faciet



a 16 tertij.
b 31. tertij.

faciet ſemper cum peripheria angulum recto maiorem, donec ad diametrum A E, peruenerit, a vbi faciet angulum ſemicirculi, recto minorem. Quod ſi vlterius moueatur ad A C, b faciet à fortiori angulum A C F, ſegmenti minoris, recto minorem. Tranſitur ergo ab angulo ſegmenti maioris, qui recto maior eſt, ad angulum ſemicirculi, vel etiam ſegmenti minoris, quorum vterque recto minor eſt, non tamen per angulum recto æqualem. Cùm igitur per omnes medios angulos fiat tranſitus, perſpicuum eſt, vitioſas eſſe prædictas conſequentias.

SCHOLIVM.

MANIFESTVM quoq; eſt conuerſum huius theorematis: hoc eſt.

SEGMENTVM circuli, in quo angulus conſtitutus eſt rectus, eſt ſemicirculus: in quo verò angulus eſt acutus, eſt ſegmentum maius: & in quo angulus eſt obtuſus, eſt ſegmentum minus. Et ſegmentum, cuius angulus recto eſt maior, eſt ſemicirculo maius; cuius verò angulus eſt recto minor, eſt vel ſemicirculus, vel ſemicirculo minus.

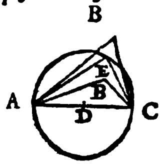
NAM angulo exiſtente recto, ſi ſegmentum non ſit ſemicirculus, erit vel maius, & ſic angulus erit acutus; vel minus, & ſic angulus in eo obtuſus erit: quorum vtrumque pugnat cum hypotheſi. Rurſus angulo exiſtente acuto, ſi ſegmentum non ſit ſemicirculo maius, erit vel ſemicirculus, & ſic angulus in eo erit rectus; vel minus, & ſic angulus in eo erit obtuſus: quorum vtrumque cum hypotheſi etiam pugnat. Denique angulo exiſtente obtuſo, ſi ſegmentum non ſit minus ſemicirculo, erit vel ſemicirculus, atque ita angulus in eo rectus erit; vel maius, atq; ita angulus in eo acutus erit: quod ſimiliter hypotheſi contrarium eſt. Præterea, quando ſegmenti angulus eſt recto maior, ſi ſegmentum non ſit maius ſemicirculo, erit vel ſemicirculus vel ſemicirculo minus, & ſic eius angulus recto erit minor, quod non ponitur. At quando angulus ſegmenti eſt recto minor, ſi ſegmentum non ſit ſemicirculus, aut ſemicirculo minus, erit maius, atque ita eius angulus recto quoq; maior erit. quod hypotheſi aduerſatur.

QVIN & hoc theorema verum eſt; ſcilicet.

SI angulo recto linea recta ſubtenſa, hoc eſt, ſi in triangulo rectangulo latus recto angulo oppoſitum, bifariã ſecetur, & ex puncto diuiſionis circa illam rectam, vel latus, circulus deſcribatur; tranſibit neceſſariò circulus ille per angulum rectum.

ANGVLO enim recto A B C, ſubtenſa recta A C, vel in triangulo

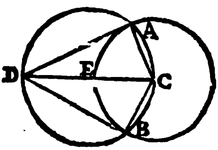
gulo rectangulo A B C, latus A C, recto angulo B, oppoſitum bifariam ſecetur in D, puncto, ex quo ad interuallum D A, vel D C, circulus deſcribatur A E C, quem dico tranſire per B. Si enim tranſeat citra B, vel vltra; ductis rectis A E, C E, ita vt rectas A B, A C, non ſecent, ſed vel intra eas cadant, vel extra; a erit angulus A E C, rectus quoq;. Quare anguli recti B, & E, æquales erunt; quod eſt abſurdum: cùm angulus E, ſit neceſſariò, b vel maior, vel minor angulo B. Tranſit igitur circulus per punctum B: quod eſt propoſitum.



a 31. tertij.
b 21. primi.

EX ijs, quæ in priore parte huius propoſ. demonſtrata ſunt, nullo negotio ex puncto extra circulum dato ducemus duas rectas ad vtrãque partem rectæ ex eodem puncto per centrum circuli ductæ, quæ circulum tangant. Id quod ad propoſ. 17. huius lib. polliciti ſumus.

SIT enim circulus A B, cuius centrum C, & punctum D, extra ipſum. Ducta recta D C, ex dato puncto ad centrum, eaq; diuiſa bifariam in E, deſcribatur ex E, ad interuallum E C, vel E D, circulus A C B D, ſecans datum circulum in punctis A, B, iunganturq; rectæ D A, D B. Dico vtramq; circulum tangere in A, & B. Ductis enim rectis A C, B C, c erit vterq; angulus A, & B, in ſemicirculo rectus. Quare per coroll. propoſ. 16 huius lib. recta D A, circulum A B, tanget in A; & recta D B, eundem tanget in B: quandoquidem tam illa perpendicularis eſt ad extremitatem ſemidiametri A C, quàm hæc ad extremitatem ſemidiametri C B.



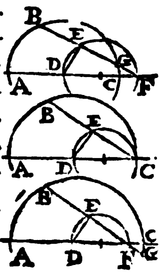
c 31. tertij.

SED & hoc theorema non iniucundum ex Pappo Alexandrino demonſtrabimus hoc loco.

SI per centrum circuli alius circulus deſcribatur, & per vtriuſque circuli centrum recta eijciatur, à puncto verò, vbi hæc recta à poſteriori circulo ſecatur, ducatur recta vtcunq;: ſecabitur eius portio intra priorem circulum à circumferentia poſterioris bifariam.

SIT circulus A B C, per cuius centrum D, deſcribatur alius circulus D E F, & per horum circulorum centra ducatur recta A F; ac deniq; ex puncto F, vbi circulus D E F, rectam A F, interſecat, ducatur recta F B, ſecans circumferentias in B, E, G. Dico B E, G E, eſſe æquales. Ducta enim recta D E, d erit angulus D E F, in ſemicirculo D E F, rectus. Igitur e recta D E, rectam B G, ſecat bifariam.

QVOD ſi poſterior circulus tranſeat per punctũ C, vt in 2a figura; erit f rurſum angulus D E C, in



d 31. tertij.
e 3. tertij.
f 31. tertij.

ſemi-

a 3. ter- *ſemicirculo DEC, rectus; ac a propterea BC, in E, ſecabitur bifa-*
tij. *riam.*

SI denique poſterior circulus totus ſit intra priorem, vt in tertia
b 31. ter *figura; erit iterum b angulus DEF, in ſemicirculo DEF, rectus.*
tij. *Quare c recta DE, rectam BG, bifariam ſecabit. Quod erat oſten-*
c 3. ter- *dendum.*
tij. *FACILE etiam aliud hoc theorema demonſtrabitur.*

QVADRILATERVM in circulo deſcriptum, cuius duo latera oppoſita ſunt parallela, & æqualia, parallelogrammum eſt rectangulum, hoc eſt, vel quadratum, vel altera parte longius.

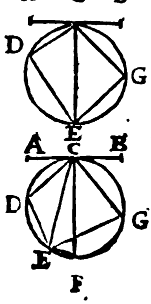


IN circulo ABCD, deſcriptum ſit quadrilaterum ABCD, cuius duo oppoſita latera AD, BC, parallela ſint, & æqualia. Dico ipſum eſſe parallelogrammum, & rectangulum. Cùm enim recta AD, BC, pa-
d 33. pri *rallelæ ſint, & æquales, d erunt quoque AB, DC,*
mi. *parallelæ, & æquales. Parallelogrammum ergo eſt*
e 28. ter *ABCD. Quia verò e & arcus AD, arcui BC, ob rectas æquales*
tij. *AD, BC, & arcus AB, arcui DC, ob æquales rectas AB, DC, æqualis eſt; erit totus arcus BAD, toti arcui BCD, & totus arcus ADC, toti arcui ABC, æqualis; ac proinde, ductis rectis BD, AC,*
f 31. ter- *ſemicirculi erunt BAD, BCD, ADC, ABC. Quare f anguli qua-*
tij. *drilateri recti erunt. Quod eſt propoſitum.*

xxxj. THEOR. 28. PROPOS. 32.

SI circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem producatur quædam recta linea circulum ſecans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales ſunt ijs, qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt, angulis.

TANGAT recta AB, circulum CDE, in C, puncto, à quo ducatur recta CE, diuidens circulum in duo ſegmenta, in quibus fiant anguli CGE, CDE. Dico angulum ACE, æqualem eſſe angulo CGE, in alterno ſegmento; & angulum BCE, angulo CDE, in alterno quoque ſegmento. Tranſeat enim primum, vt in priore figura, recta CE, per centrū.
g 18. ter- *g* Erit igitur vterque angulus ACE, BCE, re-
tij. ctus: *h* Sunt autem & anguli CGE, CDE, in
h 31. ter ſemicirculis recti. Igitur angulus ACE, angulo
tij. CGE; & angulus BCE, angulo CDE, æqualis eſt.



NON

NON tranſeat iam CE, recta per centrum, vt in figura po-
ſteriore. Ducta igitur recta CF, per centrum, connectatur recta
EF: a eritque CF, perpendicularis ad AB, b & angulus CEF, a 18. tertij.
rectus; ac propterea reliqui anguli ECF, EFC, æquales erunt
vni recto, vt angulo recto ACF. Dempto ergo communi angulo b 31. tertij.
ECF, erit reliquus ACE, reliquo CFE, æqualis: c Eſt autem
angulo CFE, æqualis quoque angulus CGE, cùm vterq; ſit in c 21. tertij.
ſegmento CGE. Quare angulus ACE, angulo CGE, æqualis e-
rit. Quoniam verò in quadrilatero CDEG, duo d anguli CDE, d 22. tertij.
CGE, duobus ſunt rectis æquales: e Sunt autem & duo anguli
ACE, BCE, duobus rectis æquales; ſi auferantur æquales anguli e 13. primi.
ACE, CGE, remanebit angulus BCE, angulo CDE, æqualis.
Si circulum igitur tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

POTEST theorema hoc conuerti hoc modo.

SI linea recta ducta ad extremitatem lineæ circulum ſecantis fecerit cùm ipſa angulos æquales ijs, qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt, angulis; Linea ducta circulum tanget.

*IN eadem figura priore tranſeat primùm recta CE, per centrum,
ſecans circulum CDE, & ducatur recta AB, per C, faciens angulum
ACE, æqualem angulo CGE. Dico AB, tangere circulum. Quoniam
f angulus CGE, rectus eſt, erit & angulus ACE, illi æqualis, rectus.* f 31. tertij.
*Quare per coroll. propoſ. 16. huius lib. AB, circulum tanget. Iam verò
CE, non tranſeat per centrum, conſtruaturq; figura poſterior, vt ſu-
prà. Quoniam igitur angulus ACE, æqualis ponitur angulo CGE,
in alterno ſegmento maiore, g & hic eſt æqualis angulo CFE; erit* g 21. tertij.
*& angulus ACE, æqualis angulo CFE. Addito ergo communi an-
gulo ECF, erit angulus ACF, æqualis duobus angulis EFC, ECF:
Atqui anguli EFC, ECF, æquales ſunt vni recto; quod h angulus* h 31. tertij.
*CEF, rectus ſit in ſemicirculo, & tres anguli in triangulo CEF, æ-
quales i ſint duobus rectis. Angulus igitur ACF, rectus quoq; erit;* i 32. primi.
ideoq; per coroll. propoſ. 16. huius lib. AB, circulum tanget.

*EODEM modo, ſi angulus BCE, æqualis fuerit angulo CDE,
in alterno ſegmento minori, oſtendetur recta AB, tangere circulum.
Cùm enim k anguli BCE, ACE, duobus ſint rectis æquales; item* k 13. primi.
*duo l anguli CDE, CGE, duobus rectis æquales; ſi demantur æqua-
les BCE, CDE, remanebunt anguli ACE, CGE, æquales. Quare,* l 22. tertij.
vt demonſtratum iam eſt, recta AB, circulum tanget.

PROBL. 5. PROPOS. 33. xxxiij.

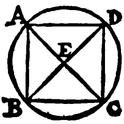
SVPER data recta linea deſcribere ſegmentum cir-

a 3. ter- tij. *ſemicirculo DEC, rect riam.*

SI denique poſterio
b 31. ter tij. *figura; erit iterum* b
Quare c *recta DE,*
c 3. ter- tij. *dendum.*

FACILE etia

QVADRIL
cuius duo latera
rallelogrammu
tum, vel altera



I rum rali. mu ral par.

d 33. pri mi.
e 28. ter tij. *ABCD. Quia AD, BC, & arcu lis eſt; erit tot ADC, toti an*
f 31. ter- tij. *ſemicirculi eru drilateri recti*

xxxj. TH

SI circ
autem pr
cans: An
ijs, qui
gulis.

TAN
ducatu
A
D

... dato angulo ...

... angulus primum ...
... A B, ſegmentum ...
... fit æqualis ...
... A B, biſariam in D, ...
... ulo autem D A, vel ...
... proponitur. Nam ...
... actus eſt, ideoque æqu...

... angulus datus acutus
... A, fiat angulus D A B, æq...
... acuto; & agatur ad D
... AE, quæ cadet ...
... angulo F A B, æqua...
... B F, rectam A E.
... rectæ F A, F B, æq...
... tro F, & intervallo F...
... A G B, tranſibi...
... A G B, quod deſcriptum...
... enim angulus in ...
... F, tranſit, & ei pe...
... in A, per coroll...
... D A B, hoc eſt, a...
... mento alterno A G B...
... rurſus angulo H,
... endicularis A E, quæ
... deſcriptumq; erit
... æqualis eſt angulo
... datus H, æqua...
... Eadem enim eſt
... pſimus ſegmen-

... POS. 34.

... ndere capiens
...
... B C, à quo auferre
... angulus exi...
... D. e Ducatur
... A. Fiat deinde
... dato D. Dico
... ento ablato
A C B.

Digitized by Google

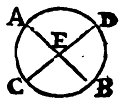
m eſſe dato angulo D. Eſt enim *a* angulus F A B, æ- a 32. ter
C, in alterno ſegmento A C B. Cùm ergo angulo tij.
s ſit æqualis angulus F A B, erit quoque angulus
æqualis. A dato ergo circulo abſcindimus ſegmen-
&c. Quod erat faciendum.

HEOR. 29. PROPOS. 35.

XXXI.

rculo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuò ſecuerint, m comprehenſum ſub ſegmentis vnius, æ- i, quod ſub ſegmentis alterius comprehen- angulo.

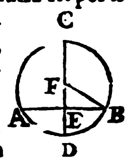
lo A C B D, ſecent ſe mutuò rectæ A B, C D, in E. ngulum comprehenſum ſub ſegmentis quale eſſe rectangulo comprehenſo ſub C E, E D. Aut enim vtraque linea tranſit m, aut vna tantùm, aut neutra. Tranſeat raq; per centrum. Quoniã igitur omnia



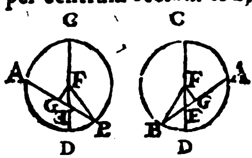
gmenta inter ſe æqualia ſunt, perſpicuum eſt, rectan- mprehenſum ſub duobus vnius lineæ æquale eſſe ei, duobus alterius lineæ comprehenditur, rectangulo, ex ad initium lib. 2. ſcripſimus.

ANSEAT deinde C D, ſola per centrum F, diuidatque rectam A B, bifariam, *b* ac propterea ad angulos rectos, aturq; recta B F. Quoniam igitur C D, diuiſa eſt per æ- in F, & per inæqualia in E, *c* erit rectan- ſub C E, E D, vnà cum quadrato rectæ E F, le quadrato rectæ F D, ideoq; quadrato rectæ um rectæ F D, F B, ſint æquales: Eſt autẽ qua- um rectæ F B, *d* æquale quadratis rectarum E B. Igitur rectangulum ſub C E, E D, vnà cum drato rectæ E F, æquale quoq; erit quadratis rectarũ F E, E B. are ablato communi quadrato rectæ F E, remanebit rectan- ulum ſub C E, E D, æquale quadrato rectæ E B, hoc eſt, rectan- ulo ſub A E, E B, cùm A E, E B, rectæ ſint æquales: ac proinde re- angulum ſub eis comprehenſum, ſit quadratum, ex ijs, quæ ad efin. 1. lib. 2. ſcripſimus.

b 3. tertij.
c 5. ſec.
d 47. primi.



DIVIDAT iam C D, tranſiens per centrum rectam A B, non bifariam. Secetur ergo A B, bifa- riam in G, ducanturq; rectæ F G, F B, *e* eritq; F G, perpendicularis ad A B. Quoniam verò rectangulum ſub C E, E D, vnà cum quadrato rectæ F E, æ- quale *f* eſt quadrato rectæ F D, hoc eſt, quadrato rectæ F B: Eſt autem quadratum rectæ F E, *g* æquale quadratis rectarum

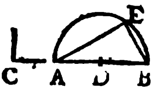


e 3. tertij.
f 5. ſecundi.
g 47. primi.

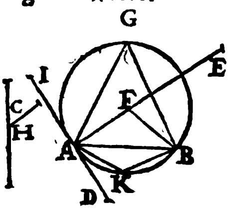
 FG, GE,

culi, quod capiat angulum æqualem dato angulo recti-lineo.

RECTA data ſit A B, & datus angulus primum rectus C. Oportet igitur ſuper A B, ſegmentum deſcribere, in quo angulus exiſtens ſit æqualis angulo recto dato C. Diuiſa A B, Bifariam in D, deſcribatur centro D, interuallo autem D A, vel D B,



a 31. tertij. ſemicirculus A E B; factumq; erit, quod proponitur. Nam *a* angulus A E B, in deſcripto ſemicirculo rectus eſt, ideoque æqualis angulo C, recto.



SIT deinde angulus datus acutus C. Ad punctum A, fiat angulus D A B, æqualis angulo C, acuto; & agatur ad D A, perpendicularis A E, quæ cadet ſupra A B. Fiat deinde angulo F A B, æqualis angulus F B A, ſecetq; B F, rectam A E, in

b 6. primi. F. *b* Erunt igitur rectæ F A, F B, æquales. Quare ſi centro F, & interuallo F A, circulus deſcribatur A G B, tranſibit is per B. Dico igitur angulum in ſegmento A G B, quod deſcriptum eſt ſuper A B, eſſe æqualem angulo C. Fiat enim angulus in dicto ſegmento A G B. Quia igitur A E, per centrum F, tranſit, & ei perpendicularis eſt D A, tanget D A, recta circulum in A, per coroll.

c 32. tertij. propoſ. 16. huius lib. Quapropter *c* angulus D A B, hoc eſt, angulus datus C, æqualis erit angulo G, in ſegmento alterno A G B.

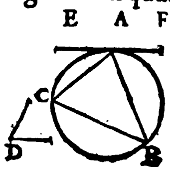
SIT tertiò angulus datus H, obtuſus. Fiat rurſus angulo H, æqualis angulus I A B, & agatur ad I A, perpendicularis A E, quæ ſupra A B, cadet. Reliqua omnia fiant, vt prius, deſcriptumq; erit ſuper A B, ſegmentum A K B, in quo angulus K, æqualis eſt angulo dato obtuſo H. Nã angulus I A B, hoc eſt, angulus datus H, æqua-

d 32. tertij. lis *d* eſt angulo K, in alterno ſegmento A K B. Eadem enim eſt demonſtratio. Itaque ſuper data recta linea deſcripſimus ſegmentum, &c. Quod efficiendum erat.

xxxiij.

PROBL. 6. PROPOS. 34.

A DATO circulo ſegmentum abſcindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.



DATVS circulus ſit A B C, à quo auferre oporteat ſegmentum, in quo angulus exi-

e 17. tertij. ſtens æqualis ſit dato angulo D. *e* Ducatur recta E F, tangens circulum in A. Fiat deinde angulus F A B, æqualis angulo dato D. Dico igitur angulum A C B, in ſegmento ablato

A C B.

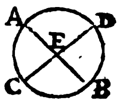
Digitized by Google

A C B, æqualem eſſe dato angulo D. Eſt enim *a* angulus F A B, æqualis angulo C, in alterno ſegmento A C B. Cùm ergo angulo dato D, factus ſit æqualis angulus F A B, erit quoque angulus C, angulo D, æqualis. A dato ergo circulo abſcindimus ſegmentum A C B, &c. Quod erat faciendum. *a 32. tertij.*

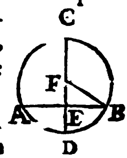
THEOR. 29. PROPOS. 35.

SI in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuò ſecuerint, rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis vnius, æquale eſt ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur, rectangulo. XXXIV.

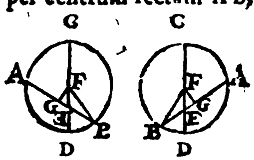
IN circulo A C B D, ſecent ſe mutuò rectæ A B, C D, in E. Dico rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis A E, E B, æquale eſſe rectangulo comprehenſo ſub ſegmentis C E, E D. Aut enim vtraque linea tranſit per centrum, aut vna tantùm, aut neutra. Tranſeat primùm vtraq; per centrum. Quoniã igitur omnia quatuor ſegmenta inter ſe æqualia ſunt, perſpicuum eſt, rectangulum comprehenſum ſub duobus vnius lineæ æquale eſſe ei, quod ſub duobus alterius lineæ comprehenditur, rectangulo, ex ijs, quæ ad initium lib. 2. ſcripſimus.



TRANSEAT deinde C D, ſola per centrum F, diuidatque primùm rectam A B, biſariam, *b* ac propterea ad angulos rectos, coniungaturq; recta B F. Quoniam igitur C D, diuiſa eſt per æqualia in F, & per inæqualia in E, *c* erit rectangulum ſub C E, E D, vnà cum quadrato rectæ E F, æquale quadrato rectæ F D, ideoq; quadrato rectæ F B, cùm rectæ F D, F B, ſint æquales: Eſt autẽ quadratum rectæ F B, *d* æquale quadratis rectarum F E, E B. Igitur rectangulum ſub C E, E D, vnà cum quadrato rectæ E F, æquale quoq; erit quadratis rectarũ F E, E B. Quare ablato communi quadrato rectæ F E, remanebit rectangulum ſub C E, E D, æquale quadrato rectæ E B, hoc eſt, rectangulo ſub A E, E B, cùm A E, E B, rectæ ſint æquales: ac proinde rectangulum ſub eis comprehenſum, ſit quadratum, ex ijs, quæ ad defin. 1. lib. 2. ſcripſimus. *b 3. tertij.* *c 5. ſec.* *d 47. primi.*

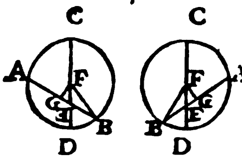


DIVIDAT iam C D, tranſiens per centrum rectam A B, non biſariam. Secetur ergo A B, biſariam in G, ducanturq; rectæ F G, F B, *e* eritq; F G, perpendicularis ad A B. Quoniam verò rectangulum ſub C E, E D, vnà cum quadrato rectæ F E, æquale *f* eſt quadrato rectæ F D, hoc eſt, quadrato rectæ F B: Eſt autem quadratum rectæ F E, *g* æquale quadratis rectarum *e 3. tertij.* *f 5. ſecundi.* *g 47. primi.*



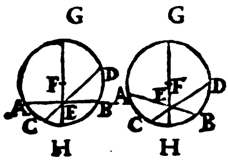
 FG, GE,

Digitized by Google



F G, G E, & quadratũ rectæ F B, æquale quadratis rectarũ F G, G B, erit quoque rectangulum ſub C E, E D, vna cũ quadratis rectarum F G, G E, æquale quadratis rectarum F G, G B. Dempto ergo communi quadrato rectæ F G, remanebit rectangulum ſub C E, E D, vna cum quadrato rectæ G E, æquale quadrato rectæ G B. Atqui etiam rectangulum ſub
25. ſecũ di. A E, E B, vna cum quadrato rectæ G E, a æquale eſt eidem quadrato rectæ G B: propterea quòd recta A B, ſecta eſt bifariam in G, & non bifariam in E. Igitur rectangulum ſub C E, E D, vna cum quadrato rectæ G E, æquale eſt rectangulo ſub A E, E B, vnà cum quadrato eiuſdem rectæ G E. Quare ablato communi quadrato rectæ G E, remanebit rectangulum ſub C E, E D, æquale rectangulo ſub A E, E B. quod eſt propoſitum.

TERTIO neutra per centrum tranſeat, ſiue vna illarum bifariam diuidatur, ſiue neutra. Ducatur per centrum F, & punctũ



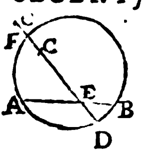
ſectionis E, recta G H. Quoniam itaque oſtenſum eſt, rectangulum ſub A E, E B, æquale eſſe rectangulo ſub G E, E H, ſiue A B, diuidatur bifariam, ſiue non: Item rectangulũ ſub C E, E D, æquale eſſe quoque eidem rectangulo ſub G E, E H, ſiue C D, ſecta ſit bifariam, ſiue non; Erit rectangulum ſub A E, E B, æquale rectangulo ſub C E, E D. quod eſt propoſitum. Si in circulo igitur duæ rectæ lineæ ſeſe mutuò ſecent, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

CONVERTI poterit theorema iſtud hoc modo.

SI duæ rectæ ita ſe ſecent, vt rectangulum ſub vnius ſegmentis comprehenſum, æquale ſit ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur, rectangulo; deſcribi poterit per quatuor illarum puncta extrema circulus: hoc eſt, circulus per quælibet tria puncta earum extrema deſcriptus, per quartum quoq; punctum tranſibit.

SECENT ſe mutuò rectæ A B, C D, in E, ſitq; rectangulum ſub



A E, E B, æquale rectangulo ſub C E, E D. Dico quatuor puncta A, D, B, C, in circumferentiam circuli cadere, hoc eſt, per ea circulum poſſe deſcribi: adeò vt circulus per tria pũcta A, D, B, deſcriptus, tranſeat neceſſariò per punctum etiam C. Deſcribatur enim per tria puncta A, D, & B, circulus aliquis;

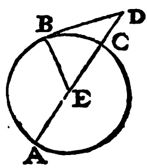
(quo

(quo autem modo id fiat, oſtendemus ad 5. propoſ. lib. 4). qui ſi non tranſeat per C, tranſibit aut vltra C, vel citra, vt per F. Quoniam ergo rectangulum ſub F E, E D, a æquale eſt rectangulo ſub A E, a 35 ter-
E B; & rectangulum ſub C E, E D, ponitur quoq; æquale eidem rectan- tij.
gulo ſub A E, E B; Erunt rectangula ſub C E, E D, & ſub F E, E D, æqualia, pars & totum; quod eſt abſurdum. Tranſibit igitur circulus per punctum C. quod erat propoſitum.

THEOR. 30. PROPOS. 36. XXXV.

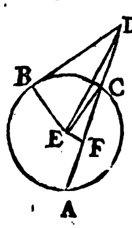
SI extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum ſecet, altera verò tangat: Quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam aſſumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente deſcribitur, quadrato.

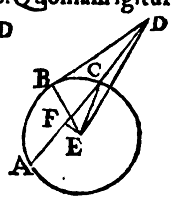
EXTRA circulum A B C, punctum ſumatur D, à quo linea ducatur D A, ſecans circulum in C, *b* & linea D B, circulum tan- b 17. ter-
gens in B. Dico rectangulum ſub D A, D C, æquale eſſe quadra- tij.
to rectæ D B. Tranſeat enim primum recta D A, per centrum E, & iungatur recta E B *c* quæ perpendicularis c 18. ter-
erit ad D B. Quoniam igitur C A, diuiſa eſt tij.



per æqualia in E, & ei addita in rectum & cōtinuum C D, *d* erit rectangulum ſub D A, D C, d 6. ſe-
vna cum quadrato rectæ E C, hoc eſt, cum cundi.
quadrato rectæ E B, æquale quadrato rectæ D E: Eſt autem quadratum rectæ D E, *e* æquale quadratis rectarum E B, B D. Quare rectangulum ſub D A, e 47. pri-
D C, vna cum quadrato rectæ E B, æquale erit quadratis recta- mi.
rum D B, B E. Ablato igitur communi quadrato rectæ B E, remanebit rectangulum ſub D A, D C, quadrato rectæ D B, æquale. Quod eſt propoſitum.

NON tranſeat iam D A, ſecans per centrum E Diuiſa ergo A C, bifariam in F, ducantur rectæ E B, E C, E D, E F; *f* eritque f 18. ter-
E B, ad B D, perpendicularis; *g* & E F, ad A C. Quoniam igitur tij.
C A, diuiſa eſt per æqualia in F, & ei addita recta C D, *h* erit rectāgulum ſub D A, D C, vna cum quadrato rectæ C F, æquale quadrato rectæ D F. Addito igitur communi quadrato rectæ F E, erit rectangulum ſub D A, D C, vna cum quadratis rectarū C F, F E, ęquale quadratis rectarū D F, g 3. ter- tij. h 6. ſecundi.





 F E: Eſt

Digitized by Google

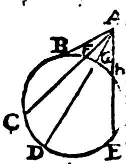
a 47 primi. F E: Eſt autem quadratis rectarum C F, F E, *a* æquale quadratum rectæ E C, ideoque & quadratum rectæ E B; Et *b* quadratis rectarum D F, F E, æquale eſt quadratum rectæ D E. Quare rectangulum ſub D A, D C, vna cum quadrato rectæ E B, æquale erit quadrato rectæ D E. Cùm igitur quadratum rectæ D E, *c* æquale ſit quadratis rectarum D B, B E; erit & rectangulum ſub D A, D C, vnà cum quadrato rectæ E B, æquale quadratis rectarum D B, B E. Ablato ergo communi quadrato rectæ B E, remanebit rectangulum ſub D A, D C, quadrato rectæ D B, æquale: quod eſt propoſitum. Si igitur extra circulum ſumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonſtrandum.

b 47. primi.

c 47. primi.

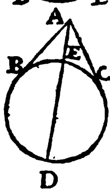
COROLLARIVM I.

HINC manifeſtum eſt, ſi à puncto quouis extra circulum aſſumpto plurimæ lineæ rectæ circulum ſecantes ducantur, rectangula comprehenſa ſub totis lineis, & partibus exterioribus, inter ſe eſſe æqualia. Vt ſi ex A, ducantur rectæ A C, A D, A E, ſecantes circulum in F, G, H, erunt rectangula ſub A C, A F; Item ſub A D, A G; & ſub A E, A H, æqualia inter ſe. Nam ducta A B, tangente circulum, *d* erunt quadrato rectæ A B, æqualia ſingula illa rectangula; quare & inter ſe omnia æqualia erunt.



d 36. tertij.

COROLLARIVM II.

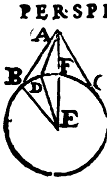


CONSTAT etiam, duas rectas ab eodem puncto ductas, quæ circulum tangant, inter ſe eſſe æquales. Ducantur enim ex A, rectæ A B, A C, tangentes circulum; quas dico eſſe æquales inter ſe. Ducta enim recta A D, quæ circulum ſecet in E, erit tam quadratum rectæ A B, quàm quadratum rectæ A C, *e* æquale rectangulo ſub A D, A E. Quare quadrata rectarum A B, A C, inter ſe æqualia erunt, ac propterea rectæ A B, A C, æquales quoque erunt.

e 36. tertij.

COROLLARIVM III.

PERSPICVVM quoque eſt, ab eodem puncto extra circulum aſſumpto, duci tantùm poſſe duas lineas, quæ circulum tangant. Si enim præter duas A B, A C, duci poſſit tertia A D, circulum eundem tangens; ductis rectis E B, E D, ex centro E, *f* erunt anguli A B E, A D E, recti, ideoque æquales; quod eſt abſurdum. Nam ſi ducatur recta A E, *g* erit angulus A D E, maior angulo A B E.



f 18. tertij.

g 21. primi.

ALITER. Si tertia A D, circulum etiam tangat, erunt duæ tangentes A B, A D, æquales, vt oſtenſum eſt; quod eſt abſurdum. Ducta namque recta A E, ad centrum E, quæ circulum ſecet in F, *h* erit A D, cùm ſit propinquior minimæ A F, minor, quàm A B, quæ à minima A F, remotior eſt. Vel ſic. Si A B, A D, ſunt æquales, additis æqualibus E B, E D, erunt quoque A B, B E, ipſis A D, D E, æquales. quod eſt abſurdum. *i* Sunt enim maiores A B, B E. Solùm igitur duæ rectæ ducentur à puncto A, quæ circulum tangant: Quod eſt propoſitum.

h 8. tertij.

i 21 primi.

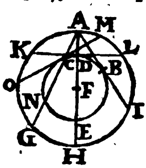
COROLLARIVM IV.

ILLVD denique conſtat etiam, ſi duæ rectæ æquales ex puncto quopiam in conuexam peripheriam incidant, & earum vna circulum tangat, alteram quoque circulum tangere. Vt ſi duæ rectæ A B, A C, in antecedente figura ſint æquales, & A C, tangat circulum in C, tanget quoque A B, eundem circulum in B. Si enim non tangat, ducatur A D, tangens, (ſemper enim duæ tangentes ab eodem puncto duci poſſunt, vt conſtat ex ſcholio propoſ. 31. huius lib. eruntq; ex 2. coroll. A C, A D, æquales. Cùm ergo & A B, ipſi A C, æqualis ponatur, ducentur tres rectæ æquales A B, A C, A D, quod eſt abſurdum. a Duæ enim tantùm duci poſſunt. a 8. tertij.

ALITER. Ponantur in figura ſequentis propoſ. duæ rectæ æquales D B, D F, & D B, circulum tangat, in B. Dico & D F, eundem tangere in F. Ductis enim rectis E B, E F, ex centro, erunt duo latera D B, B E, duobus lateribus D F, F E, æqualia, & baſis D E, communis. b Igitur anguli B, F, æquales erunt: c Sed B, rectus eſt. Igitur & F, rectus erit. atque idcirco D F, circulum tanget in F, ex coroll. propoſ. 16. huius lib. b 8 primi. c 18. tertij.

SCHOLIVM.

FACILLIMO negotio propoſitionem hanc per antecedentem propoſitionem demonſtrabimus, hoc modo. Ex puncto A, extra circulum B C D, ducatur tangens A B, & ſecans A E, quæ primùm per centrum F, tranſeat, ſecetq; circumferentiã in D. Dico rectangulum ſub A E. A D, æquale eſſe quadrato ex A B. Deſcripto namque ex F, per A, circulo A K L, producantur A E, A B, vſq; ad H, I; & per D, ad A H, perpendicularis K L, quæ eundem circulum B C D, tanget in D, ex coroll. propoſ. 16 huius lib. Eruntq; ex demonſtratis in ſcholio propoſ. 3. huius lib. A D, H E, æquales, ac proinde, addita communi D E, & A E, H D, æquales erunt. Item ex ſcholio propoſ. 18. huius lib. A I, K L, æquales erunt, ſecabunturq; in B, D, bifariam: ac propterea rectangula ſub A B, B I: & ſub K D, D L, æqualia inter ſe erunt, atq; adeò quadrata, ob æqualitatem rectarum A B, B I; K D, D L. Itaq; quoniam rectangulum ſub H D, D A, hoc eſt, ſub A E, (quæ ipſi H D, oſtenſa eſt æqualis) A D, d *æquale eſt rectangulo ſub K D, K L, hoc eſt, rectangulo ſub A B, B I, ſiue quadrato ex A B, conſtat propoſitum.* d 35. tertij.



SED iam ſecans linea A N, non tranſeat per centrum F, ſecetq; circumferentiam in C. Dico rurſum, rectangulum ſub A N, A C, quadrato ex A B, æquale eſſe. Deſcripto enim rurſus ex F, per A, circulo A K L, producantur A N, A B, vſque ad G, I; & per C, ducatur O M, circulum B C D, tangens. Eruntq; ex ſcholio propoſ. 3 huius lib. A C, G N, æquales, ac proinde, addita communi C N, & A N, G C, æquales erunt. Item ex ſcholio propoſ. 18. huius lib. A I, O M, æquales erũt, ſecabunturq; in B, C, bifariã: ac propterea rectangula ſub

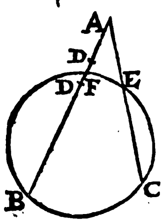
Digitized by Google

AB, BI, & ſub OC, CM, æqualia inter ſe erunt, atq; adeò quadrata, ob æqualitatem rectarum AB, BI; OC, CM. Itaque quoniam rectangulum ſub GC, CA, hoc eſt, ſub AN, (quæ ipſi GC, oſtenſa eſt æqualis) AC, æquale eſt rectangulo ſub OC, CM, hoc eſt, rectangulo ſub AB, BI, ſiue quadrato ex AB; conſtat rurſus id, quod proponebatur.

35. tertij.

PRIMVM etiam corollarium huius propoſ. hoc modo fermè conuertemus.

SI à puncto aliquo binæ lineæ rectæ finitæ egrediantur, quæ ita ſecentur in binas partes, vt rectangula ſub totis, & ſegmentis prope punctum comprehenſa ſint æqualia: deſcribi poterit per extrema puncta aliorum ſegmentorum circulus, hoc eſt, circulus per tria puncta extrema aliorum ſegmentorum deſcriptus, per quartum etiam punctum extremum tranſibit.



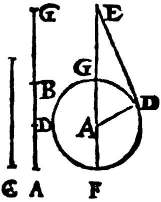
EX puncto enim A, egrediantur duæ rectæ AB, AC, quæ ita ſecentur in punctis D, E, vt rectangula ſub AB, AD, & ſub AC, AE, ſint æqualia. Dico quatuor puncta B, C, E, D, in circumferentiam circuli cadere; hoc eſt, per ea poſſe deſcribi circulum: adeò vt circulus per tria puncta B, C, E, deſcriptus, tranſeat neceſſariò per reliquum etiam punctum D. Deſcribatur enim per tria puncta B, C, E, (vt ad propoſ. 5. lib. 4. docebimus) circulus B CE, qui ſi dicatur non tranſire per quartum punctum D, tranſibit aut citra D, aut vltra, vt per F. Quoniam ergo rectangulum ſub AB, AF, æquale eſt, ex coroll. 1. huius propoſ. rectangulo comprehenſo ſub AC, AE; & rectangulum ſub AB, AD, eidem rectangulo ſub AC, AE, ponitur æquale: erunt rectangula ſub AB, AF, & ſub AB, AD, inter ſe æqualia, pars & totum: quod eſt abſurdum. Tranſibit ergo circulus per punctum D. Quod erat demonſtrandum.

LICEBIT quoque ex demonſtratis hac propoſ. colligere huiuſmodi problema.

DATIS duabus rectis ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, alterutri earum rectam adiungere, vt rectangulum ſub tota compoſita, & adiuncta comprehenſum, quadrato alterius ſit æquale.

SINT datæ duæ rectæ AB, & C, ſitque ipſi AB, minori adiungenda recta, ita vt rectangulum comprehenſum ſub tota compoſita, & adiuncta, æquale ſit quadrato rectæ C, maioris. Diuiſa recta AB,

Digitized by Google



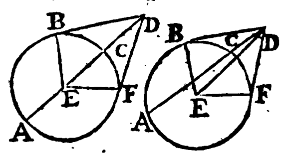
recta A B, biſariam in D, deſcribatur ex quouis centro A, ad interuallum A D, dimidiatæ, circulus D F G, & ad A D, in D, excitetur perpendicularis D E, ipſi C, æqualis, ac denique ex E, per A, centrum recta extendatur E F, ſecans circumferentiam in G. Dico ſi rectæ A B, adiiciatur B G, ipſi E G, æqualis, rectangulum ſub tota A G, & G B, æquale eſſe quadrato rectæ C. Quoniam enim rectangulum ſub F E, E G, a æquale eſt quadrato rectæ E D; (quod E D, circulum tangat in D, ex coroll. propoſ. 16. huius lib.) Eſt autem rectangulum ſub F E, E G, æquale rectangulo ſub A G, G B, (quod rectæ F E, E G, rectis A G, G B, æquales ſint. Sumpta enim eſt G B, ipſi E G, æqualis, & A B, ipſi F G, æqualis poſita eſt,) & quadratum ex E D, quadrato ex C, (ob æqualitatem rectarum E D, & C, ex constructione,) æquale. Igitur & rectangulum ſub A G, G B, quadrato ex C, æquale erit. Quod eſt propoſitum. a 36. tertij.

N O N ſecus propoſitum demonſtrabitur, ſi rectæ C, maiori adiungenda ſit recta, ita ut rectangulum ſub tota compoſita, & adiuncta comprehenſum quadrato rectæ A B, minoris æquale ſit.

THEOR. 31. PROPOS. 37. xxxvj.

SI extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum ſecet, altera in eum incidat; ſit autem, quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum, & conuexam peripheriam aſſumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente deſcribitur, quadrato; Incidens ipſa circulum tanget.

EXTRA circulum A B C, cuius centrum E, punctum ſumatur D, à quo ducatur recta D A, circulum ſecans in C, & recta D B, incidens in circulum ad punctum B; ſitque rectangulum ſub D A, D C, æquale quadrato rectæ D B. Dico D B, circulum tangere in B. b Ducatur enim D F, tangens circulum, & iungantur rectæ E B, E F. Quod ſi D A, ſecans non tranſeat per centrum E, iungatur quoque recta D E. Quoniam b 17. tertij.



igitur rectangulo ſub D A, D C, c æquale eſt quadratum rectæ tangentis D F: Et eidem rectangulo ſub D A, D C, æquale ponitur quadratum rectæ D B: erunt quadrata rectarum D F, D B, inter ſe æqualia, ideoque & rectæ D F, D B, æquales inter ſe erunt. Itaque quia c 36. tertij.

 que quia

Digitized by Google

que quia latera D F, F E, trianguli D F E, æqualia ſunt lateribus D B, B E, trianguli D B E; & baſis D E, communis *a* erunt anguli D F E, D B E, æquales. *b* Atqui angulus D F E, rectus eſt, quod D F, circulum tangat. Igitur & angulus D B E, rectus erit. Quapropter per coroll. propoſ. 16. huius lib. D B, circulum tanget; quod eſt propoſitum. Si ergo extra circulum ſumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonſtrandum.

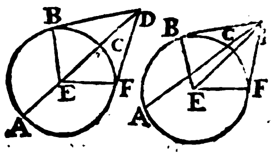
a 8. pri. b 18. tertij.

SCHOLIVM.

EST autem hoc theorema conuerſum præcedentis theorematis, vt perſpicuum eſt.

PLACET hoc loco ſequens etiam theorema demonſtrare.

SI à puncto extra circulum dato duæ lineæ rectæ circulum tangentes ducantur, aut duæ lineæ vſque ad conuexam peripheriam inter ſe æquales; Linea recta ab eodem puncto per centrum circuli eiecta angulum ab eis comprehenſum diuidit bifariam: Et contra, Linea recta angulum ab eis comprehenſum diuidens bifariam, per centrum circuli tranſibit.



IN priori figura huius propoſ. duæ rectæ D B, D F, circulum A B C F, tangant in B, F, punctis, quæ ex 2. coroll. præcedentis propoſ. æquales erũt: Vel ducantur quæcunq; duæ æquales D B, D F. Et per centrum E, ducatur recta linea D E A. Dico angulum B D F, ſectum eſſe bifariam à recta D A. Cum enim iunctis rectis E B, E F, duo latera B D, D E, duobus lateribus F D, D E, æqualia ſint, baſiſque E B, baſi E F, æqualis; c erunt duo anguli ad D, inter ſe æquales. Quod eſt propoſitum.

c 8. primi.

DIVIDAT iam recta D A, angulum B D F, bifariam. Dico rectam D A, per centrum tranſire. Si enim in D A, non eſt centrum, ſit extra ipſam centrum E, iungaturque recta E D, vt in poſteriori figura huius propoſ. Ergo, vt demonſtratum eſt, recta E D, angulum B D F, bifariam diuidet; ac propterea anguli B D A, B D E, cum ſint dimidiatæ partes anguli B D F, æquales inter ſe erunt, pars, & totum; quod eſt abſurdum. Tranſit ergo recta D A, per centrum. Quod demonſtrandum erat.

EVCLI-

Digitized by Google

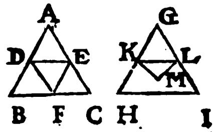
EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVM.

DEFINITIONES.

I.

FIGVRA rectilinea in figura rectilinea inſcribi dicitur, cum ſinguli eius figuræ, quæ inſcribitur, anguli ſingula latera eius, in qua inſcribitur, tangunt.

AGENS Euclides quarto hoc libro de variis inſcriptionibus figurarum rectilinearum in circulo, & earundem circa circulum deſcriptionibus: Item de inſcriptionibus circuli in eiſdem figuris, & circuli deſcriptionibus circa eaſdem: exponit paucis definitionibus, quid ſit figuram in figura inſcribi, aut circa figuram deſcribi, incipiens à rectilineis figuris. Si igitur anguli D, E, F, trianguli interni D E F, tangant latera A B, A C, B C, trianguli externi A B C; dicetur triangulum D E F, in triangulo A B C, eſſe inſcriptum. At quoniam angulus M, trianguli K L M, non tangit latus H I, trianguli G H I, non dicetur triangulum K L M, inſcribi in triangulo G H I; quamuis totum illud ſit intra hoc, duoque anguli K, L, tangant duo latera G H, G I.



II.

SIMILITER & figura circum figuram deſcribi dicitur, cum ſingula eius, quæ circumſcribitur, latera ſingulos eius figuræ angulos tetigerint, circum quam illa deſcribitur.

E con-

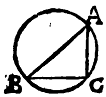
E contrario dicetur triangulum A B C, deſcribi circa triangulum D E F; quoniam ſingula latera illius ſingulos huius angulos tangunt; At triangulum G H I, non dicetur deſcriptum eſſe circa triangulum K L M, propterea quòd latus illius H I, angulum huius M, non tangit. Idem intelligendum eſt de inſcriptionibus, ac circumſcriptionibus aliarum figurarum rectilinearum.

CÆTERVM propriè figura rectilinea dicuntur in figuris rectilineis deſcribi, & circa eaſdem deſcribi, quando inſcripta, & circumſcripta habent latera numero æqualia, & angulos numero æquales: quamuis hoc non ſit omnino neceſſarium, cum & quadratum intra triangulum deſcribi poſſit, vt ad finem lib. 6. docebimus.

III.

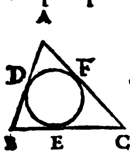
FIGVRA rectilinea in circulo inſcribi dicitur, cum ſinguli eius figuræ, quæ inſcribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.

VT ſi tangant anguli A, B, C, trianguli A B C, peripheriam circuli A B C, dicetur triangulum in circulo eſſe inſcriptum. Quod ſi vel vnus tantum angulorum non tangeret peripheriam, non diceretur triangulum eſſe inſcriptum in circulo.



IV.

FIGVRA verò rectilinea circa circulum deſcribi dicitur, cum ſingula latera eius, quæ circumſcribitur, circuli peripheriam tangunt.



AT verò, ſi latera trianguli A B C, ſingula tangant peripheriam circuli D E F; dicetur triangulum circa circulum eſſe deſcriptum.

V.

SIMILITER & circulus in figura rectilinea inſcribi dicitur, cum circuli peripheria ſingula latera tangit eius figuræ, cui inſcribitur.

VI.

CIRCVLVS autem circum figuram deſcribi dicitur, cum circuli peripheria ſingulos tangit eius figuræ, quam circumſcribit, angulos.

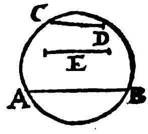
VICISSIM dicetur circulus D E F, in figura definitionis 4. inſcriptus eſſe in triangulo A B C: At verò circulus A B C, in figura definitionis

Digitized by Google

finitionis 3. deſcriptus eſſe circa triangulum A B C. Idem iudicium habeto de aliis figuris rectilineis, quæ in circulo dicuntur inſcribi, vel circa eundem deſcribi; Aut in quibus circulus dicitur inſcribi, vel circa quas deſcribi circulus dicitur.

VII.

RECTA linea in circulo accommodari, ſeu coaptari dicitur, cum eius extrema in circuli peripheria fuerint.

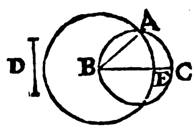


VT recta linea A B, quoniam eius extrema A, & B, in peripheria circuli A B C, exiſtunt, coaptata, ſeu accommodata in dicto circulo eſſe dicetur: Non autem recta E, vel C D; quia hæc alterum duntaxat extremorum, nempe C, habet in peripheria circuli; Illa verò neutrum.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

2

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro nõ ſit maior.



IN circulo A B C, coaptanda ſit recta linea æqualis rectæ lineæ datæ D, quæ tamen maior non ſit diametro circuli dati. Cum enim diameter *a* ſit omnium rectarum in circulo maxima, ſi data recta diametro maior foret, non poſſet in circulo aptari illi vna æqualis. Ducatur ergo diameter B C. Itaque ſi data recta D, æqualis fuerit diametro, aptata erit B C, illi æqualis: Si verò D, minor fuerit diametro, *b* abſcindatur B E, æqualis ipſi D, & centro B, interuallo autem B E, circulus deſcribatur E A, ſecans circulum A B C, in A. Ducta igitur recta B A, erit ea aptata in circulo A B C, æqualis datæ rectæ D. *c* Eſt enim B A, æqualis ipſi B E; & D, æqualis eidem B E, per conſtructionem. Quare A B, & D, inter ſe æquales quoque erunt. In dato ergo circulo rectam lineam accommodauimus, &c. Quod faciendum erat.

a 15. *tertij.*

b 3. *primi.*

c 15. *defin. primi.*

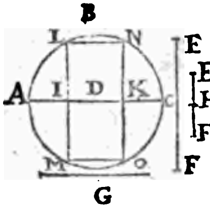
EX FEDERICO COMMANDINO.

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non ſit maior, & alteri datæ parallelam.

IN dato circulo A B C, cuius centrum D, accommodanda ſit recta æqualis rectæ E F, quæ diametro maior non ſit, & alteri rectæ G, parallela. d *Ducatur per centrum D, diameter A C, rectæ G, parallela. Quod ſi recta E F, diametro fuerit æqualis, factum iam erit, quod*

d 31. *primi.*

propoſi-

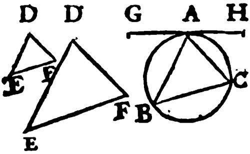


proponitur. Si verò E F, diametro minor fuerit, ſecta ea bifariam in H, abſcindatur D I, ipſi H E, & D K, ipſi H F, æqualis, & tota I K, toti E F, ſit æqualis. a 11. pri. a *Et per I, K, ad angulos rectos ipſi A C, ducantur L M, N O; iungaturque L N. Dico L N, accommodatam eſſe æqualem ipſi E F, & ipſi G, parallelam. Cum enim L M, N O,*
b 14. tertij. *æqualiter à centro diſtent,* b *ipſæ æquales inter ſe erunt:* c *quæ cum diuidantur bifariam in I, & K, quod ad angulos rectos ſecentur à re-*
c 3. tert. *cta A C, per centrum D, tranſeunte; erunt & earum ſemiſſes L I, N K,*
d 28. primi. *æquales.* d *Quia verò L I, N K, parallelæ etiam ſunt;* e *erunt quoque L N, I K, æquales, & parallelæ. Quare cum I K, æqualis ſit ipſi E F,*
e 33. primi. *& parallela ipſi G. Erit etiam L N, æqualis ipſi E F,* f *& ipſi G, parallela. Eadem ratione, ſi recta ducatur M O, erit ea æqualis ipſi E F,*
f 30. primi. *& parallela ipſi G. Quod eſt propoſitum.*

ij.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

IN dato circulo triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum.



SIT in circulo A B C, dato deſcribendum triangulum æquiangulum triangulo dato cuicunque D E F. Ducatur recta G H, tangens circulum in A, fiatque angulus G A B, angulo F, æqualis, & angulus H A C angulo E, atque extendantur rectæ A B, A C, ad circumferentiam vſque in puncta B, & C, coniungaturque recta B C. Non cadet autem recta A C, in rectam A B, vel inter rectas A B, A G: propterea quod an-
g 17. primi. guli G A B, H A C, hoc eſt, anguli F, E, *g* minores ſunt duobus rectis. *h* Eſſent autem duobus rectis æquales, ſi A C, in A B, caderet;
h 13. primi. vel maiores duobus rectis, ſi inter A B, A G, cadere. Dico triangulum A B C, circulo dato inſcriptum, eſſe æquiangulum dato
i 32. ter. triangulo D E F. Eſt enim angulus C, *i* æqualis angulo G A B; & eidem angulo G A B, æqualis eſt angulus F, ex conſtructione. Quare anguli C, & F, inter ſe quoque erunt æquales. Similiter quia
k 32. tertij. angulus B, *k* æqualis eſt angulo H A C; & eidem angulo H A C, æqualis eſt, per conſtructionem, angulus E, erunt etiam anguli B, & E, inter ſe æquales. Cum igitur duo anguli B, & C, trianguli
l 32. primi. A B C, æquales ſint duobus angulis E, & F, trianguli D E F, *l* erunt quoque reliqui anguli A, & D, æquales. Æquiangulum eſt ergo triangulum A B C, triangulo D E F. Quare in dato circulo triangulum deſcripſimus, &c. Quod faciendum erat.

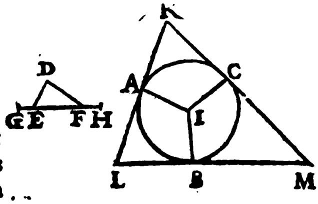
PROBL.

Digitized by Google

PROBL. 3. PROPOS. 3. iij.

CIRCA datum circulum triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum.

CIRCA circulum datum A B C, deſcribendum ſit triangulum æquiangulum dato triangulo D E F. Producto latere E F, vtrinque ad G, & H. ſumptoq; centro circuli I, ducatur recta vtcunque A I, & fiat angulus A I B, æqualis angulo D E G, & angulus B I C, angulo D F H. Deinde ex A, B, C, educantur ad A I, B I, C I, perpendiculares K L, L M, M K, quæ circulum



tangent in punctis A,B,C, per coroll. propoſ. 16. lib. 3. coibuntque in punctis K,L,M. Si enim duceretur recta A C, fierent duo anguli K A C, K C A, duobus rectis minores, ac proinde A K, C K, coibunt, &c. Nam recta hæc ducta A C, caderet ſupra rectas A I, C I, quod hæ angulum conſtituant in L. Cum enim ſpatium circa I, æquale ſit quatuor rectis, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. hoc eſt, quatuor angulis ad E, & F, ſintque duo anguli A I B, C I B, duobus angulis D E G, D F H, æquales; erit reliquum ſpatium A I C, reliquis duobus angulis D E F, D F E, æquale: Sed *a* hi minores ſunt duobus rectis. (a 17. primi.) Igitur & ſpatium A I C, minus erit duobus rectis, ac proinde angulus erit A I C. Alias ſpatium illud eſſet vel æquale duobus rectis, ſi nimirum A I, C I, vnam rectam lineam conſtituerent; vel maius duobus rectis, ſi recta A I, producta caderet ſupra I C. Cadit igitur neceſſario A I, producta infra C I, atque idcirco angulus fiet A I C, ad partes K, & ducta recta A C, faciet cum A K, C K, duos angulos minores duobus rectis ideoque rectæ A K, C K, coibunt in K. Non ſecus oſtendemus, A L, B L, coire in L, & C M, B M, in M: quia ductæ rectæ A B, B C, facient cum A L, B L, C M, B M, angulos minores duobus rectis. Deſcriptum eſt igitur circa circulum triangulum K L M, quod dico eſſe æquiangulum triangulo D E F. Quoniam enim omnes anguli in quadrilatero A I B L, æquales ſunt quatuor rectis, vt ad 32. propoſ. lib. 1. oſtenſum fuit, & anguli I A L, I B L, ſunt duo recti, erunt reliqui A I B, & L, duobus rectis æquales. Cum igitur *b* & anguli D E G, D E F, ſint duobus rectis æquales; (b 13. primi.) ſi auferantur æquales A I B, D E G, remanebit angulus L, angulo D E F, æqualis. Pari ratione oſtendemus angulum M, æqualem eſſe angulo D F E. *c* Reliquus igitur angulus K, reliquo angulo D, æqualis erit; atque idcirco triangulum K L M, æquiangulum triangulo D E F. (c 32. primi.) Circa datum ergo circulum, &c. Quod efficiendum erat.

PROBL.

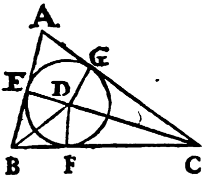
Digitized by Google

IV.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN dato triangulo circulum inſcribere.

SIT deſcribendus circulus in dato triangulo A B C. Diuiſis duobus angulis A B C, A C B, biſariam rectis B D, C D, quæ intra triangulum coëant in D, ducantur ex D, ad tria latera, perpendiculares D E, D F, D G. Quoniam igitur duo anguli D B E, D E B, trianguli D B E, æquales ſunt duobus angulis D B F, D F B, trianguli D B F, vterque vtrique; & latus B D, commune; a erunt quoque latera D E, D F, æqualia. Eademque ratione æqualia erunt latera D F, D G, in triangulis D C F, D C G. Cum igitur tres rectæ D E, D F, D G, ſint æquales; circulus ex D, ad interuallum D E, deſcriptus tranſibit per reliqua puncta F, & G; tangetque latera trianguli in E, F, G, per coroll. propoſ. 16. lib. 3. quod latera perpendicularia ſint ad ſemidiametros D E, D F, D G. In dato ergo triangulo circulum deſcripſimus. Quod erat efficiendum.



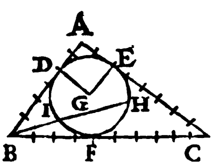
a 26 primi.

SCHOLIVM.

b 20. primi. *VERVM quoniam Euclides lib. 1. demonſtrauit; b in omni triangulo duo latera quomodolibet aſſumpta reliquo eſſe maiora; non abs re fuerit demonſtrare hoc loco, cum Io. Baptiſta Benedicto, quanto maiora ſint, hoc propoſito theoremate.*

IN omni triangulo, ſi circulus inſcribatur, duo quælibet latera ſuperant reliquum recta linea, cuius quadratum quadruplum eſt rectanguli comprehenſi ſub recta ab angulo illis lateribus comprehenſo in cauam peripheriam ducta, & ſub eius ſegmento exteriore. Quod ſi angulus comprehenſus ſit rectus ſuperabunt illa duo latera latus recto angulo oppoſitum diametro circuli triangulo inſcripti.

c 4. quar. *SIT triangulum A B C, c cui circulus inſcribatur D E F, tangens latera trianguli in D, E, F, punctis: & à quouis angulo B, ſiue rectus is ſit, ſiue obtuſus, ſiue acutus, ducatur recta B H, ſecans circulum in I. Dico duo latera B A, B C, ſuperare latus A C, recta linea, cuius quadratum quadruplum eſt rectanguli ſub B H, B I, comprehenſi. Quoniam enim per coroll. 2. propoſ. 36. lib. 3. recta C F, rectæ C E, & recta A D, rectæ A E, æqualis eſt, erunt duæ rectæ F C, D A, lateri A C, æquales. Latera*



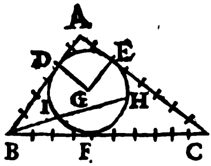
igitur

igitur B A, B C, latus A C, ſuperant ſegmentis B D, B F: quæ cum ex eodem coroll. ſint æqualia; ſuperabunt eadem latera B A, B C, latus A C, recta, quæ dupla eſt ſegmenti B D. Sed quadratum rectæ, quæ dupla eſt ſegmenti B D, quadruplum eſt quadrati rectæ B D, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Et a quadratum rectæ B D, æquale eſt rectangulo ſub B H, B I. Igitur latera B A, B C, ſuperant latus A C, recta, cuius quadratum quadruplum eſt rectanguli ſub B H, B I. Quod eſt propoſitum. a 36. tertij.

QVOD ſi angulus A, rectus ſit, dico non ſolum duo latera A B, A C, ſuperare latus B C, recta, cuius quadratum quadruplum eſt rectanguli comprehenſi ſub recta ex A, in cauam peripheriam ducta, & eius ſegmento exteriore, vt oſtenſum eſt: verum etiam exceſſum illum eſſe diametro circuli D E F, æqualem. Ductis enim ex centro G, ad puncta contactuum D, E, rectis G D, G E; b erunt anguli ad D, & E, recti. Cum ergo & angulus A, ponatur rectus, c erunt tam rectæ A E, D G, quam A D, E G, parallelæ inter ſe: atque idcirco A G, parallelogrammum erit. d Quare tam recta A D, ſemidiametro E G, quàm recta A E, ſemidiametro D G, æqualis erit: hoc eſt, duæ rectæ A D, A E, ſimul toti diametro circuli erunt æquales. Superant autem duo latera A B, A C, latus B C, duabus rectis A D, A E, vt oſtenſum eſt. Nam E C, ipſi F C, & D B, ipſi F B, æqualis eſt, ex coroll. 2. propoſ. 36. lib. 3. Igitur eadem latera A B, A C, ſuperant latus B C, diametro circuli inſcripti. Quod eſt propoſitum. b 18. tertij. c 28. primi. d 34. primi.

ITAQVE quæuis duo latera ſuperant reliquum duabus rectis circulum triangulo inſcriptum tangentibus, quæ inter angulum duobus illis lateribus comprehenſum, & circulum interijciuntur. Oſtenſum enim eſt, latera A B, A C, ſuperare latus B C, rectis tangentibus A D, A E, &c.

IAM verò his ita demonſtratis, ſi tria latera trianguli cognita ſint, inueniemus nullo negotio tria puncta, in quibus circulus triangulo inſcribendus latera tangere debet. Quia enim latera, verbi gratia, A B, A C, ſuperare debent latus B C, duabus tangentibus ex A, ductis, quæ quidem æquales ſunt: ſi dematur latus B C, notum ex notis lateribus A B, A C, relinquentur duæ tangentes A D, A E, notæ. Semiſſis ergo huius exceſſus dabit vtrumq; punctum D, E. Reliquum deinde ſegmentum E C, dabit ſegmentum C F, vſque ad punctum tertium F: Vel reliquum ſegmentum D B, dabit ſegmentum B F, ad idem punctum F. Si igitur ex duobus punctis D, E, erigantur perpendiculares D G, E G, coibunt hæ in G, centro circuli inſcribendi. Exempli gratia. Sit latus A B, 6. latus A C, 8. & latus B C, 10. palmorum. Dempto latere B C, 10. palmorum ex duobus lateribus A B, A C, hoc eſt, ex 14. palmis, relinquuntur 4. palmi. Tam ergo A D, quàm A E, duos palmos continebit. Segmentum ergo D B, continebit 4 palmos, totidemq; ſegmentum B F, habebit. Segmentum autem

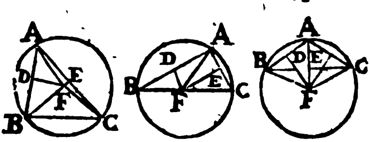


E C, ac proinde & C F, erit 6. palmorum. Sic etiam dempto latere A B, 6. palmorum, ex lateribus A C, B C, id eſt, ex 18. palmis, reliqui fiunt 12. palmi. Vtrumque ergo ſegmentum C E, C F, erit 6. palmorum: ac proinde vtrumque A E, A D 2. palmorum, & vtrumque B D, B F, 4. palmorum. Poſtremo dempto latere A C, 8. palmorum ex lateribus A B, C B, hoc eſt, ex palmis 16. remanent 8. palmi. Vtrumque ergo ſegmentum B D, B F, habebit 4. palmos: At vtrumque C F, C E, 6. palmos: & vtrumque A D, A E, 2. palmos.

v. PROBL. 5. PROPOS. 5.

CIRCA datum triangulum circulum deſcribere.

SIT circulus deſcribendus circa datum triangulum A B C. Diuidantur duo latera A B, A C, (quæ in triangulo rectangulo, vel obtuſangulo ſumenda ſunt facilitatis gratia, circa rectũ, vel obtuſum angulũ, quamuis hoc non ſit omnino neceſſarium, ſed



duo quæuis latera bifariam poſſint ſecari) bifariam in D, & E, punctis, ex quibus educantur D F, E F, perpendiculares ad dicta latera, coeuntes in F, (Quod enim coeant, patet. Nam ſi ducta eſſet recta D E, fierent anguli F D E, F E D, duobus rectis minores.) eritque F, vel intra triangulum, vel in latere B C, vel extra triangulum. Ducantur rectæ F A, F B, F C. Quoniam igitur latera A D, D F, trianguli A D F, æqualia ſunt lateribus B D, D F, trianguli B D F, & anguli ad D, recti; *a* erunt baſes F A, F B, æquales. Eodem modo erunt F A, F C, æquales. Cum ergo tres rectæ F A, F B, F C, ſint æquales, circulus deſcriptus ex F, ad interuallum F A, tranſibit quoque per puncta B, & C. Circa datum ergo triangulum circulum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

a 4. pri.

COROLLARIVM.

HINC manifeſtum eſt, ſi centrum intra triangulum cadat, *b* omnes angulos eſſe acutos, quoniam omnes ſunt in maiori ſegmento circuli: ſi verò ſit in latere B C, *c* angulum B A C, ei lateri oppoſitum, eſſe rectum, quod ſit in ſemicirculo: Si denique cadat extra triangulum, *d* angulum oppoſitum B A C, obtuſum eſſe, cum ſit in minori ſegmento circuli.

b 31. ter tij. *c 31. ter.* *d 31. ter tij.*

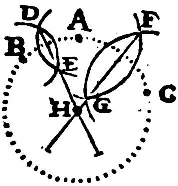
CONTRA verò perſpicuum eſt, ſi triangulum fuerit acutangulum, cadere intra triangulum: ſi rectangulum, in latus recto angulo oppoſitum: ſi denique obtuſangulum fuerit, extra triangulum. Quod quidem facile oſtendetur, ducendo ad incommodum aliquod, ſiue abſurdum. Quia ſi in acutangulo caderet centrum in vnum latus, eſſet angulus ei oppoſitus

Digitized by Google

poſitus rectus: ſi vero extra, eſſet idem angulus obtuſus. Item ſi in rectangulo centrum caderet intra, eſſent omnes anguli acuti, ſi vero extra, eſſet angulus oppoſitus obtuſus. Denique ſi in triangulo obtuſangulo caderet in vnum latus, eſſet angulus ei oppoſitus, rectus, ſi vero intra, omnes anguli eſſent acuti. Quæ omnia ex priori parte huius coroll. colliguntur, & pugnant cum hypotheſi.

SCHOLIVM.

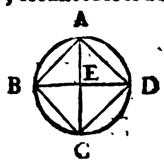
COLLIGITVR etiam ex hoc problemate, quanam arte deſcribendus ſit circulus, qui per data tria puncta non in vna recta linea exiſtentia tranſeat. Nam ſi data puncta tribus rectis iungantur, vt conſtituatur triangulum, facilè circa ipſum circulus deſcribetur, vt hac propoſ. traditum eſt. Quod tamen facilius efficietur praxi illa, quam tradidimus propoſ. 25. lib. 3. Sint enim data tria puncta A, B, C. Ex A, & B, quouis interuallo eodem duo arcus deſcribantur ſe interſecantes in D, & E, punctis, per quæ recta linea ducatur D H. Item ex A, & C, quouis alio interuallo eodem, vel etiam, ſi placet, priori illo, alij duo arcus delineentur ſecantes ſeſe in F, & G, punctis, per quæ recta ducatur F H, ſecans rectam D H, in H. Dico H, eſſe centrum circuli tranſeuntis per data puncta A, B, & C. Nam ſi ducerentur rectæ A B, A C, B C, diuiderentur latera A B, A C, trianguli A B C, bifariam à rectis D H, F H, ceu demonſtratum eſt in praxi illa propoſitionis 25. lib. 3. Quare vt in hoc 5. problemate Euclides oſtendit, H, erit centrum circuli circa triangulum A B C, deſcripti. Quod eſt propoſitum.



PROBL. 6. PROPOS. 6. vj.

IN dato circulo quadratum deſcribere.

SIT in dato circulo A B C D, cuius centrum E, inſcribendum quadratum. Ducantur duæ diametri A C, B D, ſecantes ſe ſe ad angulos rectos in centro E, & iungantur rectæ A B, B C, C D, D A. Dico A B C D, eſſe quadratum inſcriptum in dato circulo. Nam quia latera E A, E B, trianguli A E B, æqualia ſunt lateribus E C, E B, trianguli C E B, cum omnia ſint ex centro; & anguli contenti ſunt recti; *a* erunt baſes A B, B C, æquales. Eadem ratione æquales erunt rectæ B C, C D: Item rectæ C D, D A, & rectæ D A, A B. Omnia igitur latera quadrilateri A B C D, æqualia inter ſe ſunt. Quod breuius ita concludemus. Quoniam quatuor anguli ad E, æquales ſunt, nimirum recti; *b* erunt quatuor arcus, quibus inſiſtunt, æquales: *c* ac proinde & rectæ quatuor ſubtenſæ æquales erunt. Omnia ergo latera quadrilateri A B C D, inter ſe æqualia



a 4. *primi.*
b 26. *tertij.*
c 29. *tertij.*

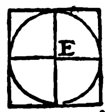
Digitized by Google

a 31. tertij. ſunt. Sunt autem *a* & anguli recti, cum omnes in ſemicirculis exiſtant. Quare quadratum erit A B C D, proptereaque in dato circulo quadratum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

vij. PROBL. 7. PROPOS. 7.

CIRCA datum circulum quadratum deſcribere.

SIT circa datum circulum A B C D, cuius centrum E, deſcribendum quadratum. Ducantur duæ diametri A C, B D, ſecantes ſe in E, centro ad angulos rectos; & per A, B, C, & D, educatur ad diametros lineæ perpendiculares F G, F H, H I, I G, coeuntes in punctis F, H, I, G. Quod enim coeant A F, B F, patet ex eo, quod ducta recta A B, faciat cum A F, BF, duos angulos duobus rectis minores; atque ita de reliquis. Dico F H I G, eſſe quadratum circa circulum datum deſcriptum. Cum enim

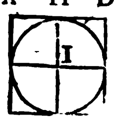


b 28. primi. anguli A E B, F B E, ſint recti, *b* erunt F H, A C, parallelæ; ſimiliterque erunt G I, A C, parallelæ. c 28 primi. *c* Quare & F H, G I, parallelæ erunt. Eodem modo parallelæ erunt F G, H I. Quoniam igitur parallelogrammum eſt d 38. primi. A C H F, *d* erunt latera oppoſita A C, F H, æqualia, & anguli oppoſiti A C H, A F H, æquales: Sed A C H, eſt rectus. Igitur A F H, rectus erit. Eadem ratione oſtendemus angulos H, I, G, rectos eſſe: & latera H I, I G, G F, æqualia eſſe diametris B D, A C. Quare cum diametri ſint æquales, erunt & quatuor latera F G, F H, H I, I G, æqualia, ideoque F G I H, quadratum erit; cuius quidem latera circulum tangunt, per corollarium propoſ. 16. lib. 3. Circa datum igitur circulum quadratum deſcripſimus. Quod erat efficiendum.

viij. PROBL. 8. PROPOS. 8.

IN dato quadrato circulum deſcribere.

SIT in dato quadrato A B C D inſcribendus circulus. Diuiſis lateribus bifariam in E, F, G, H, ducantur rectæ E G, F H, ſecantes ſe in I. Quoniam igitur A D, B C, rectæ æquales ſunt, & parallelæ, erunt & dimidiæ earum A H, B F, æquales & parallelæ. *e* Quare & A B, parallela eſt, & æqualis ipſi F H. Eadem ratione erit D C, parallela, & æqualis eidem F H: Itemque rectæ A D, B C, parallelæ erunt, & æquales ipſi E G. Sunt igitur parallelogramma A I, I B, C I, I D, ideoque rectæ I E, I F, I G, I H, æquales erunt rectis A H, E B, D H, A E: Sunt autem hæ inter ſe æquales, cum ſint ſemiſſes æqualium A D, A B, &c. Quare & rectæ I E, I F, I G, I H, æquales erunt, ac propterea circulus deſcriptus ex I, ad



e 33. primi.

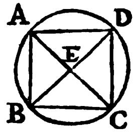
interual-

interuallum I E, tranſibit quoque per puncta F, G, H, qui cum contingat latera A B, B C, C D, D A, per coroll. propoſ. 16. lib. 3. *a* quod anguli ad E, F, G, H, ſint recti, deſcriptus erit in quadrato A C. In dato ergo quadrato circulum deſcripſimus. Quod efficiendum erat. *a 29. primi.*

PROBL. 9. PROPOS. 9. IX.

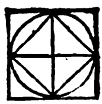
CIRCA datum quadratum circulum deſcribere.

SIT deſcribendus circulus circa quadratum A B C D. Ducantur diametri A C, B D, ſecantes ſe in E. Quoniam igitur latera A B, A D, trianguli A B D, æqualia ſunt, *b* erunt anguli A B D, A D B, æquales: Eſt autem angulus B A D, rectus. *c* Quare A B D, A D B, ſemirecti erunt. Similiter oſtendemus, reliquos omnes angulos ad A, B, C, D, eſſe ſemirectos, & idcirco inter ſe æquales. Cum ergo anguli E A D, E D A, ſint æquales; *d* erunt rectæ E A, E D, æquales. Eadem ratione E A, E B, æquales erunt; nec non E B, E C. Item E C, E D. Quare circulus ex E, deſcriptus, interuallo E A, tranſibit per reliqua puncta B, C, D. Circa datum ergo quadratum circulum deſcripſimus. Quod erat faciendum. *b 5. pri. c 32. primi. d 6. pri.*



SCHOLIVM.

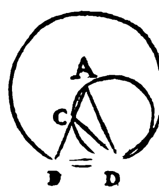
QVOD ſi circa datum circulum deſcribatur quadratum, & in eodem circulo aliud quadratum inſcribatur, erit quadratum circumſcriptum quadrati inſcripti duplum. Quoniam enim latus quadrati circumſcripti æquale eſt diametro circuli, vt ex 7. propoſ. huius lib. conſtat, hoc eſt, diametro quadrati inſcripti: quadratum verò diametri duplum eſt quadrati, cuius eſt diameter, vt ad 47. propoſ. lib. 1. oſtendimus; Conſtat propoſitum.

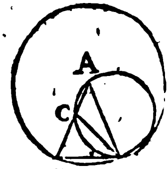


PROBL. 10. PROPOS. 10. X.

ISOSCELES triangulum conſtituere; quod habeat vtrumque eorum, qui ad baſin ſunt, angulorum, duplum reliqui.

SVMATVR quæuis recta linea A B, quæ *e* diuidatur in C, ita vt rectangulum ſub A B, B C, æquale ſit quadrato rectæ A C. Deinde centro A, interuallo vero A B, circulus deſcribatur, in quo *f* accommodetur recta B D, æqualis ipſi A C, iungaturq́; recta A D. Quoniam autem rectæ A B, A D, æquales ſunt, erit *e 11. ſecundi. f 1. quarti.*





triangulum A B D, Iſoſceles. Dico vtrumque angulorum A B D, A D B, duplum eſſe reliqui anguli A. Ducta enim recta C D, *a* deſcribatur circa triangulum A C D, circulus D C A. Quoniam igitur rectangulum ſub A B, B C, æquale eſt quadrato rectæ B D, & recta A B, ſecat circulum D C A, *b* tanget recta B D, eundem circulum D C A, in D. Quare angulus B D C, *c* æqualis eſt angulo A, in alterno ſegmento C A D. Addito igitur communi C D A, erit totus angulus A D B, æqualis duobus angulis C A D, C D A: Sed his eiſdem *d* æqualis eſt etiam angulus externus B C D. Angulus ergo B C D, æqualis erit angulo A D B, hoc eſt, angulo A B D, *e* cum A B D, A D B, æquales ſint; ac propterea *f* rectæ C D, B D, æquales erunt: Eſt autem B D, æqualis poſita rectæ A C. Igitur & C D, ipſi C A, æqualis erit; *g* ac propterea anguli C A D, C D A, æquales. Angulus igitur A D B, qui æqualis oſtenſus eſt duobus angulis C A D, C D A, duplus erit alterius eorum, anguli nimirùm A. Quare & angulus A B D, duplus erit eiuſdem anguli A. Iſoſceles ergo triangulum conſtituimus, habens, &c. quod erat efficiendum.

a 5. quarti. *b* 37. tertij. *c* 32. tertij. *d* 32. primi. *e* 5. pri. *f* 6. pri. *g* 5. pri.

COROLLARIVM.

QVONIAM verò tres anguli trianguli A B D, *h* æquales ſunt duobus rectis, hoc eſt, quinque quintis duorum rectorum; perſpicuum eſt, angulum A, eſſe quintam partem duorum rectorum; vtrumlibet autem B, D, duas quintas partes. Item A, eſſe duas quintas partes vnius recti, & vtrumuis B, D, quatuor quintas partes; quandoquidem omnes tres *i* æquales ſunt duobus rectis, hoc eſt, decem quintis vnius recti.

h 32. primi. *i* 32. pri.

SCHOLIVM.

POTVISSET problema hoc proponi ad inſtar theorematis, hoc modo.

SI recta linea ſecetur, vt propoſ. 11. lib. 2. traditum eſt; Iſoſceles triangulum, cuius baſis maiori ſegmento æqualis eſt, vtrumuis verò laterum æqualium ipſi datæ lineæ æquale, habet vtrumlibet angulorum æqualium ad baſim, duplum reliqui.

NON eſt autem, quod ſe excrucient Campanus, & Peletarius, vt probent, rectam B D, ita applicari circulo D C A, vt eum nullo modo ſecet. Nam propterea quod quadratum rectæ B D, æquale eſt rectangulo ſub A B, B C, oſtenſum eſt vltima propoſ. 3. lib. rectam B D, perpendicularem eſſe ad ſemidiametrum circuli ex D, ductam. Quare circulum tanget, & nulla ratione ſecabit.

QVA arte autem conſtrui debeat triangulum Iſoſceles, cuius vterus angulorum ad baſim, ad reliquum habeat quamcunque proportio-

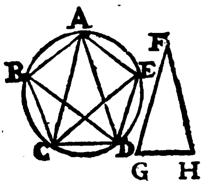
Digitized by Google

portionem datam, non ſolum duplam, vt hic ab Euclide factum eſt, trademus cum Pappo ad finem lib. 6. Quæ res hactenus deſiderata eſt.

PROBL. 11. PROPOS. 11. xj.

IN dato circulo, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inſcribere.

SIT in dato circulo ABCDE, inſcribendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. *a* Conſtruatur triangulum Iſoſceles FGH, ita vt vterque angulorum G, H, duplus ſit reliqui F, & in circulo *b* inſcribatur triangulum ACD, æquiangulũ triangulo FGH, & vterque angulorum ACD, ADC, *c* biſariam diuidatur rectis CE, DB, atque rectæ iungantur AB, BC, CD, DE, EA. Dico pentagonum ABCDE, in circulo dato inſcriptum, eſſe æquilaterum, & æquiangulum. Cum enim vterque angulorum ACD, ADC, duplus ſit anguli CAD, & diuiſis biſariam, erunt quinque anguli ADB, BDC, CAD, DCE, ECA, æquales. *d* Quare arcus AB, BC, CD, DE, EA, ſuper quos aſcenderunt, atque idcirco *e* & rectæ AB, BC, CD, DE, EA, æquales erunt. Æquilaterum eſt igitur pentagonum ABCDE. Rurſus quia arcus AB, ED, æquales ſunt; addito communi BCD, fient æquales ABCD, EDCB. *f* Anguli ergo AED, BAE, dictis arcubus inſiſtentes æquales erunt. Eodem modo æquales erunt cuilibet horum angulorum reliqui anguli. Inſiſtunt enim æqualibus arcubus, quorum ſinguli externis arcubus æqualibus componuntur. Æquiangulum eſt ergo pentagonum ABCDE. Quare cum & æquilaterum eſſe ſit oſtenſum, inſcriptum erit dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum: Quod faciendum erat.



a 10. quarti.
b 2. quarti.
c 9. pri.
d 26. tertij.
e 29. tertij.
f 27. tertij.

COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, angulum Pentagoni æquilateri, & æquianguli complecti tres quintas partes duorum rectorum; vel ſex quintas recti. *g* Cum enim tres anguli BAC, CAD, DAE, æquales ſint, vtpote qui æqualibus arcubus BC, CD, DE, inſiſtant, ſit autem CAD, per coroll. præcedentis propoſ. quinta pars, duorum rectorum, vel duæ quintæ vnius recti: erit totus BAE, tres quintæ duorum rectorum: vel ſex quintæ vnius recti.

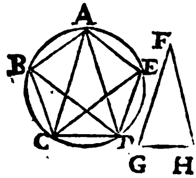
g 27. tertij.

SCHOLIVM.

QVOD ſi detur recta linea terminata CD, ſuper ea conſtituemus pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, hoc modo. h *Fiat triangulum Iſoſceles FGH, habens vtrumlibet angulorum G, H, duplum reliqui anguli F. Deinde conſtituantur anguli ACD, ADC,*

h 10. quarti.

Digitized by Google

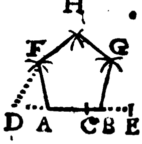


a 32. primi.

æquales angulis G, H, coëantque rectæ C A, D A, in A, a qua efficient angulum C A D, æqualem angulo F; ac propterea trianguli A C D, vterque angulorum A C D, A D C, duplus erit reliqui anguli C A D. Iam verò circa triangulum A C D, circulus b *deſcribatur A B C D E; In quo cum ſit inſcriptum triangulum A C D, ſi anguli A C D, A D C, biſariam ſecentur, inſcribetur, vt prius, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, cuius latus eſt recta C D. Quod eſt propoſitum.*

b 5. quarti.

FACILIVS *idem efficiemus hac ratione. Secta recta propoſita A B, ſupra quam pentagonum æquilaterum, & æquiangulum conſtituendum eſt, in C, vt propoſ. 11 lib. 2. traditum eſt, producatur ad vtramque partem, ſintq; A D, B E, maiori ſegmento A C, æquales. Interuallo deinde datæ rectæ A B, ex A, D, duo arcus deſcribantur ſecantes ſeſe in F. Item ex B, E, eodem interuallo alij duo ſe interſecantes in G. Denique ex F, G, eodem interuallo alij duo ſe diuidentes in H, coniunganturq; rectæ A F, F H, H G, G B. Dico pentagonum A B G H F, ſuper datam rectam A B, deſcriptum, eſſe æquilaterum, atque æquiangulum. Quòd enim ſit æquilaterum, conſtat ex conſtructione, cum omnes lineæ ipſi A B, ſumptæ ſint æquales, hoc eſt, omnes arcus deſcripti ſint ad interuallum A B. Quod autem ſit & æquiangulum, ita oſtendetur. Ducta recta D F, erit A D F, Iſoſceles, quale ab Euclide propoſ. 10. conſtructum eſt, vt ex ſcholio eiuſdem propoſ. manifeſtum eſt, propterea quòd baſis A D, æqualis eſt maiori ſegmento A C, lineæ A B, vtrumuis verò laterum æqualium ipſi A B, æquale. Quare ex coroll. eiuſdem propoſ. 10. angulus D A F, continebit duas quintas duorum rectorum; ac proinde reliquus angulus duorum rectorum, nimirum B A F, reliquas tres quintas duorum rectorum continebit. Cum ergo ex coroll. huius propoſ. angulus pentagoni æquilateri, & æquianguli complectatur tres quintas duorum rectorum; erit B A F, angulus pentagoni æquilateri, & æquianguli. Eademque ratione erit A B G, angulus pentagoni æquilateri, & æquianguli. Ex quo ſequitur, totum pentagonum eſſe æquiangulum. Si enim compleatur, aut concipiatur eſſe completum, hoc eſt, ſuper F, G, cogitentur deſcripta duo alia latera, cadent ea neceſſario in punctum H. Alioquin, ſi ſupra H, aut infra conuenirent,* c *eſſent ea vel maiora, vel minora rectis F H, G H, vt conſtat, ſi angulo H, ſubtenderetur baſis F G: atque idcirco aliis lateribus F A, A B, B G, æqualia non forent, quod eſt abſurdum. Pentagonum ergo A B G H F, & æquilaterum, & æquiangulum eſt. Quod erat oſtendendum.*



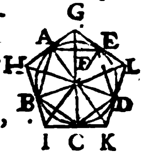
c 21. primi.

PROBL.

PROBL. 12. PROPOS. 12. xij.

CIRCA datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

SIT circa datum circulum ABCDE, deſcribendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. *a* Inſcribatur in eo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE, & ex centro F, ducantur rectæ FA, FB, FC, FD, FE, ad quas ducantur perpendiculares GH, HI, IK, KL, LG, coeuntes in G, H, I, K, L. Cùm enim anguli GAE, GEA, duobus ſint rectis minores, partes nimirum angulorum rectorum FAG, FEG; *b* coibunt rectæ AG, EG, ad partes G, & ſic de aliis. Et quia ipſæ tangunt circulum, per coroll. propoſ. 16 lib. 3. erit deſcriptum pentagonũ GHIKL, circa circulum; quod dico eſſe æquilaterum atque æquiangulum. Ductis enim rectis FG, FH, FI, FK, FL, erunt quadrato rectæ FH, *c* æqualia tam quadrata rectarum FA, AH, quàm rectarum FB, BH. Quare quadrata rectarum FA, AH, æqualia erunt quadratis rectarũ FB, BH. Demptis igitur quadratis æqualibus rectarum æqualium FA, FB, remanebunt quadrata rectarum AH, BH, æqualia; ideoque & rectæ AH, BH, æquales erunt. Quod etiam conſtat ex coroll. 2. propoſ. 36. lib. 3. cùm AH, BH, ex eodem puncto H, ducantur circulum tangentes in A, & B. Quoniam ergo latera AF, FH, trianguli AFH, æqualia ſunt lateribus BF, FH, trianguli BFH. Eſt autem & baſis AH, baſi BH, æqualis, vt oſtenſum eſt; *d* erunt anguli AFH, BFH, æquales. Igitur *e* & anguli AHF, BHF. Duplus igitur eſt angulus AFB, anguli BFH, & angulus AHB, anguli BHF. Eodem modo oſtendemus, angulum BFC, duplum eſſe anguli BFI, & angulum BIC, anguli BIF. Cùm igitur *f* anguli AFB, BFC, ſint æquales, quòd inſiſtant circumferentiis AB, BC, *g* quæ æquales ſunt, cùm à rectis æqualibus ſubtendantur AB, BC; erunt & dimidij eorum BFH, BFI, æquales. Quocirca cùm duo anguli BFH, HBF, trianguli BFH, æquales ſint duobus angulis BFI, IBF, trianguli IFB, & latus illis adiacens commune BF, *h* erunt & latera BH, BI, æqualia, & anguli BHF, BIF, æquales. Dupla eſt ergo recta HI, rectæ HB. Eademque ratione oſtendemus GH, rectam duplam eſſe rectæ HA. Sunt autem oſtenſæ æquales HB, HA. Igitur & earum duplæ HI, HG, æquales erunt. Similiter demonſtrabimus, rectas IK, KL, LG, æquales eſſe cuilibet rectarum HI, HG. Æquilaterum ergo eſt pentagonum GHIKL. Rurſus quoniam oſtenſum eſt, angulos BHF, BIF, æquales eſſe, ac ſemiſſes angulorum BHA, BIC; erunt & eorum dupli BHA, BIC, æquales. Eademque ratione anguli



a 11. quarti.
b 13. pronun.
c 47. primi.
d 8. primi.
e 4. primi.
f 27. tertij.
g 28. tertij.
h 26. primi.

guli I K L, K L G, L G H, æquales erunt cuilibet angulorum B H A, B I C. Æquiangulum igitur eſt pentagonum G H I K L. Quapropter cùm & æquilaterum ſit oſtenſum, deſcriptum erit circa datum circulum, pentagonum æquilaterũ, & æquiangulum. Quod efficiendum erat.

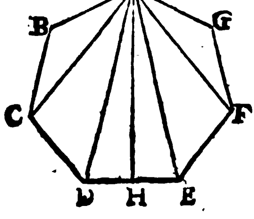
COROLLARIVM.

SEQVITVR ex huius problematis demonſtratione; ſi in circulo quæcunque figura æquilatera, & æquiangula deſcribatur, & ad extrema ſemidiametrorum ex centro ad angulos ductarum excitentur lineæ perpendiculares; has perpendiculares conſtituere aliam figuram totidem laterum, & angulorum æqualium circulo circumſcriptam. Eadem enim ſemper ratione demonſtrabitur, illas perpendiculares concurrere, anguloſque conficere æquales, ſi nimirum ab illis ad centrum ducantur rectæ, vt in pentagono factum eſt: quæ quidem ipſos angulos bifariam ſecabunt, quemadmodum in pentagono hic probatum eſt, &c.

HVC referendum eſt theorema ſequens ad figuras æquilateras, & æquiangulas ſpectans, quod perutile erit ad inueniendã centra circulorum circa ipſas figuras, ſiue intra ipſas deſcribendorum, vt ex ſequentibus patebit.

IN figura æquilatera, & æquiangula, ſi quidem angulorum numerus impar eſt, recta linea ex quouis angulo demiſſa ſecans oppoſitum latus bifariam, diuidit quoq; angulum bifariam; Et contrà, recta linea diuidens angulum bifariam ſecat quoq; latus oppoſitum bifariã; Si verò numerus angulorum eſt par, recta linea ex quouis angulo ad oppoſitum angulum ducta ſecat vtrumq; angulum bifariam: Et contrà, recta linea ſecans quemuis angulum bifariam cadit in oppoſitum angulum, eumq; bifariam quoq; diuidit.

SIT primùm figura æquilatera, æquiangulaq; imparium laterum A B C D E F G, & ex angulo A, demiſſa recta A H, ſecet latus oppoſitum D E, bifariam. Dico angulum quoq; B A G, ſectum eſſe bifariam.



Ductis enim ex A, rectis ad omnes angulos non proximos; quoniam duo latera B A, B C, duobus lateribus G A, G F, æqualia ſunt, anguloſq; continent æquales, ex hypotheſi; a erunt & baſes A C, A F, æquales, & tam anguli B A C, G A F, quàm B C A, G F A: ac proinde cùm toti anguli B C D, G F E, ponantur æquales; erunt quoq; reliqui A C D,

a 4. primi.

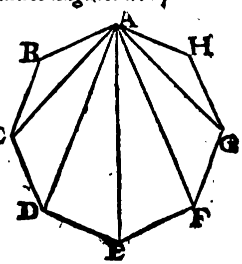
ACD, AFE, æquales. Quia igitur rurſus duo latera CA, CD, duobus lateribus FA, FE, æqualia ſunt, continentq; angulos æquales, vt oſtenſum eſt; a erunt & baſes AD, AE, æquales, & tam anguli CAD, FAE, quàm CDA, FEA. Atque ita procedendum erit, donec ad latus oppoſitum perventum ſit. Vbi quia rurſus toti anguli CDE, FED, æquales ſunt; erunt quoque reliqui ADH, AEH, æquales. Quare cùm duo latera DA, DH, duobus lateribus EA, EH, æqualia ſint, anguloſque æquales contineant, b erunt etiam anguli DAH, EAH, æquales. Quocirca cùm quotuis anguli BAC, CAD, DAH, totidem angulis GAF, FAE, EAH, ſint æquales, ſinguli ſingulis; erit quoque totus angulus BAH, toti angulo GAH, æqualis; ac proinde angulus BAG, ſectus erit bifariam. Quod eſt propoſitum.

a 4. primi.

b 4. primi.

SED iam recta AH, ſecet angulum BAG, bifariam. Dico eam ſecare quoque latus oppoſitum DE, bifariam. Si enim dicatur latus DE, non ſecari bifariam, ſi ex A, ducatur alia recta ſecans DE, bifariam, ſecabit eadem & angulum BAG, bifariam, vt iam oſtendimus. Duæ igitur rectæ eundem angulum BAG, ſecabunt bifariam. quod eſt abſurdum, cùm vna medietas maior eſſet quàm altera. Recta ergo AH, ſecans angulum BAG, bifariam, ſecat quoque latus DE, bifariam. Quod eſt propoſitum.

SIT deinde figura æquilatera, & æquiangula parium laterum ABCDEFGH, & ex angulo A, ad angulum oppoſitum E, ducatur recta AE. Dico rectam AE, ſecare tam angulum BAH, quàm DEF, bifariam. Ductis enim ex A, ad omnes angulos non proximos rectis; demonſtrabimus, vt in antecedente figura, quotuis angulos BAC, CAD, DAE, totidem angulis HAG, GAF, FAE, eſſe æquales, ſingulos ſingulis; ideo totum angulum BAE, toti angulo HAE, æqualem eſſe, nec non & angulum DEA, FEA, eſſe æqualem. Vterq; igitur angulus BAH, DEF, ſecabitur bifariam. Quod eſt propoſitum.



SED iam recta AE, ſecet angulum ABH, bifariam. Dico eam cadere in angulum oppoſitum E, eumque diuidere bifariam. Si enim non dicatur cadere in E, ſi ex A, ad E, ducatur alia recta, ſecabit ea angulum BAH, bifariam, vt iam oſtendimus. Duæ igitur rectæ eundem angulum BAH, bifariam ſecabunt. quod eſt abſurdum. Recta ergo AE, ſecans angulum BAH, bifariam, cadit in E, ſecatq; propterea, vt demonſtratum eſt proxime, angulum DEF, bifariam quoque. Quod eſt propoſitum.

PROBL.

xiij. PROBL. 13. PROPOS. 13.

IN dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inſcribere.



SIT inſcribendus circulus in dato pentagono A B C D E. *a* Diuidantur duo eius anguli B A E, A B C, proximi bifariam rectis A F, B F, quæ coeant in F. Cùm enim ex ſcholio præcedentis propoſ. rectæ A F, B F, ſecent oppoſita latera C D, D E, bifariam, neceſſe eſt, duas rectas A F, B F, ſe mutuò intra pentagonum ſecare, priuſquam rectis C D, D E, occurrant. Connectantur deinde rectæ F C, F D, F E. Quoniam igitur latera A B, B *F*, trianguli A B F, æqualia ſunt lateribus C B, B F, trianguli C B F. Sunt autem ex conſtructione, & anguli ipſis contenti æquales A B F, C B F; *b* erunt baſes A F, C F, & anguli B A *F*, B C *F*, æquales. Cùm igitur anguli B A E, B C D, ponantur æquales, & B A *F*, dimidium ſit anguli B A E, per conſtructionem; erit & B C *F*, dimidium anguli B C D. Diuiſus eſt ergo angulus *B* C D, bifariam. Simili modo oſtendemus, reliquos duos angulos C D E, D E A, diuiſos eſſe bifariam. Ducantur iam ex *F*, ad ſingula Pentagoni latera perpendiculares *F* G, F H, F I, F K, F L. Quoniam igitur duo anguli *F* G A, *F* A G, trianguli *F* A G, æquales ſunt duobus angulis *F* L A, *F* A L, trianguli *F* A L; eſtque latus A *F*, ſubtenſum vni æqualium angulorum commune, *c* erunt & rectæ *F* G, *F* L, æquales. Similiterq; oſtendentur reliquæ perpendiculares *F* H, *F* I, *F* K, æquales cuilibet iſtarum. Circulus igitur deſcriptus ex centro *F*, & interuallo *F* G, tranſibit per puncta quoque H, I, K, L. Quoniam verò latera pentagoni circulum hunc tangũt, per coroll. propoſ. 16. lib. 3. eo quòd angulos rectos faciant cum ſemidiametris F G, F H, &c. erit circulus in dato pentagono inſcriptus. Quod faciendum erat.

a 9. primi.

b 4. primi.

c 26. primi.

SCHOLIVM.

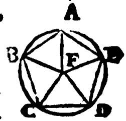
EADEM prorſus arte in quacunque figura æquilatera, & æquiangula circulum deſcribemus. Semper enim oſtendemus, diuiſis duobus angulis proximis bifariam, ſi ex puncto concurſus linearum angulos diuidentium perpendiculares ducantur ad latera, eas inter ſe eſſe æquales: ac proinde punctum illud concurſus centrum eſſe circuli inſcribendi. Concurrent autem neceſſariò intra figuram duæ illæ rectæ, quæ angulos duos proximos ſecant bifariam: propterea quòd in figura imparium laterum diuidunt latera oppoſita bifariam; in figura verò parium laterum, angulos oppoſitos bifariam, vt in ſcholio antecedentis propoſ. oſtenſum eſt.

THEOR.

Digitized by Google

PROBL. 14. PROPOS. 14. XIV

CIRCA datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum deſcribere.



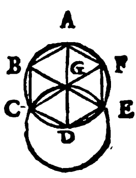
SIT circa pentagonum A B C D E, æquilaterum, & æquiangulum, circulus deſcribendus. Diuiſis duobus angulis B A E, A B C, bifariam rectis A F, B F, quæ coeant in F, intra pentagonum, vt in antecedente propoſ. demonſtratum eſt; & coniunctis rectis F C, F D, F E, oſtendemus, vt in præcedenti problemate, reliquos etiam angulos B C D, C D E, D E A, ſectos eſſe bifariam. Erunt ergo omnes anguli dimidij inter ſe æquales, quòd toti anguli æquales ponantur. Quoniam igitur in triangulo A F B, duo anguli æquales ſunt F A B, F B A; *a* erunt rectæ F A, F B, æquales. Eademque ratione erunt reliquæ F C, F D, F E, cuilibet iſtarum æquales. Quare circulus deſcriptus ex centro F, interuallo autem F A, tranſibit quoque per puncta B, C, D, E. Circa datum ergo pentagonum, &c. Quod faciendum erat. a 6. primi.

SCHOLIUM.

EODEM prorſus artificio circa quamlibet figuram æquilateram, & æquiangulam circulum deſcribemus: Semper enim oſtendemus, diuiſis duobus angulis proximis bifariam, rectas ex puncto concurſus linearum angulum diuidentium ad angulos figuræ ductas, inter ſe eſſe æquales: ac propterea punctum illud concurſus centrum eſſe circuli circumſcribendi.

PROBL. 15. PROPOS. 15. XV

IN dato circulo, hexagonum & æquilaterum & æquiangulum inſcribere.



SIT in dato circulo A B C D E F, cuius centrum G, inſcribendum hexagonum æquilaterum, & æquiangulum. Ducta diametro A D, deſcribatur circulus ex centro D, interuallo verò D G, qui ſecet circulum datum in punctis C, & E, è quibus per centrum G, rectæ extendantur C F, E B. Si igitur connectantur rectæ A B, B C, C D, D E, E F, F A, inſcriptum erit in dato circulo hexagonum A B C D E F; quod dico eſſe & æquilaterum & æquiangulum. Cùm enim recta G C, æqualis ſit rectæ G D, & recta D C, æqualis eidem rectæ D G, ex definitione circuli; erunt & rectæ G C, D C, æquales inter ſe: Ideoque triangulum C D G, erit æquilaterum. Quare *b* tres anguli C G D, G D C, D C G, æquales inter ſe erunt: qui cùm *c* æquales ſint duobus rectis, erit quilibet illorum, nempe C G D, tertia pars duorum rectorum. b 5. primi. c 32. primi

Eodem

æqualibus omnes, vt perſpicuum eſt. In dato igitur circulo quintidecagonum, &c. Quod faciendum erat.

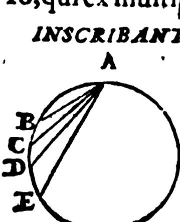
SIMILITER autem per ea, quæ dicta ſunt de pentagono ſupra, propoſ. 12. 13. & 14. deſcribemus circa datum circulum quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Item in dato quintidecagono æquilatero, & æquiangulo circulum inſcribemus; & tandem circa datum quintidecagonum deſcribemus circulum.

SCHOLIVM.

EX huius problematis ſtructura, atque demonſtratione colligi poteſt methodus, atque ars quædam, qua infinita propemodum figuræ in dato circulo inſcribantur. Nam quia recta A B, denominatur à ternario, quòd ea ſit latus trianguli æquilateri, & recta A E, à quinario, quòd ea ſit latus pentagoni; ſi multiplicentur 3. cum 5. efficientur 15. Quare ex illis duobus lateribus in circulo deſcriptis, inſcribetur in eodem figura 15. laterum, angulorumq; æqualium, hac ratione. Denominator lateris A B, hoc eſt, 3. exceditur à denominatore lateris A E, id eſt, à 5. binario. Igitur arcus B E, continebit duo latera figuræ prædictæ; Ideoque diuiſo arcu B E, bifariam in F, erit ſubtenſa recta B F, latus figuræ 15 laterum, angulorumq; æqualium, vt demonſtratum fuit. Hac ferè arte vſus eſt Euclides in deſcribendo Quintidecagono intra circulum. Ex qua licebit nobis inferre huiuſmodi Theorema.

SI in circulo ab eodem puncto inſcribantur duo latera duarum figurarum æquilaterarum, & æquiangularum; continebit arcus inter illa latera incluſus tot latera alterius figuræ inſcribendæ in eodem circulo, quot vnitatibus inter ſe differunt denominatores eorundem laterum: Continebit autem figura inſcribenda tot latera, angulosque æquales, quot vnitates ſunt in numero, qui ex multiplicatione denominatorum producitur.

INSCRIBANTVR in circulo A B C D E, initio ſemper facto à puncto A, plurima latera; Hexagoni quidem A B, pentagoni verò A C, & quadrati A D, trianguli denique æquilateri A E. Quoniam igitur denominator lateris A B, nimirum 6. excedit denominatorem lateris A C, nempe 5. vnitate; continebit arcus B C, inter ea latera incluſus vnum latus figuræ 30. laterum, angulorumq; æqualium. Nam ex multiplicatione 5 cum 6. producuntur 30. Hoc autem ita eſſe, ſic demonſtrabitur. Qualium partium



Digitized by Google

partium æqualium 30. eſt tota circumferentia, talium 5. eſt arcus AB, ſexta pars circumferentiæ; & talium 6. eſt arcus AC, quinta pars circumferentiæ. Igitur arcus BC, vnam talem continebit partem.

PARI ratione arcus BD, continebit duo latera figuræ 24. laterum, angulorumq; æqualium. Nam denominator lateris AB, videlicet 6. ſuperat denominatorem lateris AD, nimirum 4. binario; & ex multiplicatione 4. in 6. fiunt 24.

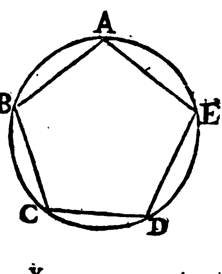
ITA quoque arcus BE, comprehendet tria latera figuræ 18. laterum.

ARCVS verò CD, complectetur vnum latus figuræ 20. laterum.

ARCVS autem CE, duo latera figuræ 15. laterum.

ARCVS denique DE, continebit vnum latus figuræ 12. laterũ, angulorumq; æqualium. Hac itaque arte, ac methodo inueſtigabuntur ferè infinitarum figurarum latera.

NON eſt autem prætereundum hoc loco, omnem quidem figuram æquilateram circulo inſcriptam, eſſe quoque æquiangulam: at non omnem figuram æquilateram circulo circumſcriptam neceſſariò æquiangulam quoque eſſe, niſi quando numerus angulorum ipſius eſt impar; vel ſi par eſt, quando duo anguli proximi æquales ſunt, vel duo non proximi, dummodo vno eorum primo poſito, alter occupet locum parem quemcunque, vt quartum; (ſi enim ſecundum occuparet, eſſet primo proximus. quod eſt contra hypotheſin.) ſextum, octauum, decimum, &c. Qua in re nonnulli hallucinati ſunt, putantes omnem figuram æquilateram circulo circumſcriptam, neceſſariò eſſe quoq; æquiangulam: inter quos eſt Campanus Euclidis non obſcuri nominis interpres.



SIT enim figura æquilatera quotcunq; angulorum ABCDE, circulo inſcripta. Dico eam neceſſariò eſſe quoq; æquiangulam. Cùm enim latera AB, BC, CD, ſint æqualia, a *erunt arcus quoque AB, BC, CD, æquales; ac proinde & totus arcus ABC, toti arcui BCD, æqualis erit. Reliqui ergo ADC, BED, in eodem circulo æquales erunt. Quocirca* b *anguli ABC, BCD, illis inſiſtentes æquales e-*

a 28 tertij.

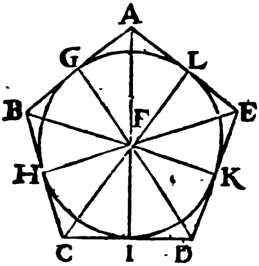
b 27. tertij.

Y   runt.

runt: Eademq; modo omnes anguli oſtendentur eſſe æquales, quotquot illi ſint; ac propterea figura A B C D E, æquiangula eſt, ſiue angulorum numerus ſit par, ſiue impar. Quod oſtendendum erat.

SIT rurſus figura æquilatera A B C D E, quotlibet angulorum numero imparium circulo, cuius centrum F, circumſcripta. Dico eam neceſſariò eſſe quoq; æquiangulam Ductis enim ex F, centro ad omnes angulos, & ad puncta contactuum, rectis, a erunt hæ ad latera perpendiculares. Et quoniam tangentes A G, A L, ex coroll. 2. propoſ. 36. lib. 3. æquales ſunt; erunt duo latera A G, A F, duobus lateribus A L, A F, æqualia. Cùm ergo & baſes F G, F L, ex centro ſint æquales; b erunt & anguli ad A, æquales: ac proinde angulus B A E, diuiſus erit bifariam. Non aliter oſtendemus reliquos omnes angulos figuræ ſectos eſſe bifariam. Rurſus quia duo latera A B, B F, duobus lateribus C B, B F, æqualia ſunt, anguliq; illis contenti, oſtenſi æquales; c erunt quoq; baſes A F, C F, & anguli B A F, B C F, æquales. Cùm ergo hi anguli ſint ſemiſſes angulorum B A E, B C D, vt oſtenſum eſt, erunt toti anguli B A E, B C D, quoq; æquales. Eadem ratione erit recta C F, rectæ E F, & angulus B C D, angulo D E A, æqualis: Atq; ita deinceps, ſi figura plures habeat angulos, erit ſemper tertius quiſq; angulus ei, à quo tertius eſt, vno relicto in medio, æqualis: hoc eſt, primus (conſtitui autem poteſt primus quicunq; angulus) æqualis erit tertio, tertius quinto, quintus ſeptimo, ſeptimus nono, &c. Atq; ita omnes anguli in locis imparibus poſiti, æquales inter ſe erunt: Eademq; ratione omnes anguli parium locorum, vt ſecundus, quartus, ſextus, octauus, decimus, &c. æquales inter ſe erunt; cùm quartus ſit à ſecundo tertius, & ſextus à quarto tertium quoq; locum occupet, &c. Itaq; quoniam figura propoſita habet numerum angulorum imparem, erit primus angulus, qui æqualis oſtenſus eſt omnibus angulis locorum imparium, æqualis vltimo angulo impari, qui primo proximus eſt. Hic autem vltimus angulus erit eadem ratione ſecundo angulo æqualis, qui tertius eſt ab vltimo, primo relicto in medio; & omnibus alijs à ſecundo tertium locum occupantibus, vt quarto, ſexto, octauo, decimo, &c. vſque ad penultimum. Quapropter omnes anguli figuræ propoſitæ inter ſe æquales erunt. Quod erat oſtendendum.

a 18. tertij.



b 8. primi.

c 4. primi.

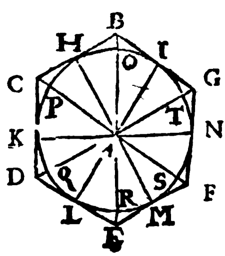
HÆC demonſtratio in figuris æquilateris circulo circumſcriptis, quæ habent numerum angulorum parem, locum non habet. Ex ea enim ſolùm concludetur, primum angulum æqualem eſſe tertio, quinto, ſeptimo, nono, & alijs loca imparia occupantibus; nunquam autem proba-

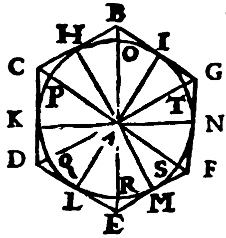
Digitized by Google

probabitur, primum vltimo eſſe æqualem, eo quòd vltimus locum parem occupet. Vt in quadrangulo quartum, in hexagono ſextum, in octogono, octauum, &c. Sic etiam ſolùm ex eadem demonſtratione colligetur, angulum ſecundum æqualem eſſe quarto, ſexto, octauo, decimo, & alijs loca paria occupantibus; nunquam autem oſtendetur ſecundum angulum eſſe primo æqualem, propterea quòd primus locum imparem occupat. Itaq; ſoli anguli imparium locorum inter ſe, & ſoli quoque anguli locorum parium inter ſe ſemper conuincentur æquales.

QVOD ſi duo anguli proximi, vel etiam duo non proximi, dummodò vnus eorum in loco impari, alter verò in loco pari collocatus ſit, fuerint inter ſe æquales, tum demum per ſuperiorem demonſtrationẽ concludetur omnium angulorum æqualitas. Nam ſi primus angulus æqualis ſit ſecundo, (quando enim duo anguli proximi ſunt æquales, licebit vnum eorum dicere primum, & alterum ſecundum,) cùm oſtenſum ſit, primum eſſe æqualem quoque omnibus angulis loca imparia occupantibus, ſecundum verò omnibus parium locorum; erunt omnes inter ſe æquales. Si autem primus angulus æqualis ſit alicui locum parem occupanti, (quando enim duo anguli non proximi ſunt æquales, quorum vnus in loco impari, & alter in loco pari exiſtat, dicere licebit eorum vnum primum, & alterum vel quartum, vel ſextum, vel octauum, &c. prout ab illo deſtiterit, non autem ſecundum, quia ſecundus primo proximus eſt) cùm primus oſtenſus ſit æqualis omnibus alijs locorum imparium, alter verò omnibus parium locorum, atque adeò & ſecundo angulo; erit quoque primus ſecundo æqualis: hoc eſt, duo proximi inter ſe æquales erunt. Quamobrem, vt proximè demonſtrauimus, omnes anguli inter ſe erunt æquales.

VERVM ſi dicat forſan aliquis, quanquam ex ea demonſtratione colligi nequeat, omnem figuram æquilateram, cuius angulorum numerus ſit par, circulo circumſcriptam, eſſe quoque æquiangulam; non colligi tamen contrarium; ac proinde eam poſſe eſſe æquiangulam, non quidem propter illam demonſtrationem, ſed propter quampiam aliam; adeò vt nulla dari poſſit figura æquilatera circulo circumſcripta, quin ſimul ſit æquiangula, vt Campanus cum nonnullis alijs aſſeruit. Si, inquam, aliquis ita dicat, reſpondemus, infinitas figuras æquilateras angulorum numero pariũ circumſcriptas circulo, non eſſe æquiangulas. Sit enim circulus ex centro A, deſcriptus, cuius circumferentia trib. diametris BE, CF, DG, in 6. partes æquales OP, PQ, QR, RS, ST, TO, diuidatur, quemadmodũ prop. 15. in deſcriptione hexa-





goni traditum eſt. Deinde arcus O P, ſecetur inæqualiter in H, ſitq; maius ſegmentum O H, & minus P H. Arcui quoq; O H, æquales ſumantur O I, Q K, Q L, S M, S N, ita vt ſex arcus æquales ad vtraſq; partes triũ ſemidiametrorum non pro xin. a ũ, ſed inter binas ſingulis relictis in medio, ſumãtur. Eruntq; ad vtraſq; partes ſemidiametrorũ relictarum ſex reliqui arcus P H, P K, R L, R M, T N, T I, æquales. Ductis item ex centro A, ad puncta H, K, L, M, N, I, rectis lineis, ducatur per H, ad H A, perpendicularis B C, ſecans ſemidiametros A O, A P, productas in B C, quæ circulum tanget in H, ex coroll propoſ. 16. lib 3. Coibunt autẽ neceſſariò rectæ H B, A B, propterea quòd duo anguli B H A, B A H, duobus rectis minores ſunt. Eſt enim B H A, rectus, & B A H, inſiſtens arcui O H, qui minor eſt quadrante, minor recto, ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. Iungatur quoq; recta B I. Et quia duo latera A H, A B,
a 27. tertij. duobus lateribus A I, A B, æqualia ſunt, a anguloſq; continẽt æquales æqualibus arcubus O H, O I, inſiſtentes; b erunt quoq; baſes B H,
b 4. primi. B I, & anguli H, I, æquales. Cùm ergo B H A, rectus ſit ex constructione, erit & B I A, rectus: ac propterea recta B I, circulum tanget in I, conuenietq; cum ſemidiametro A T, producta in G, ob angulos A I G, G A I, duobus rectis minores: Eſt namq; A I G, oſtenſus rectus, at G A I, recto minor eſt, ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. ob arcum T I, quadrante minorem. Et quoniam duo anguli I, A, trianguli G A I, duobus angulis H, A, trianguli C A H, æquales ſunt; (Nam I, H, recti ſunt,
c 27. tertij. c & G A I, C A H, æquales ſunt inſiſtentes æqualibus arcubus T I, P H,) lateraq; A I, A H, quibus adiacent, æqualia; d erunt quoq; latera G I, G A, lateribus H C, C A, æqualia.
d 26. primi. Cùm ergo & B I, ipſi B H, oſtenſa ſit æqualis; erit tota B G, toti B C, æqualis. Eadem ratione, ducta recta G N, tanget circulum in N, coibitq; cum ſemidiametro A F, producta in F, eritq; ipſi G B, æqualis. Item iuncta recta F M, circulũ tanget in M, & cum ſemidiametro A R, producta conueniet in E, ipſiq; F G, æqualis erit. Similiter ducta recta E L, tanget circulum in L, & ſemidiametro A Q, protracta occurret in D, ipſiq; E F, fiet æqualis. Deniq; iuncta recta D K, eundem circulum tanget in K, & cum ſemidiametro A P, producta concurret in C, fietq; ipſi D E, æqualis. Quòd autem D K, in eodẽ puncto C, occurrat ſemidiametro A P, in quo recta B H, eidem occurrit manifeſtũ eſt. Si enim in alio puncto eam ſecaret, cum ducta recta C L, circulum tangeret in K, vt demonſtratum eſt, tangerent duæ rectæ circulum in eodem puncto K; atq; adeò inter peripheriam, & tangentem interciperetur ad punctum contactus vna linea recta: quod fieri non poſſe,
e 16. tertij. e Euclides demonſtrauit. Eſt ergo hexagonum B C D E F G, circulo circumſcriptum, æquilaterũ. At idem

eſſe

eſſe non aquiangulum, ita demonſtrabimus. Quoniam figura BCD-EFG, aquilatera eſt, erunt quidem per ea, qua paulò antè monſtrauimus, anguli locorum imparium, nimirum B, D, F, inter ſe, & anguli locorum parium, vt C, E, G, inter ſe, aquales; omnesq; ſecti erunt bifariam à ſemidiametris: At quia tres anguli trianguli A B H, a tribus angulis trianguli A C H, aquales ſunt; ablatis rectis ad H, erunt reliqui duo reliquis duobus aquales: Eſt autem B A H, maior quàm C A H, ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. quod & arcus O H, maior ſit arcu P H. Igitur reliquus A B H, reliquo A C H, minor erit; qui cùm ſemiſſes ſint totorũ angulorum B, C, vt oſtenſum eſt; erit totus quoq; C B G, toto B C D, minor. Eodemq; modo toti anguli D, F, totis angulis E, G, minores oſtendentur. Non eſt ergo hexagonum B C D E F G, aquiangulum. Quod erat oſtendendum. a 32. pri mi.

EADEM omnino conſtructio, & demonſtratio fieri poteſt in octogono, decagono, & alijs figuris parium laterum, ſi circulus quatuor diametris ſecetur in 8. partes, vel quinq; diametris in 10. &c.

QVOD ſi figura aquilatera quotcunq; angulorum circulo circumſcribatur per doctrinam propoſ. 12. deſcripta nimirum prius ſimili figura intra circulum, & ductis lineis circulum tangentibus in figura inſcripta angulis, &c. vt factum eſt in pentagono propoſ. 12. tum neceſſariò figura illa erit ſimul aquiangula, vt ex demonſtratione eiuſdem propoſ. liquidò conſtat.

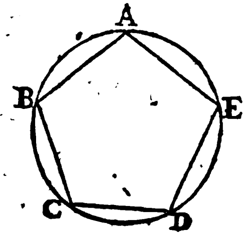
OBSERVATIONE quoq; dignum eſt, omnẽ quidem figuram æquiangulam circulo circumſcriptam, eſſe etiam æquilateram: at non omnem figuram æquiangulam circulo inſcriptam neceſſariò æquilaterã quoque eſſe, niſi quando numerus laterum ipſius eſt impar; vel ſi par eſt, quando duo latera proxima æqualia ſunt, vel duo non proxima, dummodo vno eorum poſito primo, alterum occupet locum parem quemcunque, vt quartum, (ſi enim ſecundũ occuparet, eſſet primo proximum, quod eſt contra hypotheſin.) ſextum, octauum, decimũ, &c. Qua in re facilè etiã quis hallucinari poſſit.



SIT enim figura aquiangula A B C D E, quotuis laterum circulo, cuius centrum F, circumſcripta. Dico eam eſſe quoque neceſſariò aquilateram. Ductis enim ex F, centro ad puncta contactuum rectis F G, F H, F I, F K, F L, b *qua ad latera figura ſunt perpendiculares; emittantur quoq; ex centro F, ad angulos figura recta F A, F B, F C, F D, F E. Et quoniam tangentes A G, A L, ex 2. coroll. propoſ. 36. lib. 3. aquales ſunt, erunt duo latera A G,* b 18. ter tij.



A F, trianguli A G F, duobus lateribus A L, A F, trianguli A L F, æqualia: Sunt autem & baſes F G, F L, ex centro æquales.
a 8.primi. *a Igitur anguli quoq; ad A, illis lateribus comprehenſi æquales ſunt, ideoq; angulus B A E, ſectus eſt biſariam. Non aliter oſtendemus, reliquos angulos figuræ biſariam ſectos eſſe, ac proinde cùm toti anguli ponantur æquales, & eorum ſemiſſes æquales erunt. Quocirca duo anguli A, G, trianguli A F G, duobus angulis B, G, trianguli B F G, æquales erunt: Eſt autem latus F G, vtriq; æqualium angulorum oppoſitum commune.*
b 26.primi. *b Igitur latera quoq; A G, B G, æqualia erunt; atq; ideo latus A B, ſectum erit biſariam in G. Eodem modo probabis, reliqua figuræ latera ſecta eſſe biſariam. Quia ergo A G, A L, dimidia æquales ſunt, erunt quoq; tota linea A B, A E, æquales. Eademq; ratione A B, B C; & B C, C D; & C D, D E; & D E, E A, æquales erunt. Quamobrem figura A B C D E, æquilatera eſt, ſiue numerus laterum ſit par, ſiue impar. Quod erat demonſtrandum.*



SIT rurſus figura æquiangula A B C D E, quotuis laterum numero imparium circulo inſcripta. Dico eam neceſſario eſſe quoq; æquilateram. Quoniam enim anguli B A E, A B C, ponuntur æquales;
c 26.tertij. *c erunt arcus B C E, A D C, quibus inſiſtunt, æquales: quibus demptis ex communi circulo, æquales quoq; erunt reliqui arcus B A E, A B C. Dempto ergo communi arcu A B, erunt & reliqui arcus A E, B C, æquales. Eadem ratione arcus B C, arcui D E, æqualis erit; ac*
d 29.tertij. *proinde d & latus A E, lateri B C, & latus B C, lateri D E, æquale erit: atq; ita deinceps, ſi figura plura habeat latera, erit ſemper tertium quoq; latus ei, à quo tertium eſt, vno relicto in medio, æquale: hoc eſt, primum (conſtitui autem quoduis latus poteſt primum) æquale erit tertio, tertium quinto, quintum ſeptimo, ſeptimum nono, &c. atque in hunc modum omnia latera in locis imparibus poſita, æqualia inter ſe erunt: Eademq; ratione omnia latera parium locorum, vt ſecundum, quartum, ſextum, octauum, decimum, &c. æqualia inter ſe erunt, cùm quartum ſit à ſecundo tertium, & ſextum à quarto tertium item occupet locum, &c. Itaque quoniam propoſita figura numerum laterum habet imparem, æquale erit vltimum primo, cui proximum eſt. Hoc autem vltimum latus eadem ratione æquale erit ſecundo, quod ab vltimo tertium eſt, primo in medio relicto; & omnibus alijs à ſecundo tertium locum occupantibus, vt quarto, ſexto, octauo, &c. vſque ad penultimum. Quocirca omnia latera figuræ propoſitæ inter ſe æqualia erunt. quod oſtendendum erat.*

HÆC etiam demonſtratio in figuras æquiangulas parium late-

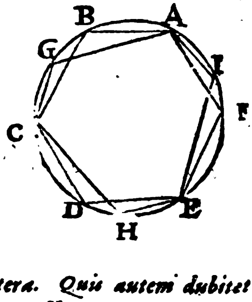
rum

Digitized by Google

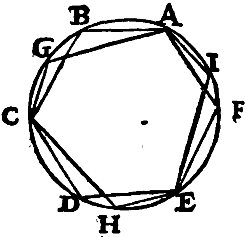
rum circulo inſcriptas non quadrat. Ex ea enim ſolùm concludetur, primum latus eſſe æquale tertio, quinto, ſeptimo, & alijs loca imparia occupantibus; nunquam autem per eam demonſtrabitur, primum vltimo eſſe æquale, propterea quòd vltimum occupat locum parem, vt in quadrangulo quartum, in hexagono ſextum, &c. Pari ratione eadem demonſtratio conuincet tantum, latus ſecundum æquale eſſe quarto, ſexto, octauo, & alijs loca paria poſſidentibus, at per eam nunquam colligetur, ſecundum latus eſſe æquale primo, eo quòd primum in loco impari locetur. Itaque ſola latera imparium locorum inter ſe, & ſola latera in paribus locis poſita inter ſe conuincentur eſſe æqualia.

QVOD ſi duo latera proxima, vel etiam duo non proxima dummodò vnum eorum in loco impari, alterum verò in loco pari poſitum ſit, fuerint inter ſe æqualia, tum demum ſuperior demonſtratio concludet omnium laterum æqualitatem. Nam ſi primum latus ſecundo ſit æquale, (quandó enim duo proxima latera æqualia ſunt, dici poterit vnum primum, & alterum ſecundum) cùm demonſtratum ſit, primum æquale eſſe quoque omnibus lateribus locorum imparium, ſecundum verò omnibus parium locorum; perſpicuum eſt, omnia inter ſe eſſe æqualia. Si autem primum latus æquale ſit alicui locum parem occupanti, (quando enim duo latera non proxima ſunt æqualia, ita tamen, vt vnum in loco impari, & alterum in loco pari reperiatur, licebit vnum eorum appellare primum, & alterum vel quartum, vel ſextum, &c. prout ab illo deſtiterit, non autem ſecundum, quia ſecundum primo proximum eſt.) cùm primum oſtenſum ſit æquale omnibus alijs poſitis in locis imparibus, alterum verò omnibus loca paria occupantibus, atque idcirco & ſecundo lateri; erit quoque primum ſecundo æquale: ac proinde duo proxima inter ſe æqualia erunt. Vt ergo proximè demonſtratum eſt, omnia latera erunt inter ſe æqualia.

SI quis autem dubitet, dari poſſe figuram æquiangulam parium laterum circulo inſcriptam, quæ non ſit æquilatera (quanquã enim ſuperior demonſtratio non probet omnia latera eſſe æqualia, ſi omnes anguli æquales ſint; contrarium tamen ex ea inferre non licet.) demonſtrabimus id Geometricè hac ratione. Primum quidem conſtat id in figuris quadrilateris. Nam figura altera parte longior æquiangula eſt, quippe cùm omnes eius anguli ſint recti, ſed non æquilatera. Quis autem dubitet,



eam circulo poſſe inſcribi? Deinde verò hexagonum æquilaterum & æquiangulum A B C D E F, in circulo deſcriptum; ſumaturq; in arcu B C, quoduis punctum G, & arcui B G, in tertio arcu ab eo arcus æqualis D H; Item in quinto ab eo arcus æqualis F I, iunganturq; rectæ A G, G C, C H, H E, E I, I A. Dico hexagonum A G C H E I, æquiangulum eſſe, at non æquilaterum. Quòd enim ſit æquiangulum, ſic oſtendemus.



a 21. tertij.

Anguli B, G, a æquales ſunt in eodem ſegmento A B C. Eadem ratione æquales ſunt anguli D, H, & F, I. Præterea quia arcus B G, D H, æquales ſunt, per conſtructionem; addito communi G D, erunt toti arcus B C D, G C H, æquales. Igitur reliqui ex circulo arcus B F D, G F H, æquales erunt;

b 27. tertij.

b ac proinde anguli B C D, G C H, illis inſiſtentes æquales quoq; erunt. Non aliter oſtendemus & angulos D E F, H E I, & F A B, I A G, æquales inter ſe eſſe. Ergo ſex anguli hexagoni A G C H E I, ſex angulis hexagoni A B C D E F, æquales ſunt, ſinguli ſingulis: ideoq; cùm hoc ponatur æquiangulum, erit quoq; illud æquiangulum. Quòd autem non ſit æquilaterum, ita probabimus. Latus A G, latere A B, maius eſt, & latus G C, latere B C, minus, ex ſcholio propoſ. 29. lib. 3. Item eadem ratione latera C H, E I, lateribus C D, E F, maiora ſunt, & latera H E, I A, lateribus D E, F A, minora. Cùm ergo latera A B, B C, C D, D E, E F, F A, æqualia ponantur, erunt A G, G C, C H, H E, E I, I A, inæqualia: quanquam A G, C H, E I, inter ſe, & G C, H E, I A, inter ſe, relicto ſemper vno in medio, æqualia ſint, vt ſuprà oſtendimus.

IDEM prorſus eodem modo demonſtrabitur fieri poſſe in octogono, decagono, & alijs figuris pariũ laterum, ſi in circulo inſcribantur prius octogonũ, decagonũ, & alia figura æquilatera, atq; æquiangula.

QVOD ſi figura inſcribatur circulo per doctrinam propoſ. 11. 15. & 16. erit ea perpetuò & æquiangula, & æquilatera, vt ex earum propoſitionum demonſtrationibus perſpicuum eſt.

PORRO qualemcunq; figuram æquilateram & æquiangulam in circulo nouerimus inſcribere, talem etiam ſciemus deſcribere circa circulum, & in ea circulum quoq; inſcribere, & circa eandem deſcribere circulum, ſi artem imitemur, quæ tradita fuit de pentagono, propoſ. 12. 13. & 14.

RVRSVS inſcripta figura quacunque æquilatera & æquiangula in circulo, inſcribetur in eodem figura, quæ habeat latera duplo plura. Diuiſis etenim arcubus, quos latera ſubtendunt, bifariam, & ſubtenſis rectis lineis, conſtat propoſitum. Vt per triangulum æquilaterum inſcriptum inſcribetur & hexagonum, & ideo dodeca-

decagonum, figura 24. laterum, &c. Sic quoque ex quadrato in circulo deſcripto, inſcribetur octogonum, atque adeo figura 16. laterum, figura 32. 64. 128. laterum, &c.

CÆTERVM omnes figuræ æquilateræ & æquiangulæ in circulo inſcribi poſſunt beneficio Iſoſcelium triangulorum, vt rectè hoc loco nonnulli Euclidis interpretes monent.

IMPARIVM enim laterum figuræ inſcribentur beneficio triangulorum Iſoſcelium, quorum anguli æquales ad baſin multiplices ſunt eorum, qui ad verticem ſunt, angulorum. Vt beneficio Iſoſcelis, cuius vterque angulorum ad baſin æqualis eſt ei, qui ad verticem, deſcripti in circulo inſcribetur prima figura imparium laterum, hoc eſt, triangulum æquilaterum. Nam Iſoſceles huiuſmodi, triangulum æquilaterum erit. Quod ſi in circulo inſcribatur Iſoſceles, cuius vterque angulorum ad baſin duplus ſit eius, qui ad verticem, inſcribetur ſecunda figura imparium laterum, nimirum pentagonum, in circulo, ſi duo anguli æquales ſecentur bifariam, veluti propoſ. 11. fuit oſtenſum. At Heptagonum, tertia figura laterum imparium, inſcribetur in circulo, per triangulum Iſoſceles habens vtrumque angulorum ad baſin triplum eius, qui ad verticem, ſi duo eius anguli æquales diuidantur in tres angulos æquales ei, qui ad verticem. Ita quoque figura quarta imparium laterum, quale eſt Hennagonum, in circulo inſcribetur beneficio Iſoſcelis, cuius vterque angulorum ad baſin quadruplus eſt eius, qui ad verticem, ſi vterque diſtribuatur in quatuor angulos æquales ei, qui ad verticem, &c.

DIVISIO autem hæc angulorum ad baſin in partes æquales perfacilis eſt. Nam ſi angulo ad verticem conſtituantur ad baſin tot anguli æquales ordine, quot vnitates ſunt in numero proportionis multiplicis, quam vterque angulorum æqualium habet ad reliquum, diuiſus erit angulus in partes æquales. Verum deſcripto huiuſmodi triangulo Iſoſcele in circulo, deſcribetur figura in circulo ſine diuiſione angulorum ad baſin, ſi baſi accommodentur rectæ æquales in circulo. Baſis enim ſemper eſt vnum figuræ latus, vt in Pentagono patuit.

PARIVM verò laterum figuræ in circulo inſcribentur, beneficio Iſoſcelium, quorum anguli æquales ad baſin multiplices ſeſquialteri ſunt eorum, qui ad verticem ſunt, angulorum. Vt quadratum conſtituens primam figuram parium laterum, inſcribetur beneficio Iſoſcelis, cuius vterque angulorum ad baſin ſeſquialter eſt anguli ad verticem. Nam angulus ad verticem inſiſtit quartæ parti circumferentiæ. Cum enim duo anguli ad baſin ſimul contineant tres angulos æquales ei, qui ad verticem, quod quilibet ſemel eum contineat, & dimidiatum inſuper eius partem; ſubtendent ipſi tres partes circumferentiæ, & idcirco angulus ad verticem vnam duntaxat. Hexagonum, hoc eſt, ſecunda figura laterum parium, inſcribetur beneficio Iſoſcelis, cuius vterq; angulorum ad baſin duplus ſeſquialter eſt eius,

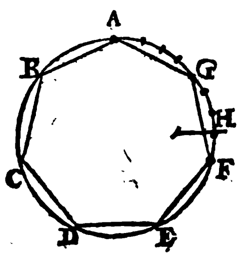
Digitized by Google

qui ad verticem, anguli. Nam angulus ad verticem, inſiſtit ſextæ parti circumferentiæ, cum reliqui anguli ſimul compoſiti contineant ipſum quinquies; propterea quod quilibet bis eum continet, & dimidiatam eius inſuper partem. Ita quoque Octogonum, id eſt, tertia figura laterum parium, inſcribetur beneficio Iſoſcelis habentis vtrumque angulorum ad baſin triplum ſeſquialterum anguli ad verticem.

SI igitur inuenta fuerit ars, qua Iſoſcelia triangula conſtruantur habentia angulos ad baſin multiplices eorum, qui ad verticem ſunt, angulorum, quemadmodum Euclides Iſoſceles fabricauit habens vtrumque angulorum ad baſin duplum anguli ad verticem, facilè in circulo deſcribentur figuræ omnes laterum imparium. Et ſi arcus earum diuidantur bifariam, inſcribentur quoque omnes figuræ parium laterum, poſt quadratum, atque adeo circumferentia cuiuslibet circuli in quotlibet æquales partes Geometricè diuidetur. Quæ res ſummam Aſtronomis afferret vtilitatem. Verum hæc ars adhuc ignota extitit. Non enim rectè ſibi eam vendicat Orontius Finæus in libello hactenus, vt ipſe ait, deſiderato de abſoluta figurarum rectilinearum omnium deſcriptione intra circulum, &c. cum eius demonſtrationes falſæ ſint, ac ſophiſticæ, vt Geometricè oſtenſum eſt à Petro Nonio Luſitano in libello de erratis Orontij.

NOS tamen ad finem lib. 6 ex Pappo Alexandrino lineam quandam inflexam Geometricè deſcribemus, qua non ſolum triangula Iſoſcelia, quorum anguli ad baſin ad reliquum habeant datam proportionem, conſtruantur, ac proinde omnes figuræ æquilateræ, & æquiangulæ in circulo deſcribantur: verum etiam arcus quiuis circuli diſtribuatur in quotcunque partes æquales, ſiue is quadrans ſit, ſiue non. Quin etiam eiuſdem lineæ inflexæ beneficio iucunda operatione circulus quilibet ſine vllo negotio in quadratum æquale commutabitur, vt ibidem dicemus. Quæ res ad hunc vſque diem animos Mathematicorum tenuit ſuſpenſos.

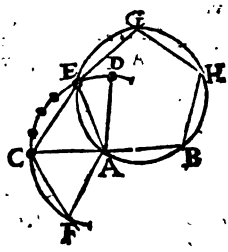
SED doceamus, ſi placet, qua etiam via figura quæuis æquilatera, & æquiangula circulo inſcribatur ſine triangulis Iſoſcelibus, quorum anguli ad baſin ad reliquum habeant proportionem datam. Sit ergo in circulo A B C D E F G, inſcribendum heptagonum æquilaterum, & æquiangulum. Secetur eius quadrans A H, in ſeptem partes æquales, in tot videlicet, quot latera, anguloſve figura inſcribenda continet. Secabis autem quadrantem A H, in propoſitas partes æquales vel ex ijs, quæ ad finem lib. 6. nos demonſtraturos diximus, vel beneficio circini, dilatando eius crura modo magis, modo minus, donec reperias eorum diſtantiam



partiri

partiri quadrantem in partes optatas. Facilius enim quadrans in quotuis æquales diuidetur partes, quàm tota circumferentia, quod ſæpius attentando, & quaſi repetendo opus, clarius appareat in parua magnitudine, quàm in magna, quantum detrahi, vel addi debeat parti vni beneficio circini accepta, ſi ea partem deſideratam non offerat. Secto quadrante in ſeptem partes æquales, vel in plures, ſi figura plurium laterum deſideretur, erit recta linea A G, quæ quatuor eiuſmodi partes ſubtendit, latus figuræ inſcribendæ. Quoniam enim in tota circumferentia quater tot partes æquales continentur, in quot quadrans diuiſus eſt, continebitur aggregatum ex quatuor partibus toties in tota circumferentia, quoties vna pars in quadrante: quia quælibet pars cum aliis tribus, quarum ſingulæ in ſingulis aliis tribus quadrantibus accipiantur, efficit aggregatum ex quatuor partibus. Quod etiam ita perſpicuum fiet. Quoniam partes eandem proportionem habent, quàm earum æquemultiplicia, vt ab Euclide demonſtratur lib. 5. propoſ. 15. (Liceat enim huc accommodare eam propoſ. cum ex antecedentibus nullo modo pendeat.) ita ſe habebit vna pars ad quadrantem, vt quadruplum vnius partis, hoc eſt, arcus A G, ad quadruplum quadrantis, id eſt, ad totam circumferentiam. Qualis ergo pars quadrantis eſt vna illarum, in quas quadrans diuiſus eſt, talis erit arcus A G, totius circumferentiæ. Atque ita ſi quadrans diuiſus ſit in 7. partes, continebuntur eiuſmodi partes 28. in tota circumferentia. Igitur 4. efficient $\frac{4}{28}$. hoc eſt, $\frac{1}{7}$. totius circumferentiæ. Ita quoque ſi quadrans ſectus ſit in 11. partes, continebuntur eiuſmodi partes 44. in tota circumferentia: atque adeo 4. efficient $\frac{4}{44}$. hoc eſt, $\frac{1}{11}$. totius circumferentiæ: & ſic de cæteris. Itaque ſi arcui A G, quatuor partium abſcindantur arcus continuè æquales, eiſdemque arcubus rectæ ſubtendantur, inſcripta erit circulo figura propoſita, vt ex demonſtratis liquet.

IAM verò ſi ſupra datam rectam lineam quæuis figura æquilatera, & æquiangula deſcribenda ſit; efficiemus id hac ratione. Sit ſupra datam rectam A B, conſtituendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Producta B A, ad C, vt A C, ipſi A B, æqualis ſit, deſcribatur ex A, per C, arcus circuli; ductaque A D, perpendiculari ad A C, vt quadrans ſit C D, ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. diuidatur quadrans C D, in quinque partes æquales, in tot videlicet, quot laterum figura conſtruenda ſit; quarum 4. ſint C E, iungaturque recta A E, quæ ipſi A B, æqualis erit. Dico angulum B A E, æqualem

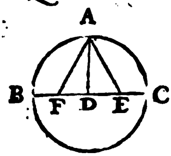


eſſe angulo pentagoni æquilateri & æquianguli. Sumpto enim arcu

C F, æqual

*C F, æquali arcui C E, iungantur rectæ C E, C F. Et quoniam C E, re-
cta ſubtendens 4. partes quadrantis, latus eſt pentagoni æquilateri
& æquianguli, vt proximè demonſtrauimus, in circulo E C F, deſcri-
bendi, erit C F, alterum latus; ac proinde duo latera E C, F C, com-
prehendent angulum pentagoni æquilateri & æquianguli E C F. Quo-
niam verò, ducta recta A F, duo latera E C, C A, duobus lateribus
a 8. pri. F C, C A, æqualia ſunt, & baſes item æquales A E, A F; a erunt an-
b 5. pri. guli E C A, F C A, æquales. Cum ergo, b & anguli A C E, A E C, ſint
æquales; erit & A C F, ipſi A E C, æqualis: additoque communi
A C E, totus angulus E C F, duobus angulis A C E, A E C, æqualis
c 32. pri erit. Eſt autem c externus B A E, eiſdem internis A C E, A E C,
mi. æqualis. Igitur & E C F, B A E, inter ſe æquales erunt. Cum ergo
E C F, ſit angulus pentagoni, erit quoque B A E, pentagoni angulus.
Quocirca ſi circa tria puncta B, A, E, circulus deſcribatur, & rectis
d 1. A B, A E, d rectæ æquales in eo accommodentur B H, H G, G E, de-
quarti. ſcriptum erit pentagonum æquilaterum & æquiangulum deſcriptum
in circulo A B H G E, ac proinde ſupra datam rectam A B. Quod fa-
ciendum erat. Non eſt autem dubitandum, quin rectis A B, A E,
æquales rectæ poſſint in circulo accommodari, quæ totam circumferen-
tiam abſoluant. Nam angulus pentagoni B A E, inſiſtit tribus quin-
tis partibus totius circumferentiæ, ſingula autem latera A B, A E, ſin-
gulas quintas partes ſubtendunt, ac proinde ſingula B H, H G, G E,
ſingulas quoque quintas partes ſubtendent, cum ipſis A B, A E, ſum-
pta ſint æqualia, proptereaque totum arcum B G E, continentem tres
quintas partes abſoluent. Eadem ratio eſt de aliis figuris æquilateris,
& æquiangulis.*

SI fortè in promptu habeamus aliquam figuram æquilateram, & æquiangulam, cui ſupra datam rectam lineam deſideramus conſtituere ſimilem, ſiue ea in circulo aliquo deſcripta ſit, ſiue non: ſatis erit vni eius angulo æqualem angulum conſtituere B A E, in extremo datæ lineæ A B. Si namque, poſita recta A E, æquali ipſi A B, per tria puncta B, A, E, circulus deſcribatur, perficiemus figuram propoſitam, vt ante diximus.



QVONIAM verò longa eſt, atque difficilis ea inſcriptio pentagoni æquilateri, & æquianguli in circulo, quam Euclides tradidit, placuit huic quarto libro annectere praxin quandam, qua vna eademq; opera Ptolemæus lib. 1. magnæ conſtructionis, in circulo dato inſcribit Pentagonum, & Decagonum æquilaterum, & æquiangulum. Sit enim datus circulus A B C, cuius centrum D; Ducta autem diametro B C, erigatur D A, perpendicularis ad B C. Deinde diuiſa ſemidiametro C D, biſariam in E, ducatur recta E A, cui æqualis abſcindatur E F. Itaque ſi ducatur recta A F, erit A F, latus Pentagoni, & D F, latus Decagoni

Digitized by Google

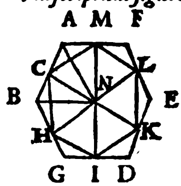
cagoni in dato circulo inſcribendi, vt ipſe demonſtrat. Cæterum cum demonſtratio huius rei pendeat ex 13. lib. Euclidis, non videtur hoc loco ſcribenda, ſed in proprium locum, vtpote in librum 13. differenda.

NON erit etiam præter inſtitutum noſtrum, aut ab hoc libro alienum, ſi ſequens adhuc theorema adiungamus, videlicet.

SI bifariæ ſectiones laterum figuræ æquilateræ, & æquiangulæ rectis coniungantur lineis, inſcripta erit figura æquilatera quoque & æquiangula totidem laterum in illa figura, idem centrum habens.

CENTRVM figuræ æquilateræ, & æquiangulæ appellatur punctum illud, è quo circulus figuræ inſcribitur, aut circumſcribitur: vt idem ſit centrum circuli, & figuræ.

SIT igitur figura æquilatera, & æquiangula A B C D E F, cuius latera bifariam ſecentur in G, H, I, K, L, M, iunctis rectis G H, H I, I K, K L, L M, M G. Dico figuram G H I K L M, inſcriptam figuræ A B C D E F, æquilateram eſſe quoque, atque æquiangulam, idemque centrum habere. Æquilatera quidem erit, quoniam eius latera cum ſubdant angulos æquales comprehenſos æqualibus rectis, vtpote dimidiis laterũ æqualium, a *æqualia ſunt. Quoniam verò tam tres anguli A M G, G M L, L M F, quã tres F L M, M L K, K L E,* b *duobus ſunt rectis æquales: Sunt autem A M G, L M F, F L M, K L E,* c *inter ſe æquales, cum æqualibus lateribus contineantur, ſubtendanturque à baſibus æqualibus; Erunt reliqui anguli G M L, M L K, æquales. Eodemque argumento concludemus, reliquos angulos & hiſce, & inter ſe æquales eſſe. Æquiangula igitur quoque eſt figura G H I K L M.*



a 4. pri.
b 13. primi.
c 8. pri.

QVOD autem idem habeat centrum, ita oſtendetur. Ex centro N, figuræ A B C D E F, ad omnes angulos figuræ inſcriptæ ducantur rectæ N G, N H, &c. iunganturque rectæ N A, N B. Quoniam igitur A G, G N, latera trianguli A G N, æqualia ſunt lateribus B G, G N, trianguli B G N; ſuntque baſes A N, B N, cum ſint ſemidiametri circuli circa figuram deſcripti, æquales: d *Æquales erunt anguli A G N, B G N, ideoque recti. Quare N G, perpendicularis eſt ad latus A B; Eodemque modo reliquæ N H, N I, &c. perpendiculares erunt ad latera B C, C D, &c. Quæ cum ex defin. 4. lib. 3. oſtendant diſtantias rectarum A B, B C, &c. æqualium à centro N;* e *æquales ad inuicem erunt. Circulus igitur ex N, interuallo N G, deſcriptus, per reliquos angulos H, I, K, L, M, incedet; Ac propterea N, centrum erit figuræ G H I K L M, hoc eſt, circuli circa eam figuram deſcripti. Quod eſt propoſitum.*

d 8. pri.
e 14. tertij.

NEQVE verò & hoc omittendum eſt, inter omnes figuras æquilateras

Digitized by Google

lateras, & æquiangulas, ſolum triangulum, quadratum, & hexagonum replere locum, hoc eſt, aliquot triangula, vel quadrata, vel hexagona, ita in plano poſſe inter ſe aptari, vt inter eorum angulos nihil ſit vacui, ſed planam ſuperficiem conſtituant. Nam ſex anguli in triangulo æquilatero, & quatuor in quadrato; & tres in hexagono æquilatero, & æquiangulo, æquales ſunt quatuor rectis, quantum nimirum eſt ſpatium circa punctum quodlibet in plano, vt ad propoſ. 15. lib. 1. oſtendimus. Quoniam enim vnius angulus trianguli æquilateri continet $\frac{2}{3}$. vnius recti, quòd omnes tres contineant $\frac{6}{3}$. vnius recti, hoc eſt, duos rectos, continebunt ſex eiuſmodi anguli $\frac{12}{3}$ vnius recti, id eſt, quatuor rectos. Item quatuor anguli in quadrato ſunt quatuor recti. Denique quia vnius angulus hexagoni æquilateri, & æquianguli continet $\frac{4}{3}$ vnius recti, quod omnes ſex contineant $\frac{24}{3}$ vnius recti, hoc eſt, 8. rectos, continebunt tres eiuſmodi anguli $\frac{12}{3}$. vnius recti, id eſt, 4. rectos. Quod in aliis figuris planis æquilateris, & æquiangulis non cernitur. Nam tres anguli in pentagono æquilatero, & æquiangulo æquales ſunt $\frac{18}{5}$. vnius recti, hoc eſt, angulis rectis $3\frac{3}{5}$. duntaxat, at quatuor æquales ſunt $\frac{24}{5}$. vnius recti, id eſt, angulis rectis $4\frac{4}{5}$. propterea quod omnes quinque æquiualent 6. rectis, hoc eſt, conſtituunt $\frac{30}{5}$. vnius recti, atque idcirco vnus continet $\frac{6}{5}$. vnius recti, &c. Tria igitur pentagona locum replere non poſſunt, cum trium in plano aptatorum tres anguli minores ſint quatuor rectis: quippe qui efficiant tantum tres angulos rectos cum tribus quintis. Eadem ratione quatuor pentagona locum replere nequeunt, propterea quòd quatuor in plano aptatorum quatuor anguli maiores ſunt quatuor rectis, cum æquales ſint quatuor angulis rectis, & inſuper quatuor quintis vnius recti, vt dictum eſt. Pari ratione neque ex heptagonis locus poterit repleri. Nam tres anguli cuiuslibet heptagoni æquilateri, & æquianguli æquales ſunt $\frac{30}{7}$. vnius recti, hoc eſt, angulis rectis $4\frac{2}{7}$. Quoniam enim omnes ſeptem anguli 10. rectis ſunt æquales, hoc eſt, complectuntur $\frac{70}{7}$. vnius recti; fit, vt vnus contineat $\frac{10}{7}$. vnius recti, hoc eſt, vnum rectum, & præterea $\frac{3}{7}$. vnius recti: ac proinde tres contineant quatuor rectos, & $\frac{2}{7}$. vnius recti. Non ergo tribus heptagonis in plano aptatis, eorum tres anguli locum replere poſſunt, cum quatuor rectos excedant. A fortiori neque quatuor heptagona locum replebunt: neque tria octogona æquilatera, & æquiangula, aut quatuor, neque tres aut quatuor figuræ æquilateræ, atque æquiangulæ plurium laterum, quàm octo, quippe cum ſemper tres anguli ſimul ſumpti ſint maiores quatuor rectis, propterea quòd maiores ſunt tribus angulis heptagoni æquilateri & æquianguli, quos oſtendimus quatuor rectis eſſe maiores. Solum ergo triangulum æquilaterum, quadratum, & hexagonum æquilaterum atque æquiangulum, ſuis angulis locum replere poſſunt, vt diximus.

FINIS ELEMENTI QVARTI.

Digitized by Google

EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVM.

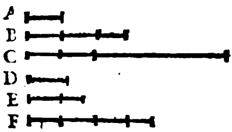
DEFINITIONES.

I.

PARS eſt magnitudo magnitudinis, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

EGIT in antecedentibus quatuor libris Euclides de quantitate continua abſolutè conſiderata; Nunc verò duobus ſequentibus de eadem diſputat non abſolutè, ſed prout vna ad aliam refertur, hoc eſt, quatenus comparata cum alia proportionem aliquam habet. Hoc quidem quinto libro docet proportiones quantitatum continuarum in genere, non deſcendendo ad vllam quantitatis ſpeciem, vt ad lineam, ſuperficiem, vel corpus aliquod. Sexto verò oſtendit in ſpecie, quamnam proportionem habeant inter ſe lineæ, anguli, circumferentiæ circulorum, triangula, & aliæ figuræ planæ. Vt igitur inſtitutum ſuum ſeruet, definit prius vocabula, quæ ad demonſtrationes proportionum adhibentur.

ITAQVE ait magnitudinem illam minorem, quæ maiorem quampiam magnitudinem metitur, appellari partem. Vt quoniam magnitudo A, ter ſumpta, metitur magnitudinem B; ſexies autem ſumpta, magnitudinem C, dicetur magnitudo A pars magnitudinum B, & C. At verò quia magnitudo D, non metitur magnitudines E, & F, ſed ſumpta bis, excedit magnitudinem E, & ſumpta ter, deficit à magnitudine F, ſumpta autem quater, eandem ſuperat; non appellabitur magnitudo D, pars magnitudinum E, & F.



DVPLEX

DVPLEX autem eſt pars apud Mathematicos: Quædam metitur ſuum totum, ita vt aliquoties repetita totum ſuum conſtituat; qualis eſt numerus 4. cum 8. 12. 16. 20. &c. collatus; Quædam autem non metitur ſuum totum, ſed aliquoties ſumpta ipſum vel excedit, vel ab eodem deficit: cuiuſmodi pars eſt numerus 4. collatus cum 6. 7. 9. 10. 18. 38. &c. Prior dici ſolet aliquota, poſterior autem aliquanta. Euclides igitur hoc loco definit partem aliquotam duntaxat, tum quia hæc ſolum metitur ſuum totum; (Aliquanta enim non dicitur metiri ſuum totum) tum etiam, quia vt ex lib. 7. conſtabit, pars aliquanta in numeris non dicitur ab Euclide pars, ſed partes. Nam numerus 4. non eſt pars huius numeri 6. ſed duæ partes tertiæ, quales ſunt duo binarij. Accedit etiam, quod in omnibus demonſtrationibus huius quinti libri pars ſumitur ab omnibus interpretibus pro parte aliquota. Vnde mirum ſane eſt, nonnullos interpretes Euclidis, inter quos eſt etiam Peletarius, contendere, partem hoc loco definiri, quatenus complectitur omnem partem tam aliquotam, quam aliquantam; cum tamen in demonſtrationibus etiam ipſi nomine partis intelligant partem aliquotam duntaxat.

II.

MVLTIPLEX autem eſt maior minoris, cum minor metitur maiorem.

VT in ſuperiori exemplo tam magnitudo B, quam magnitudo C. multiplex eſt magnitudinis A; quoniam hæc vtramque illam metitur. At verò neque magnitudo E, neque magnitudo F, multiplex eſt dicenda magnitudinis D; propterea quod hæc neutram illarum metitur. Itaque pars ad multiplex refertur, & multiplex ad partem, ita vt minor quantitas menſurans maiorem, dicatur pars maioris; Maior verò menſurata à minori, dicatur minoris multiplex.

SATIS autem perſpicuè ex hac definitione colligitur, partem antea definitam eſſe eam, quæ perfectè metitur ſuum totum. Si enim 6. diceretur metiri 7. vt vult Peletarius, eſſet iuxta hanc definitionem, 7. multiplex ipſius 6. quod eſt abſurdum.

CÆTERVM quando duæ magnitudines minores duas alias maiores æque metiuntur, hoc eſt, vna minor in vna maiore toties continetur, quoties altera minor in altera maiore; dicuntur duæ hæ maiores duarum illarum minorum æquemultiplices. Quod idem dices, ſi plures minores æquè metiantur plures maiores.

III.

RATIO eſt duarum magnitudinum eiuſdem generis mutua quædam, ſecundum quantitatē, habitudo.

QVANDO duæ quantitates eiuſdem generis, vt duo numeri, duæ li-

duæ lineæ, duæ ſuperficies, duo ſolida, &c. inter ſe comparantur ſecundum quantitatem, hoc eſt, ſecundum quod vna maior eſt, quam altera, vel minor, vel æqualis; appellatur huiuſmodi comparatio, ſeu habitudo mutua, Ratio ſeu (vt aliis placet) Proportio. Itaque ſi comparetur linea aliqua cum ſuperficie quapiam, vel numerus cum linea, non dicetur ea comparatio proportio, quod neque linea, & ſuperficies, neque numerus, & linea ſint eiuſdem generis quantitatis. Similiter ſi conferatur linea aliqua cum alia linea ſecundum qualitatē, hoc eſt, ſecundum quod vna eſt alba, & altera nigra; aut quod vna eſt calida, & altera frigida, &c. quamuis ambæ ſint eiuſdem generis, non dicetur ea comparatio proportio, quia non fit ſecundum quantitatem.

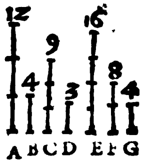
QVAMQVAM autem in ſolis quantitatibus propriè reperitur proportio; tamen omnia alia, quæ aliquo modo naturam ſapiunt quantitatis, cuiuſmodi ſunt tempora, ſoni, voces, loca, motus, pondera, & potentia, proportionem quoque dicuntur habere, ſi eorum habitudo conſideretur ſecundum quantitatem. Vt cum dicimus, tempus tempore eſſe maius, vel minus, vel duo tempora eſſe æqualia, &c. appellabitur eiuſmodi habitudo, proportio; quoniam tempora tunc conſiderantur, veluti quantitates quædam.

CÆTERVM in omni proportione ea quantitas, quæ ad aliam refertur, dicitur ab Euclide, & Geometris aliis antecedens proportionis; Ea verò, ad quam alia refertur, conſequens proportionis dici ſolet. Vt in proportione lineæ 6. palmorum ad lineam 3. palmorum, linea 6. palmorum dicitur antecedens proportionis, at linea 3. palmorum, proportionis conſequens. Quod ſi è contrario conſideretur proportio lineæ 3. palmorum ad lineam 6. palmorum, appellabitur antecedens linea 3. palmorum, conſequens verò linea 6. palmorum, & ſic in cæteris.

IV.

PROPORTIO verò eſt rationum ſimilitudo.

QVOD hoc loco interpres proportionem appellat, illud Græcè ἀναλογία, pleriſque autem Latinis proportionalitas dicitur. Quemadmodum igitur comparatio duarum quantitatum inter ſe, dicitur proportio; Ita comparatio duarum, vel plurium proportionum inter ſe, proportionalitas ſolet nuncupari. Vt ſi proportio quantitatis A, ad quantitatem B, ſimilis fuerit proportioni quantitatis C, ad quantitatem D, dicetur habitudo inter has proportiones, proportionalitas. Eodem modo, ſi ſimilis fuerit proportio E, ad F, proportioni F, ad G, appellabitur hæc ſimilitudo proportionalitas.



Multæ autem habitudines proportionum, ſeu proportionalitates, (Nos enim cum pluribus comparationem duarum quantitatum, proportionem appellabimus: habitudinem autem

proportionum, Proportionalitatem) à ſcriptoribus, præſertim Boëtio & Iordano, deſcribuntur; inter quas primum ſemper locum obtinuerunt apud Veteres, Proportionalitas Arithmetica, Geometrica, atque Muſica, ſeu Harmonica, de quibus paulò poſt dicemus. Verum Euclides de ſola Geometrica agit hoc libro; quæ quidem duplex eſt, continua altera, in qua ſingulæ quantitates intermediæ bis ſumuntur, ita vt nulla fiat proportionum interruptio, ſed quælibet quantitas intermedia ſit & antecedens, & conſequens; Antecedens quidem quantitatis ſubſequentis, conſequens verò quantitatis antecedentis. Vt ſi dicatur, quæ eſt proportio E, ad F, ea eſt F, ad G; vocabitur hæc proportionalitas, continua. Altera verò diſcreta, ſeu non continua, in qua ſingulæ quantitates intermediæ ſemel tantum accipiuntur, ita vt fiat proportionum interruptio, nullaque quantitas ſit & antecedens, & conſequens, ſed vel antecedens tantum, vel conſequens tantum. Vt ſi dicatur, quæ eſt proportio A, ad B, ea eſt C, ad D; appellabitur proportionalitas hæc, diſcreta, ſiue non continua.

DE PROPORTIONIS Diuiſionibus.

OPERAE *pretium eſſe arbitror, paucis hoc loco exponere, quotnam ſint genera proportionum apud Mathematicos, & quænam ſint præcipuæ proportionalitates, earumque proprietates, vel ob hanc præcipuè vtilitatem, vt ea, quæ his duobus libris ab Euclide demonſtrantur de proportionibus magnitudinum, rebus poßint materialibus accommodari, quando opus fuerit, & tum ea, quæ à Mathematicis de proportionibus dicuntur, tum ea, quæ à Philoſophis cum Ariſtotele de proportione motuum diſputantur, intelligi. Vt autem maior vtilitas, ac voluptas ex admirabilibus proportionum affectionibus percipi poßit, inſtituemus paulo vberiorem tractationem in hac poſteriori editione, quam in priori: reiicientes nihilominus innumera propemodum, quæ dici poſſent, in pleniorem noſtram Arithmeticam, vbi omnia genera Proportionalitatum diligentiſſimè perſequemur.*

PROPORTIO *igitur ab Euclide definita diuiditur in proportionem rationalem, & irrationalem. Rationalis eſt ea, quæ in numeris poteſt exhiberi. qualis eſt proportio lineæ 20. palmorum, ad lineam 10. palmorum. Hæc enim proportio in hiſce numeris 20. & 10. oſtenditur. Irrationalis verò proportio ea eſt,*

Digitized by Google

ta eſt, quæ in numeris exhiberi nequit, qualis eſt proportio diametri cuiuslibet quadrati ad latus eiuſdem quadrati. Hæc enim proportio in numeris reperiri non poteſt, vt in 10. *lib. ab Euclide demonſtratur. Alii dicunt, proportionem rationalem eam eſſe, quam habent quæuis duæ quantitates commenſurabiles: Irrationalem vero eam, quam habent duæ quælibet quantitates incommenſurabiles. Dicuntur autem quantitates incommenſurabiles, quæ habent vnam communem partem aliquotam ſeu quas eadem menſura communis metitur. Cuiuſmodi ſunt linea* 20. *palmorum, & linea* 8. *palmorum. Nam linea* 4. *palmorum eſt vtriuſque pars aliquota, ſimiliter linea* 2. *palmorum. Sicut enim linea tam* 4. *quam* 2. *palmorum metitur lineam* 20. *palmorum; ita quoque eadem linea tum* 4. *tum* 2. *palmorum lineam* 8. *palmorum menſurat. Non aliter omnes numeri, commenſurabiles dicentur, quia ſaltem vnitas omnes metitur. Quantitates vero incommenſurabiles dicuntur, quæ nullam habent communem partem aliquotam, ſeu quarum nullam menſuram communem contingit reperiri. Cuiuſmodi ſunt diameter, & latus eiuſdem quadrati. Quamuis enim quælibet harum linearum infinitas habeat partes aliquotas, vtpote partem dimidiatam, tertiam, quartam, &c. Tamen nulla pars aliquota vnius, quantumuis minima, alteram metiri poteſt, vt demonſtratur ab Euclide lib.* 10. *propoſ. vltima. Quo in lib. multæ aliæ lineæ incommenſurabiles oſtenduntur, præter illas duas. Itaque in numeris inuenitur ſola proportio rationalis; At in quantitate continua tam rationalis, quam irrationalis proportio continetur.*

ALIO modo diuidi ſolet Proportio in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Æqualitatis proportio, eſt inter duas quantitates æquales, vt inter 20. *&* 20. *Inter* 100. *&* 100. *Inter lineam* 10. *palmorum, & lineam* 10. *palmorum, &c. Inæqualitatis vero proportio inter duas quantitates inæquales reperitur, vt inter* 20. *&* 10. *inter* 8. *&* 40. *inter lineam* 6. *palmorum, & lineam* 2. *palmorũ, &c. Habent autem hæc duo proportionum genera cum ſuperioribus duobus eam cõnexionem, vt omnis proportio æqualitatis ſit neceſſario rationalis, ſed non contra. Omnis item proportio irrationalis neceſſario ſit ꝓportio in-*

Digitized by Google

æqualitatis, ſed non contra. Ex quo manifeſtum eſt minus rectè à quibuſdam diuidi proportionem rationalem, in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Quamuis enim omnis proportio rationalis ſit neceſſario æqualitatis, inæqualitatisve, non tamen contra omnis proportio huiuſmodi eſt rationalis; cum multæ proportiones inæqualitatis ſint irrationales. Pari ratione perſpicuum eſt, quoſdam non ſatis rectè diſtribuere proportionem inæqualitatis, in proportionem rationalem & irrationalem. Quamuis enim omnis proportio inæqualitatis ſit neceſſario rationalis, irrationalisve, non tamen omnis huiuſmodi proportio è contrario eſt proportio inæqualitatis: cum multæ proportiones rationales ſint proportiones æqualitatis. Rectius igitur meo iudicio duplici diuiſione ſecanda eſt proportio in genere, priori quidem in proportionem rationalem, & irrationalem; Poſteriori verò in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis, vt à nobis factum eſt. Ita enim membra diuidentia cum Diuiſo (vt cum Dialecticis loquamur) in vtraque diuiſione reciprocantur. Scio rectè poſſe ſubdiuidi tam proportionem rationalem in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis; quam proportionem inæqualitatis in proportionem rationalem, & irrationalem; ſi in vtraque diuiſione ſubintelligatur Diuiſum. Sed cur duplicem noſtram diuiſionem, qua proportio in tota ſua latitudine diuiditur, vtrique harum ſubdiuiſionum prætulerim, ſupra expoſui in reſponſione ad Apologiam Peletarii.

RVRSVS proportio inæqualitatis (Reliquimus enim æqualitatis proportionem, quoniam amplius ſubdiuidi nequit, cum quæcunque quantitates æquales ſiue magnæ, ſiue paruæ fuerint, eandem ſemper habeant proportionem æqualitatis) ſubdiuiditur in proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis: Maioris inæqualitatis proportio eſt, quando maior quantitas cum minore confertur; qualis eſt proportio 20. ad 10. Item linea 8 pedum ad lineam 6. pedum, &c. Proportio minoris inæqualitatis eſt, quando minor quantitas ad maiorem refertur; qualis eſt proportio 10. ad 20. Item linea 6. pedum ad lineam 8. pedum, &c. Non eſt autem hæc diuiſio inanis, & ſuperuacanea, vt multi ſuſpicantur. Neque enim eadem eſt proportio

4. ad 2.

Digitized by Google

4. ad 2. quæ 2. ad 4. ſed multum inter ſe differunt, cum valde diuerſus ſit vſus vtriuſque, vt perſpicuum eſt iis, qui vel mediocriter in rebus Geometricis, & regula Algebræ ſunt verſati. Hæ igitur ſunt generales diuiſiones proportionis, prout complectitur omnes proportiones, nulla ſecluſa: Nunc *autem tam proportionem maioris inæqualitatis, quam minoris inæqualitatis, quatenus ſolas proportiones rationales comprehendunt, ſubdiuidemus; quoniam de quantitatibus, quæ habent proportiones irrationales, in* 10. *lib. eſt ſermo futurus.*

PROPORTIO *ergo rationalis maioris inæqualitatis, diſtribuitur in quinque genera, vt in proportionem multiplicem, ſuperparticularem, ſuperpartientem, multiplicem ſuperparticularem, & multiplicem ſuperpartientem. Pari ratione proportio rationalis minoris inæqualitatis in eadem genera ſecatur, ſi modo ſingulis vocabulis præponatur præpoſitio (ſub) vt in proportionem ſubmultiplicem, ſubſuperparticularem, ſubſuperpartientem, ſubmultiplicem ſuperparticularem, & ſubmultiplicem ſuperpartientem. Horum autem quinque generum priora tria ſunt ſimplicia, poſteriora verò duo ex illis tribus compoſita, vt manifeſtum eſt. Cur verò tantum ſint quinque hæc genera proportionis rationalis tam maioris, quàm minoris inæqualitatis, poſt explicationem omnium harum quinque proportionum oſtendemus.*

DE PROPORTIONE MVLTIPLICI.

PROPORTIO *Multiplex eſt habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, vt bis, ter, decies, centies, &c. continet: ita vt minor maiorem metiatur: qualis eſt proportio numeri* 20. *ad* 4. *Nam numerus* 20. *comprehendit* 4. *quinquies. Item proportio lineæ* 30. *pedum ad lineam* 5. *pedum, &c.*

HAEC *autem ſub ſe continet infinita genera. Si enim proportionis multiplicis maior quantitas minorem bis tantum continet, dicitur proportio dupla: ſi ter, tripla: ſi decies, decupla, ſi centies, centupla, &c.*

EX *his facilè omnes ſpecies proportionis multiplicis definiemus. Nam proportio octupla nil erit aliud, quam habitudo ma-*

Digitized by Google

ioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem octies complectitur. Eodemque modo deſiuiendæ erunt reliquæ proportiones multiplices: vt proportio quintupla, qualis eſt 40. ad 8. dicetur ea, cuius maior quantitas minorem continet quinquies. Item proportio dupla lineæ 10. cubitorum ad lineam 5. cubitorum ea, in qua maior quantitas minorem bis comprehendit, & ſic de reliquis.

CÆTERVM omnes proportiones multiplices in numeris integris, hoc eſt, omnes numeros multiplicem habentes proportionem, inuenies hoc modo. Accipe numerum, qui indicat, quoties maior numerus minorem in data proportione multiplici continet. Is enim ad vnitatem habet primam proportionem multiplicem, quæ inueſtigatur: hoc eſt, numerus ille, & vnitas ſunt primi, ac minimi numeri, inter quos propoſita proportio multiplex reperitur. Atq; numerus ille idem, atq; vnitas dicuntur ab Arithmeticis termini eius proportionis multiplicis, quæ proponitur. Inuentis hiſce terminis, inter quos prima proportio multiplex propoſita reperitur, ſi vterque duplicetur, producentur duo numeri habentes ſecundam proportionem multiplicem propoſitam: ſi vterque idem triplicetur, procreabuntur numeri tertiæ proportionis multiplicis propoſitæ: ſi vterque quadruplicetur, exurgent numeri quartæ proportionis multiplicis quæſitæ. Atque ita ſi iidem termini per quemuis numerum multiplicentur, producentur duo numeri proportionis multiplicis propoſitæ, quæ eum locum inter omnes proportiones multiplices illius ſpeciei obtinet, quem numerus, qui vtrumque terminum multiplicauit, indicat: Adeo vt, ſi multiplicatio fiat per 100. procreentur duo numeri obtinentes centeſimum locum inter omnes numeros propoſitam proportionem habentes.

EXEMPLI gratia. Quærantur omnes numeri proportionis quintuplæ. Et quoniam maior numerus minorem continet quinquies in quintupla proportione, erit prima proportio quintupla inter 5. & 1. qui duo termini ſi ducantur in 2. reperietur ſecunda proportio quintupla inter 10. & 2. Si iidem termini per 3. multiplicentur, procreabuntur numeri 15. & 3. tertiæ proportionis quintuplæ: Et ſic deinceps. Itaque ſi decima proportio quintupla quæratur, ducendi erunt duo primi termini inuenti 5. & 1. per 10. ſi verò milleſima reperienda ſit, multiplicandi erunt iidem termini per 1000. &c.

OMNES item numeri cuiuſque proportionis multiplicis reperientur hoc modo. Conſtituantur duæ ſeries numerorum in infinitum progredientes: quarum inferior ab vnitate incipiat, & per ſeriem naturalem numerorum progrediatur; ſuperior autem ab eo numero, qui ſignificat, quoties maior numerus minorem in data proportione continet, initium ducat, progrediaturque per continuam additionem eiuſdem nu-

Digitized by Google

dem numeri, primum ad ſeipſum, deinde ad conflatum numerum, &c. Nam ſuperioris ordinis numeri ad numeros ordinis inferioris, vt primus ad primum, ſecundus ad ſecundum, tertius ad tertium, &c. habent omnes proportiones multiplices ſpeciei propoſitæ. Exempla hæc habes in proportionibus quintuplis, ſeptuplis, & decuplis.

Proportiones quintuplæ.

5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	40.	45.	50.	55.	60.	65.	70.	75.	80.	&c.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	&c.

Proportiones ſeptuplæ.

7.	14.	21.	28.	35.	42.	49.	56.	63.	70.	77.	84.	91.	98.	105.	&c.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	&c.

Proportiones decuplæ.

10.	20.	30.	40.	50.	60.	70.	80.	90.	100.	110.	120.	130.	140.	&c.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	&c.

DE PROPORTIONE.

PROPORTIO *ſuperparticularis eſt habitudo maioris quantitatis ad maiorem, quando maior minorem ſemel duntaxat continet, & inſuper vnam eius partem aliquotam, ſcilicet dimidiatam, tertiam, quartam, &c. Qualis eſt proportio 3. ad 2. Nam 3. continent 2. ſemel, & inſuper vnitatem, quæ dimidiata pars eſt numeri 2. Ita quoque linea 12. pedum ad lineam 9. pedum, proportionem habet ſuperparticularem, quia prior linea continet poſteriorem ſemel, & inſuper lineam 3. pedum, quæ tertia pars eſt lineæ 9. pedum, &c.*

HAEC *quoque proportio in infinita genera diuiditur. Si enim illa pars aliquota contenta in maiori quantitate, eſt dimidiata pars minoris quantitatis, conſtituitur proportio ſeſquialtera; ſi eſt tertia pars, exurgit proportio ſeſquitertia; ſi quarta, ſeſquiquarta; ſi milleſima, ſeſquimilleſima, &c.*

VNDE *ex ipſomet vocabulo faciles erunt definitiones omnium proportionum ſuperparticularium. Erit enim proportio ſeſquioctaua, quando maior quantitas minorem ſemel includit, & inſuper octauam partem minoris: qualis eſt inter 9. & 8. Item inter 45. & 40. Idem habeto de reliquis iudicium.*

INVENIENTVR omnes proportiones ſuperparticulares, ſiue omnes numeri, inter quos proportio ſuperparticularis quæcunque reperitur, hoc modo. Accipiatur numerus, qui partem aliquotam in proportione expreſſam denominat. Ad eum enim numerus proximè maior, qui videlicet eum vna ſola vnitate ſuperat, habebit primam proportionem ſuperparticularem propoſitam, ita vt in minoribus numeris ea proportio reperiri nequeat. Hi duo numeri, qui termini datæ proportionis dicuntur, ſi duplicentur, triplicentur, vel per quemcunque alium numerum multiplicentur, gignentur alij numeri eandem proportionem habentes, nimirum ſecundam, tertiam, vel eam, quam numerus multiplicans indicat.

VERBI cauſa. Si quærantur omnes proportiones ſeſquiſeptimæ, quoniam hic exprimitur pars ſeptima, erit 7. minor terminus huius proportionis, maior autem erit 8. vna vnitate illum ſuperans: atque inter 8. & 7. prima proportio ſeſquiſeptima exiſtit. Qui duo termini ſi duplicentur, procreabuntur hi alij duo numeri 16. & 14. inter quos ſecunda proportio ſeſquiſeptima cernitur: ſi triplicentur, erit tertia proportio eadem inter 24. & 21. Si denique centeſima proportio eadem quæratur, ducendi erunt termini inuenti 8. & 7. per 100. vt gignantur numeri 800. & 700.

NVMERI quoque omnes cuiuſque proportionis ſuperparticularis comperientur, ſi conſtituantur duo ordines numerorum, quorum inferior à numero partem aliquotam denominante incipiat, ſuperior verò à numero proximè maiore: vterque verò per continuam additionem numeri, à quo initium ſumit, primum ad ſe, deinde ad conflatum numerum, &c. progrediatur. Exempla hic poſuimus in proportionibus ſeſquialteris, ſeſquiſeptimis, & ſeſquidecimis.

Proportiones ſeſquialteræ.

3.	6.	9.	12.	15.	18.	21.	24.	27.	30.	33.	36.	39.	42.	45.	&c.
2.	4.	6.	8.	10.	12.	14.	16.	18.	20.	22.	24.	26.	28.	30.	&c.

Proportiones ſeſquiſeptimæ.

8.	16.	24.	32.	40.	48.	56.	64.	72.	80.	88.	96.	104.	112.	120.	&c.
7.	14.	21.	28.	35.	42.	49.	56.	63.	70.	77.	84.	91.	98.	105.	&c.

Proportiones ſeſquidecimæ.

11.	22.	33.	44.	55.	66.	77.	88.	99.	110.	121.	132.	143.	154.	&c.
10.	20.	30.	40.	50.	60.	70.	80.	90.	100.	110.	120.	130.	140.	&c.

DE PROPORTIONE SVPERPARTIENTE.

PROPORTIO ſuperpartiens eſt habitudo maioris quan-

titatis

Digitized by Google

titatis ad minorem, quándo maior minorem ſemel duntaxat continet, & inſuper aliquot eius partes aliquotas, non efficientes vnam aliquotam. Qualis eſt proportio 8. ad 5. Nam 8. continent ſemel 5. & inſuper tres vnitates, quarum qualibet eſt pars aliquota, vtpote quinta, huius numeri 5. ipſe autem ternarius ex illis compoſitus, non eſt pars vna aliquota numeri 5. Dixi partes illas aliquotas non debere conſtituere vnam partem aliquotam, ob multas proportiones, quæ primo aſpectu videntur eſſe ſuperpartientes, cùm tamen ſint ſuperparticulares; cuiuſmodi proportio eſt inter 10. & 8. Quanquam enim 10. contineant ſemel 8. & duas inſuper vnitates, quarum qualibet eſt octaua pars numeri 8. quia tamen binarius ex illis vnitatibus compoſitus, eſt quarta pars 8. non dicenda eſt ea proportio ſuperpartiens, ſed ſuperparticularis, nempe ſeſquiquarta. Itaque vt duæ quantitates dicantur habere proportionem ſuperpartientem, neceſſe eſt, vt maior quantitas minorem contineat ſemel, & plures eius partes aliquotas, quæ ſimul ſumptæ non conſtituant vnam aliquotam. Quod quidam non aduertentes, mirum in modum genera proportionum inter ſe confundunt.

DIVIDITVR primùm proportio ſuperpartiens, habita ratione numeri partium aliquotarum, in genera infinita. Si enim maior quantitas minorem ſemel comprehendit, & duas eius partes aliquotas non conſtituentes vnam, conficitur proportio ſuperpartiens; ſi tres partes aliquotas, ſupertripartiens; ſi decem, ſuperdecupartiens, &c.

DIVIDITVR deinde quodlibet horum generum, habita ratione denominationis partium aliquotarum, in infinita adhuc genera. Nam proportio ſuperbipartiens inter duas quantitates inæquales, quarum maior continet minorem ſemel, & duas eius partes tertias, dicitur ſuperbipartiens tertias. Quod ſi duæ illæ partes fuerint quintæ, appellabitur ſuperbipartiens quintas, & ita de reliquis proportionibus ſuperbipartientibus. Pari ratione ſuperdecupartiens proportio inter duas quantitates inæquales, quarum maior excedit minorem decem partibus vndecimis, appellabitur ſuperdecupartiens vndecimas. Quod ſi decem illæ partes ſint decimætertiæ, vocabitur proportio ſuperdecupar-

Digitized by Google

tiens decimaſtertias; & ſic de reliquis omnibus ſuperdecupartientibus proportionibus.

NE *autem proportiones ſuperpartientes vel inter ſe confundantur, vel cum proportionibus ſuperparticularibus, quod à pleriſque factum eſſe deprehendimus, diligenter conſideranda ſunt ea, quæ ſequuntur. Primum, in pronunciatione cuiuſcunq; proportionis ſuperpartientis, duos indicari numeros, quorum alter monſtrat, quotnam partes aliquotæ minoris quantitatis in maiore ſuperſint; alter verò, quotæ partes eæ ſint, aut quantæ, indicat. Vt in proportione ſupertripartiente octauas, denotantur duo hi numeri 3. & 8. quorum prior ſignificat, maiorem quantitatem dictæ proportionis continere ſemel minorem, & adhuc tres eius partes aliquotas, exprimiturque ſyllaba illa (tri) quando dicitur, ſupertripartiens: poſterior autem per vocem (octauas) expreſſus oſtendit, illas tres partes aliquotas eſſe partes octauas minoris. Deinde in qualibet proportione ſuperpartiente duos prædictos numeros, (qui quidem facilè ex ipſa proportionis prolatione cognoſcuntur, vt ex proximo exemplo patet) eiuſmodi eſſe debere, vt non habeant vllam partem aliquotam communem, præter vnitatem, quæ quidem eſt omnium numerorum pars aliquota: hoc eſt, vt ſint inter ſe primi Numeros enim, qui præter vnitatem nullam aliam partem aliquotam communem admittunt, dicunt Arithmetici cum Euclide, primos inter ſe, vt ex lib. 7. conſtabit. Tales ſunt duo illi numeri 3. & 8. in ſuperiori proportione ſupertripartiente octauas expreßi. Nam ſola vnitas, vt conſtat, eſt vtriuſque pars communis aliquota. Quare rectè denominabimus proportionem inter 11. & 8. ſupertripartientem octauas: qualis etiam eſt inter 22. & 16. Non autem rectè appellabitur proportio poſterior inter 22. & 16. ſuperſextupartiens ſextasdecimas, quamuis maior minorem contineat ſemel, & inſuper ſex vnitates, quarum qualibet decimaſexta pars eſt minoris: Non, inquam, rectè ſic appellabitur; quia duo numeri 6. & 16. in ea expreßi, habent partem aliquotam 2. per quam, vt in Arithmetica traditur, reducuntur $\frac{6}{16}$. ad $\frac{3}{8}$. atque ita proportio ea dicenda eſt, ſupertripartiens octauas. Sic etiam non rectè vocabitur proportio inter 9. & 6. ſupertripartiens ſextas,*

quo-

quoniam duo numeri in ea notati 3. & 6. habent præter vnitatem, aliam communem menſuram, videlicet 3. Nam ternarius ſemel ſumptus, ſeipſum, & bis repetitus, ſenarium metitur, ac proinde $\frac{3}{6}$. reducentur per partem aliquotam communem 3. ad $\frac{1}{2}$. Quocirca talis proportio nuncupanda erit ſeſquialtera, cùm maior quantitas contineat ſemel minorem, & eius partem dimidiatam. Eadem ratione non rectè dicetur proportio inter 10. & 6. ſuperquadripartiens ſextas, quia duo numeri in ea notati 4. & 6. habent 2. communem partem aliquotam, præter vnitatem; atque ita dicenda erit talis proportio, ſuperbipartiens tertias, cùm maior quantitas contineat minorem ſemel, & duas eius partes tertias. Ex his igitur non difficile erit vnicuique, denominare conuenienter omnes proportiones ſuperpartientes.

PERSPICVVM etiam ex dictis relinquitur, cur proportionem ſuperbipartientem diuiſerimus paulò antè, in proportionem ſuperbipartientem tertias, quintas, ſeptimas, nonas, &c. prætereuntes ſuperbipartientem quartas, ſextas, octauas, decimas, &c. Cùm enim hæ poſteriores omiſſæ, ſint ſuperparticulares, propterea quòd $\frac{2}{4}$. faciunt $\frac{1}{2}$. & $\frac{2}{6}$. conſtituunt $\frac{1}{3}$. & $\frac{2}{8}$. efficiunt $\frac{1}{4}$. denique $\frac{2}{10}$. æquiualent $\frac{1}{5}$, confunderentur proportiones ſuperpartientes cum proportionibus ſuperparticularibus, ſi & ipſæ in numerum proportionum ſuperbipartientium referrentur. Quo modo autem dignoſcendum ſit, an duo quilibet numeri propoſiti habeant, præter vnitatem, aliquam aliam partem communem aliquotam, nec ne, in Arithmetica docetur, demonſtrabiturque ab Euclide, ad initium libri 7.

INVENTIO omnium proportionum ſuperpartientium cuiuſque ſpeciei ſic ſe habet. Numerus tot vnitatibus maior denominatore partium aliquotarum, quæ in proportione nominantur, quot partes in eadem proportione exprimuntur, habebit primam proportionem ſpeciei propoſitæ ad numerum eaſdem partes aliquotas denominantem. Qui duo termini duplicati, triplicati, vel per quemuis numerum multiplicati, gignent ſecundos numeros eandem proportionem habentes, tertios, vel alios, vt ſuprà dictum eſt. VERBI gratia. ſi inquirendi ſint omnes numeri proportionis ſupertripartientis decimas, erunt primi huiuſmodi numeri, 13 & 10. quia maior ſuperat minorem, qui partes decimas denominat, tribus vnitatibus, quot videlicet partium decimarum mentio fit, in proportione ſu-

pertri-

pertripartiente decimas. Dupli eorum, qui nimirum ſecundam proportionem conſtituunt; ſunt 26. & 20. Tripli, 39. & 30. Centeſima autem eiuſmodi proportio erit 1300. ad 1000. cùm hi numeri centupli ſint terminorum 13. & 10. qui primo loco inuenti ſunt.

EOSDEM numeros omnium proportionum ſuperpartientium reperies, ſi ſtatuas duos numerorum ordines, quorum inferior incipiat à partium aliquotarum denominatore; ſuperior autem à numero, qui numero partium nominatarum priorem illum ſuperat: Vterque deinde ordo progrediatur per continuam additionem primi numeri ſui ordinis ad ſeipſum, & ad numeros conflatos, Vt ſuprà diximus. Exempla hîc adiecimus proportionum ſuperbipartientium quintas, ſuperoctupartientium nonas, & ſuperſeptupartientium decimas.

Proportiones ſuperbipartientes quintas.

7.	14.	21.	28.	35.	42.	49.	56.	63.	70.	77.	84	91.	98.	&c.
5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	40.	45.	50.	55.	60.	65.	70.	&c.

Proportiones ſuperoctupartientes nonas.

17.	34.	51.	68.	85.	102.	119.	136.	153.	170.	187.	&c.
9.	18.	27.	36.	45.	54.	63.	72.	81.	90.	99.	&c.

Proportiones ſuperſeptupartientes decimas.

17.	34.	51.	68.	85.	102.	119.	136.	153.	170.	187.	&c.
10.	20.	30.	40.	50.	60.	70	80.	90.	100.	110.	&c.

DE PROPORTIONE MVLTIplici ſuperparticulari.

PROPORTIO multiplex ſuperparticularis eſt habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, vt bis, ter, vel quater, &c. continet, & præterea vnam eius partem aliquotam. Cuiuſmodi eſt proportio 9. ad 4. Continent enim 9. bis 4. (quæ ex parte proportio hæc cum multiplici conuenit, vtpote cum dupla) & inſuper comprehendunt vnitatem, quæ eſt quarta pars numeri minoris; (quæ in re proportioni ſuperparticulari, nimirum ſeſquiquarta, eadem proportio propoſita ſimilis eſt.) vt rectè proportio hæc compoſita dicatur ex multiplici, & ſuperparticulari.

DIVIDITVR autem proportio hæc, habita ratione proportionis multiplicis, in genera infinita, veluti multiplex. Vt in duplam

Digitized by Google

duplam ſuperparticularem; triplam ſuperparticularem, &c. prout maior quantitas minorem bis comprehendit, aut ter, quaterve, &c. & inſuper vnam partem minoris quantitatis aliquotam.

VNVMQVODQVE rurſus horum generum in infinita alia ſubdiuiditur, habita ratione proportionis ſuperparticularis. Nam proportio, v. g. tripla ſuperparticularis continet ſub ſe triplam ſeſquialteram, (quando ſcilicet maior quantitas minorem ter continet, & præterea dimidiatam eius partem;) triplam ſeſquitertiam; triplam ſeſquiquartam, & ita infinitas alias.

REPERIEMVS verò omnes proportiones multiplices ſuperparticulares cuiuslibet ſpeciei, ſi aduertimus diligenter denominatorem partis aliquotæ, & proportionis multiplicis, quarum in propoſita proportione mentio fit. Nam ſi denominatorem partis aliquotæ per denominatorem multiplicis proportionis multiplicemus, productoque numero adijciamus vnitatem, habebit hic numerus conflatus ad denominatorem partis aliquotæ primam proportionem ſpeciei propoſitæ. Et hi duo numeri duplicati, triplicati, vel per quemuis numerum multiplicati dabunt alios in eadem proportione numeros, nimirum ſecundos, tertios, vel alterius ordinis, pro numero vnitatum, quæ in numero multiplicante continentur, vt in alijs dictum eſt. EXEMPLI gratia, ſi inueniendi ſint omnes numeri proportionis ſextuplæ ſeſquinonæ, ducemus 9. denominatorem partis nonæ in 6. denominatorem multiplicis proportionis, productoq; numero 54. addemus 1. Conflatus namque numerus 55. ad 9. denominatorem partis nonæ expreſſè habet primam proportionem ſextuplam ſeſquinonam, ita vt in minoribus numeris integris ea dari nequeat. Dupli horum numerorum 110. & 18. erunt ſecundi numeri in eadem proportione. Tripli verò 165. & 27. erunt tertij, &c. ita vt eorundem centupli 5500. & 900. exhibeant centeſimam proportionem eandem.

EASDEM proportiones multiplices ſuperparticulares inuenies, ſi conſtituas duas ſeries numerorum, quarum inferior incipiat à denominatore partis aliquotæ nominatæ, ſuperior autem à numero conflato ex vnitate, & numero producto ex multiplicatione denominatoris partis aliquotæ eiuſdem in denominatorem proportionis multiplicis expreſſæ: Vterque verò ordo per continuam additionem primi numeri ſui ordinis ad ſeipſum, & ad conflatum numerum, &c. progrediatur, vt in ſuperioribus dictum eſt. Exempla hic vides proportionis duplæ ſeſquialteræ, triplæ ſeſquiſeptimæ, & decuplæ ſeſquitertiæ.

Propor-

Proportiones duplæ ſeſquialteræ.

5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	40.	45.	50.	55.	60.	65.	70.	&c.
2.	4.	6.	8.	10.	12.	14.	16.	18.	20.	22.	24.	26.	28.	&c.

Proportiones triplæ ſeſquiſeptimæ.

22.	44.	66.	88.	110.	132.	154.	176.	198.	220.	242.	&c.
7.	14.	21.	28.	35.	42.	49.	56.	63.	70.	77.	&c.

Proportiones decuplæ ſeſquitertiæ.

31.	62.	93.	124.	155.	186.	217.	248.	279.	310.	341.	&c.
3.	6.	9.	12.	15.	18.	21.	24.	27.	30.	33.	&c.

DE PROPORTIONE MVLTIplici ſuperpartiente.

PROPORTIO *denique multiplex ſuperpartiens eſt habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior aliquoties complectitur minorem, & inſuper aliquot eius partes aliquotas, non conficientes vnam: qualis eſt proportio* 11. *ad* 3. *Dixi, non conficientes vnam, ob cauſam dictam in proportione ſuperpartiente. Nam ſi partes illæ aliquotæ vnam efficerent, non eſſet proportio multiplex ſuperpartiens, ſed multiplex ſuperparticularis. Vt proportio* 20. *ad* 6. *non dicenda eſt multiplex ſuperbipartiens ſextas, quamuis* 20. *contineant ter* 6. *& duas ſextas; quia duæ ſextæ conficiunt vnam tertiam partem. Quare vocabitur proportio tripla ſeſquitertia.*

DISTRIBVITVR *autem hæc proportio primùm, habita ratione proportionis multiplicis. Vt multiplex in duplam ſuperpartientem: triplam ſuperpartientem, &c.*

DEINDE *quælibet harum, habita ratione numeri partium, ſub ſe continet genera infinita. Vt ſub tripla ſuperpartiente, continetur tripla ſuperbipartiens; tripla ſupertripartiens, &c.*

POSTREMO *quæuis iſtarum, habita ratione denominationis partium aliquotarum: in genera adhuc infinita ſecatur. Vt tripla ſupertripartiens diuiditur in triplam ſupertripartientem quartas; in triplam ſupertripartientem quintas, &c.*

Digitized by Google

&c. Quarum omnium definitiones, & exempla non difficile eſt cuiuis ex dictis depromere, &c.

OMNES proportiones multiplices ſuperpartientes poſtrema diuiſionis ita inueniemus. Denominator partium aliquotarum propoſitarum multiplicetur per denominatorem proportionis multiplicis propoſitæ, productoque numero addatur numerus partium aliquotarum expreſſus. Conflatus enim numerus ad earundem partium aliquotarum denominatorem habet primam proportionem earum, quæ inueſtigantur. Atque hi duo numeri, ſi duplicentur, triplicentur, vel per alium quemcunque numerum multiplicentur, dabunt ſecundos numeros, tertios, & alios in eadem proportione. VELVTI ſi quærantur omnes proportiones quadruplæ ſuperoctupartientes vndecimas, ducemus 11. *denominatorem partium vndecimarum in* 4. *denominatorem proportionis quadruplæ, numeroque procreato* 44. *adijciemus* 8. *numerum octo partium. Nam conflatus numerus* 52. *ad* 11. *denominatorem partium habet primam proportionem quæſitam. Secundi numeri erunt* 104. *&* 22. *Tertij* 156. *&* 33. *nimirum illorum dupli, tripli, &c. Centupli autem eorundem, vt* 5200. *&* 1100. *habent centeſimam proportionem inter omnes quadruplas ſuperoctupartientes vndecimas.*

QVOD ſi duo numerorum ordines conſtituantur, quorum inferior incipiat à denominatore partium aliquotarum propoſitarum, & per continuam eiuſdem additionem primùm ad ſe, deinde ad numerum conflatum, &c. progrediatur; ſuperior verò incipiat à numero conflato ex numero producto ex eodem partium denominatore in denominatorem multiplicis proportionis datæ, & ex numero partium expreſſo, ac per eiuſdem continuam additionem primùm ad ſe, deinde ad conflatum numerum, &c. progrediatur; obtinebimus quoque omnes numeros oblatæ proportionis, vt in ſuperioribus quoque diximus: Exempla hæc vides in proportione dupla ſuperbipartiente tertias, dupla ſuperquintupartiente ſextas, & quintupla ſupertripartiente quintas.

Proportiones duplæ ſuperbipartientes tertias.

8.	16	24.	32.	40.	48.	56.	64.	72.	80.	88.	96.	104.	&c.
3.	6.	9.	12.	15.	18.	21.	24.	27.	30.	33.	36.	39.	&c.

Proportones duplæ ſuperquintupartientes ſextas.

17.	34.	51.	68.	85.	102.	119.	136.	153.	170.	187.	&c.
6.	12.	18.	24.	30.	36.	42.	48.	54.	60.	66.	&c.

Propor-

Digitized by Google

Proportiones quintuplæ ſupertripartientes quintas.											
28.	56.	84.	112.	140.	168.	196.	224.	252.	280.	308.	&c.
5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	40.	45.	50.	55.	&c.

DE PROPORTIONIBVS RATIOnalibus minoris inæqualitatis.

O M N I A, *quæ dicta hactenus ſunt de quinque generibus proportionum rationalium maioris inæqualitatis, intelligenda ſunt quoque de quinque generibus correſpondentibus minoris inæqualitatis, præmiſſa tamen ſemper præpoſitione* (*ſub*) *vt dictum eſt. Nam ſi in exemplis allatis conferantur minores quantitates cum maioribus, habebuntur proportiones minoris inæqualitatis correſpondentes. Quemadmodum enim proportio 100. ad 1. eſt centupla, ita proportio 1. ad 100. eſt ſubcentupla. Sicut etiam proportio 11. ad 3. eſt tripla ſuperbipartiens tertias, ita proportio 3. ad 11. eſt ſubtripla ſuperbipartiens tertias; Atque ita de cæteris.*

NON videtur autem hoc loco prætermittenda inſignis vtilitas tabulæ Pythagoricæ, quam cap. 4. noſtræ Arithmeticæ conſtruximus, in omnibus proportionibus rationalibus inueniendis: quæ eiuſmodi eſt. Conſtructa tabula Pythagorica, (Eſt autem conſtructio facillima, cùm numeri in ſiniſtro latere conſtituant ſeriem numerorum naturalem, in infinitumq; progredi poſſint; quælibet autem linea in tranſuerſionem procreetur ex continua additione numeri in ſiniſtro latere, à quo incipit, ad ſeipſam, & ad numerum conflatum, & ſic in infinitum: ita vt hæ lineæ in tranſuerſum nil aliud ſint, quàm progreſſiones Arithmeticæ numerorum, quorum differentiæ ſint primi numeri earundem linearum) primùm omnes numeri cuiuſuis proportionis multiplicis reperientur hoc modo. Denominator datæ proportionis multiplicis in ſuprema linea acceptus ad vnitatem in ſiniſtro latere habet primam eam proportionem multiplicem: Numeri autem ſub eodem denominatore deſcendentes per lineam rectam ad numeros ſub vnitate in latere ſiniſtro poſitos, ſinguli ad ſingulos, habent ſecundam, tertiam, quartam, & alias proportiones eiuſdem ſpeciei, in infinitum. Vt prima proportio noncupla erit inter 9. ſupremæ lineæ ad 1. in ſiniſtro latere; ſecunda inter 18. ſub 9. ad 2. ſub 1. tertia inter 27. eiuſdem lineæ à 9. deſcendentis, & 3. in ſiniſtro latere, &c. atque ita de alijs proportionibus multiplicibus dicendum eſt.

D E I N D E omnes numeri cuiuſuis proportionis ſuperparticula-

rıs ſit

ris ſic inuenientur. Ad denominatorem partis aliquotæ, quæ in proportione exprimitur, in latere ſupremo acceptum habet proximè inſequens numerus primam proportionem datam: Et ſi per lineam rectam ab hiſce duobus numeris deſcendamus, reperiemus omnes alios numeros eiuſdem proportionis, vt de multiplicibus dictum eſt. Verbi gratia, prima proportio ſeſquioctaua erit 9. ad 8. aliæ verò ordine erunt inter numeros ſub illis poſitos, vt ſecunda inter 18. & 16. tertia inter 27. & 24. &c.

TERTIO ſic reperies omnes proportiones ſuperpartientes cuiuslibet ſpeciei. Poſt denominatorem partium aliquotarum, quarum in proportione data mentio fit, in ſupremo latere acceptum numera tot numeros, quot partes in eadem proportione nominantur. Vltimus enim ad denominatorem earundem partium habebit primam proportionem ſuperpartientem propoſitam. Secunda autem, tertia, quarta, & aliæ ordine, reperientur inter numeros ſub illis duobus collocatos. Exempli cauſa, ſi quis omnes numeros proportionis ſuperoctupartientis vndecimas deſideret, ſumat in latere ſupremo denominatorem partium, id eſt, 11. poſt quem numeret hos octo numeros, propter octo partes, 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. Vltimus enim 19. ad 11. habet primam proportionem ſuperoctupartientem vndecimas. Secundam habebit numerus 38. ad 22. tertiam 57. ad 33. & alias alij numeri ſub 19. & 11 per rectam lineam deſcripti.

QVARTO numeros omnes cuiuslibet proportionis multiplicis ſuperparticularis inuenies hac ratione. In ſupremo latere accipe numerum, qui ad denominatorem partis aliquotæ expreſſæ habeat proportionem multiplicem, cuius mentio fit. Numerus enim proxime inſequens habebit ad denominatorem partis aliquotæ primam proportionem propoſitam: Secundam autem, tertiam, & alias habebunt numeri ſub illis duobus poſiti. Vt autem ſcias numerum, qui ad denominatorem partis aliquotæ habeat multiplicem proportionem propoſitam, ſumendus eſt denominator partis in ſupremo latere, & in ſiniſtro denominator proportionis multiplicis: Vel prior denominator in ſiniſtro latere, & poſterior in ſupremo. In angulo enim communi reperies numerum multiplicem, quem deſideras. Exempli gratia. Inueniendi ſint omnes numeri proportionis triplæ ſeſquiquintæ. Primum quæratur numerus ad denominatorem partis aliquotæ, hoc eſt, ad 5. triplus, nimirum 15. quem reperies in communi angulo denominatoris proportionis triplæ, qui eſt 3. & denominatoris partis aliquotæ, qui eſt 5. quorum alteruter in ſupremo latere, & alter in ſiniſtro ſumatur. Deinde hic numerus triplus, nimirum 15. accipiatur in latere ſupremo. Numerus enim 16. proxime inſequens ad denominatorem partis aliquotæ, id eſt, ad 5. habet primam proportionem triplam ſeſquiquintā. Alias proportiones eiuſdem

Digitized by Google

TABVLA PYTHAGORICA.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147	154
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160	168	176
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220	231	242
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240	252	264
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260	273	286
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280	294	308

ſpeciei reperies in numeris, qui ſub illis duobus ponuntur, vt de alijs dictum eſt.

QVINTO, & vltimo reperientur omnes numeri cuiuslibet proportionis multiplicis ſuperpartientis hoc modo: In latere ſupremo accipiatur numerus, qui ad denominatorem partium aliquotarum habeat proportionem multiplicem propoſitam: qui quidem inuenietur quoque in angulo communi denominatoris proportionis multiplicis, & denominatoris partium aliquotarum. Deinde poſt acceptum numerum multiplicem numerentur tot numeri, quot partium aliquotarum fit mentio. Vltimus namque ad denominatorem partium aliquotarum comperietur habere primam datam proportionem multiplicem ſuperpartientem. Alias proportiones eiuſdem ſpeciei reperiet ſub illa prima, vt de alijs diximus. Vt ſi cupiat quis omnes proportiones quadruplas ſupertripartientes quintas. Primum inquirat numerum quadruplum denominatoris partium, qui eſt 5. Inueniet autem eum numerum eſſe 20. quippe qui in angulo communi denominatoris proportionis quadruplæ, qui eſt 4. & denominatoris partium quintarum, qui eſt 5. deſcriptus ſit. Deinde poſt numerum hunc 20. inuentum numeret in ſupremo latere tres hos numeros 21. 22. 23. quod tres partes quintæ nominentur. Nam vltimus 23. ad 5. hoc eſt, ad denominatorem partium, habet primam proportionem quadruplam ſupertripartientem quintas. Numeri aliarum proportionum eiuſdem ſpeciei continentur ſub duobus illis numeris, vt in alijs traditum eſt.

INVENTIS hac arte omnibus numeris cuiuslibet proportionis maioris inæqualitatis, ſi minores cum maioribus conferantur, inuenti quoque erunt omnes numeri eiuſdem proportionis minoris inæqualitatis.

NEQVE verò ſilentio tranſiri debet hoc loco admirabilis quædam proprietas cuiuslibet proportionis rationalis; quæ ſic ſe habet. Inuentis minimis, ſiue primis terminis, numeriſue cuiuslibet proportionis, ſi conſtituatur progreſſio, ſeu proportionalitas Arithmetica incipiens à numero, qui vna vnitate minor ſit, quàm differentia minimorum illorum numerorum, progredienſque per ipſammet eandem differentiam numerorum minimorum, cadent inter primos numeros illius progreſſionis tot numeri in ſerie naturali numerorum, quot vnitates ſunt in primo termino conſtitutæ tuæ proportionalitatis Arithmeticæ; Inter ſecundos verò, qui primorum dupli ſunt, tot, quot in ſecundo termino eiuſdem progreſſionis continentur vnitates; inter tertios autem tot, quot vnitates in tertio termino eiuſdem progreſſionis continentur: atque ita deinceps. Exempli gratia, ſi proponatur proportio dupla, cuius minimi numeri ſunt 2. & 1. conſtituetur progreſſio incipiens ab 0. (quod differentia inter 2. & 1. ſit 1. & figura 0. vna vnitate minor quàm 1.) progredienſque per continuam additionem

Digitized by Google

uitatis, nimirum differentia inter 2. & 1. primum ad 0. deinde ad conſlatum numerum 1. Poſtea ad numerum confectum 2. &c. hoc ſcilicet modo.

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. &c.

Itaque inter primos numeros dupla proportionis, hoc eſt, inter 2. & 1. nullus cadit medius numerus: Inter ſecundos, qui ſunt 4. & 2. cadet unus medius, nimirum 3. Inter tertios 6. 3. duo medij intercipiuntur 5. 4. Inter quartos 8. 4. tres medij exiſtunt 7. 6. 5. & ſic deinceps. Id quod in hac formula apparet, ubi numeri extremi cuiuslibet lineæ habent proportiones omnes duplas, ut primam, ſecundam, tertiam, &c. Multitudines autem numerorum ſeries naturalis inter eos cadentium reſpondent numeris ſuperioris proportionalitatis Arithmeticæ.

2	1									
4	3	2								
6	5	4	3							
8	7	6	5	4						
10	9	8	7	6	5					
12	11	10	9	8	7	6				
14	13	12	11	10	9	8	7			
16	15	14	13	12	11	10	9	8		
18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10

QVOD ſi ſuperiori proportionalitati Arithmeticæ ſuperponas ſeriem naturalem numerorum, quæ ab 1. incipiat, ita ut ſinguli eius termini ſingulis terminis conſtitutæ tuæ Arithmeticæ proportionalitatis reſpondeant, dicto citiùs cognoſcemus, quotnam numeri cadant medij inter quoſuis duos numeros proportionis duplæ. Numeri enim ſeriei huius naturalis indicabunt, quem locum duo numeri duplæ proportionis obtinent, reſpondentes verò numeri in proportionalitate Arithmetica conſtituta multitudinem numerorum inter illos cadentium ſignificabunt. Exemplum hic vides.

Ordo

Ordo propor-tion. duplarum	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	&c.
Multit. med. numerorum.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	&c.

Itaque ſi ſcire cupias, quot numeri cadant inter vndecimos numeros proportionis duplæ, cape in ſerie naturali numerum 12. *cui ſupponitur numerus* 10. *Dices ergo* 10. *numeros inter illos intercipi, & ſic de cæteris.*

PROPONATVR deinde proportio decupla, cuius termini minimi ſunt 10. *&* 1. *Differentia eorum eſt* 9. *& numerus vna vnitate minor,* 8. *Progreſſio ergo Arithmetica incipiet ab* 8. *progredieturque per continuam additionem* 9. *primum ad* 8. *deinde ad numerum conflatum* 17. *& ſic deinceps; vt hic videre licet, vbi ſuprà ſcripſimus etiam ſeriem numerorum naturalem, cuius idem vſus hic eſt, qui ſuprà fuit in proportione dupla.*

Ordo propor. decuplarum.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multid. med. numerorum.	8	17	26	35	44	53	62	71	&c.

Itaque inter primos numeros decuplæ proportionis cadent 8. *numeri medij; Et* 17. *inter ſecundos: Et* 26. *inter tertios. At inter octauos intercipientur* 71. *numeri medij, & ſic de cæteris. Vt hæc formula declarat.*

10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1.

20. 19. 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2.

RVRSVS detur proportio quæcunque ſuperparticularis. Et quoniam duo minimi numeri differunt ſola vnitate, quemadmodum & minimi numeri proportionis duplæ, inſeruient hic eadem progreſſiones, quæ in dupla proportione, ita vt idem numerus ſit numerorum mediorum hic, qui ibi. Vt hic perſpicuum eſt in proportione ſeſquioctaua.

Ordo propor. ſeſquioct.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	&c.
Multid. med. numerorum.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	&c.

Digitized by Google

9	8						
18	17	16					
27	26	25	24				
36	35	34	33	32			
45	44	43	42	41	40		
54	53	52	51	50	49	48	
63	62	61	60	59	58	57	56

OFFERATVR quoque proportio ſuperquadrupartiens ſeptimas, cuius minimi termini ſunt 11. *&* 7. *Differentia eorum eſt* 4. *Progreſſio ergo Arithmetica incipiet à* 3. *progredieturq́; per* 4. *vt hic patet, vna cum ſerie naturali. Igitur inter primos numeros pro-*

Ordo propor. ſuperquadr.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum.	3	7	11	15	19	23	27	31	&c.

portionis ſuperquadrupartientis ſeptimas comprehenduntur 3. *numeri medij. Et* 7. *inter ſecundos: Et* 23. *inter ſextos, atque ita de cæteris, vt hic vides.*

11. 10. 9. 8. 7.

22. 21. 20. 19. 18. 17. 16. 15. 14.

33. 32. 31. 30. 29. 28. 27. 26. 25. 24. 23. 22. 21.

44. 43. 42. 41. 40. 39. 38. 37. 36. 35. 34. 33. 32. 31. 30. 29. 28.

ITEM data ſit proportio dupla ſeſquiſexta, cuius numeri minimi ſunt 13. *&* 6. *Differentia eorum eſt* 7. *Incipiet ergo progreſſio à* 9. *habebitque differentiam* 7. *inter eius numeros, vt hic cernitur,*

Ordo propor. dup. ſeſquiſex.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multid. med. numerorum.	6	13	20	27	34	41	48	55	&c.

vna cum ſerie naturali numerorum. Inter primos ergo numeros proportionis dupla ſeſquiſexta cadent 6. *medij numeri: inter ſecundos,* 13. *& inter octauos,* 55. *&c. veluti hic cernitur.*

13. 12.

Digitized by Google

13.12.11.10.9.8.7.6.

26.25.24.23.22.21.20.19.18.17.16.15.14 13.12.

39 38.37.36 35.34.33.32.31.30 29.28.27.26.25.24.23 22 21.20.19.18.

POSTREMO propoſitum ſit idem experiri in proportione dupla ſuperbipartiente tertias, cuius minimi termini ſunt 8. & 3. Et quia eorum differentia eſt 5 ſumet progreſſio Arithmetica initium à 4 habebuntque eius numeri differentiam 5. Veluti hic manifeſtum eſt, vnà cum numerorum naturali ſerie.

Ordo propor. duplarum ſuperbip. tertias.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multid. med. numerorum.	4	9	14	19	24	29	34	39	&c.

Cadent ergo inter duos primos numeros proportionis dupla ſuperbipartientis tertias, 4. numeri medij; & inter ſecundos, 9. & inter ſeptimos, 34. &c. Vt hic perſpicuum eſt.

8. 7. 6. 5. 4. 3.

16. 15. 14. 13. 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6.

24 23. 22. 21. 20. 19. 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12. 11. 10. 9.

32. 31. 30 29. 28. 27. 26. 25. 24. 23. 22. 21. 20. 19. 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12.

MANIFESTVM autem eſt, quod de proportionibus maioris inæqualitatis hoc loco diximus, verum quoque eſſe de minoris inæqualitatis proportionibus, cùm iidem numeri inter maiorem numerum, ac minorem, & inter minorem, ac maiorem interijciantur.

CAETERVM ex iis, quæ de quinque ſpeciebus proportionis rationalis tam maioris, quàm minoris inæqualitatis diximus, perſpicuè colligitur, non poſſe plura eſſe genera proportionis rationalis maioris inæqualitatis, quam quinque iam expoſita. Cùm enim, vt Euclides demonſtrat propoſ. 5. lib. 10. commenſurabiles quantitates quæcunque, inter quas, vt diximus, eſt proportio rationalis, inter ſe proportionem eam habeant, quam numerus ad numerum; fit, vt omnis proportio rationalis quarumcunque quantitatum continuarum aſſignari, ſeu exhiberi poſſit in numeris. Aut igitur maior numerus comprehendit minorem, ad quem refertur, aliquoties perfectè; qua ratione conſtituitur proportio multiplex: Aut ſemel tantummodo, ac præterea vnam eius partem aliquotam; & ſic habetur propor-

proportio ſuperparticularis: Aut ſemel duntaxat, & inſuper plures partes eius aliquotas non facientes vnam; & conficitur proportio ſuperpartiens: Aut aliquoties, & vnam eius partem aliquotam, & colligitur proportio multiplex ſuperparticularis; Aut denique aliquoties, & plures eius partes aliquotas non facientes vnam; & exurgit proportio multiplex ſuperpartiens. Neque verò alio modo maior quantitas minorem continere, aut minor quantitas à maiore contineri poteſt. Eadem ratione conſtat, totidem eſſe genera proportionis minoris inæqualitatis. Rectè ergo proportionem rationalem tum maioris inæqualitatis, tum minoris, in quinque genera, quæ expoſuimus, partiti ſumus.

DE PROPORTIONVM RATIONALIUM Denominatoribus.

QVONIAM *verò non exiguus eſt vſus Denominatorum proportionum rationalium, quas hactenus expoſuimus, non abs re erit, paucis docere, à quibuſnam numeris ſingulæ proportiones denominentur. Denominator ergo cuiuslibet proportionis, dicitur is numerus, qui exprimit diſtinctè, & apertè habitudinem vnius quantitatis ad alteram: Vt denominator proportionis octuplæ eſt 8. Nam hic numerus indicat, maiorem quantitatem proportionis octuplæ continere minorem octies. Similiter denominator proportionis ſeſquiquintæ eſt* $1\frac{1}{5}$; *quoniam iſte numerus ſignificat, maiorem quantitatem proportionis ſeſquiquintæ, continere minorem ſemel, & quintam eiuſdem partem. Atq; ita de reliquarum proportionum denominatoribus dicendum erit. Inde factum eſt, vt arbitror, quod Euclides lib. 6. & pleriq; alii Mathematici, appellant denominatorem cuiuſuis proportionis quantitatem illius; quia denominator, vt diximus, oſtendit, quanta ſit vna quantitas ad alteram, cum qua confertur, vt ex propoſitis exemplis conſtat.*

Ex iis autem, quæ diximus, facilè colligi poteſt denominator cuiuſque proportionis. Denominator enim proportionis multiplicis, quæcunque ea ſit, eſt numerus integer tot continens vnitates, quoties maior quantitas minorem continere dici-

Digitized by Google

dicitur in ea proportione, cuius denominator quæritur. Vt proportionis duplæ denominator eſt 2. Noncuplæ, 9. Centuplæ, 100. Millecuplæ, 1000. &c. Denominatores autem proportionum ſubmultiplicium multiplicibus correſpondentium, ſunt partes aliquotæ à denominatoribus proportionum multiplicium, quibus reſpondent, denominatæ. Vt denominator proportionis ſubduplæ, eſt $\frac{1}{2}$; ſubquintuplæ, $\frac{1}{5}$. ſubnoncuplæ, $\frac{1}{9}$. ſubcentuplæ, $\frac{1}{100}$. ſubmillecuplæ, $\frac{1}{1000}$. Eodem modo, denominatores aliarum proportionum ſubmultiplicium reperiemus. Itaque denominator cuiuſcunque proportionis ſubmultiplicis eſt numerus fractus, cuius numerator perpetuo eſt vnitas, denominator autem, numerus proportionem multiplicem correſpondentem denominans, vt ex prolatis exemplis patet. Neq; vero vlla difficultas eſt in cuiuſque proportionis multiplicis, vel ſubmultiplicis denominatore reperiendo, ſi ea, quæ dicta ſunt, rectè intelligantur: quippe cum ipſa prolatio proportionis denominatorem offerat, vt ex datis exemplis manifeſtum eſt.

DENOMINATOR cuiuſuis proportionis ſuperparticularis eſt vnitas cum parte illa aliquota, quam maior quantitas debet vltra minorem comprehendere. Vt proportionis ſeſquialteræ denominator eſt $1\frac{1}{2}$; ſeſquioctauæ, $1\frac{1}{8}$. ſeſquimilleſimæ, $1\frac{1}{1000}$, &c. Neque difficile erit denominatorem cuiuſque proportionis ſuperparticularis inuenire; cum ipſa proportionis prolatio denominatorem exprimat per ſuam partem aliquotam, vt ex datis exemplis perſpicuum eſt. Denominatores autem proportionum ſubſuperparticularium correſpondentium, ſunt fractiones, quarum numeratores vna tantum vnitate minores ſunt earundem denominatoribus. Vt denominator proportionis ſubſeſquialteræ, eſt $\frac{2}{3}$; ſubſeſquioctauæ, $\frac{8}{9}$. ſubſeſquimilleſimæ, $\frac{1000}{1001}$; &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis ſubſuperparticularis, ſi pro numeratore fractionis ſumatur denominator partis aliquotæ in proportione expreſſa, & pro eiuſdem fractionis denominatore, numerus vnitate maior. Vt denominator proportionis ſubſeſquidecimæ eſt $\frac{10}{11}$. cum huius fractionis numerator ſit numerus denominans partem decimam, nimirum 10. denominator autem eiuſ-

Digitized by Google

proportio ſuperparticularis: Aut ſemel duntaxat, & inſuper plures partes eius aliquotas non facientes vnam; & conficitur proportio ſuperpartiens: Aut aliquoties, & vnam eius partem aliquotam, & colligitur proportio multiplex ſuperparticularis; Aut denique aliquoties, & plures eius partes aliquotas non facientes vnam; & exurgit proportio multiplex ſuperpartiens. Neque verò alio modo maior quantitas minorem continere, aut minor quantitas à maiore contineri poteſt. Eadem ratione conſtat, totidem eſſe genera proportionis minoris inæqualitatis. Rectè ergo proportionem rationalem tum maioris inæqualitatis, tum minoris, in quinque genera, quæ expoſuimus, partiti ſumus.

DE PROPORTIONVM RATIONALIUM Denominatoribus.

QVONIAM *verò non exiguus eſt vſus Denominatorum proportionum rationalium, quas hactenus expoſuimus, non abs re erit, paucis docere, à quibuſnam numeris ſingulæ proportiones denominentur. Denominator ergo cuiuslibet proportionis, dicitur is numerus, qui exprimit diſtinctè, & apertè habitudinem vnius quantitatis ad alteram: Vt denominator proportionis octuplæ eſt* 8. *Nam hic numerus indicat, maiorem quantitatem proportionis octuplæ continere minorem octies. Similiter denominator proportionis ſeſquiquintæ eſt* $1\frac{1}{5}$; *quoniam iſte numerus ſignificat, maiorem quantitatem proportionis ſeſquiquintæ, continere minorem ſemel, & quintam eiuſdem partem. Atq; ita de reliquarum proportionum denominatoribus dicendum erit. Inde factum eſt, vt arbitror, quod Euclides lib. 6. & pleriq; alii Mathematici, appellant denominatorem cuiuſuis proportionis quantitatem* [illegible] *nator, vt diximus, oſtendit* [illegible]
ram, cum qua confertur [illegible]

Ex iis autem, quæ [illegible]
tor cuiuſque prop[illegible]
multiplicis, qu[illegible]
nens vnitate[illegible]

Digitized by Google

dicitur in ea proportione, cuius denominator quæritur. Vt proportionis duplæ denominator eſt 2. Noncuplæ, 9. Centuplæ, 100. Millecuplæ, 1000. &c. Deominatores autem proportionum ſubmultiplicium multiplicibus correſpondentium, ſunt partes aliquotæ à denominatoribus proportionum multiplicium, quibus reſpondent, denominatæ. Vt denominator proportionis ſubduplæ, eſt $\frac{1}{2}$; ſubquintuplæ, $\frac{1}{5}$. ſubnoncuplæ, $\frac{1}{9}$. ſubcentuplæ, $\frac{1}{100}$. ſubmillecuplæ, $\frac{1}{1000}$. Eodem modo, denominatores aliarum proportionum ſubmultiplicium reperiemus. Itaque denominator cuiuſcunque proportionis ſubmultiplicis eſt numerus fractus, cuius numerator perpetuo eſt vnitas, denominator autem, numerus proportionem multiplicem correſpondentem denominans, vt ex prolatis exemplis patet. Neq; vero vlla difficultas eſt in cuiuſque proportionis multiplicis, vel ſubmultiplicis denominatore reperiendo, ſi ea, quæ dicta ſunt, rectè intelligantur: quippe cum ipſa prolatio proportionis denominatorem offerat, vt ex datis exemplis manifeſtum eſt.

DENOMINATOR cuiuſuis proportionis ſuperparticularis eſt vnitas cum parte illa aliquota, quam maior quantitas debet vltra minorem comprehendere. Vt proportionis ſeſquialteræ denominator eſt $1\frac{1}{2}$; ſeſquioctauæ, $1\frac{1}{8}$. ſeſquimilleſimæ, $1\frac{1}{1000}$. &c. Neque difficile erit denominatorem cuiuſque proportionis ſuperparticularis inuenire; cum ipſa proportionis prolatio denominatorem exprimat per ſuam partem aliquotam, vt ex datis exemplis perſpicuum eſt. Denominatores autem proportionum ſubſuperparticularium correſpondentium, ſunt fractiones, quarum numeratores vna tantum vnitate minores ſunt earundem denominatoribus. Vt denominator proportionis ſubſeſquialteræ, eſt $\frac{2}{3}$; ſubſeſquioctauæ, $\frac{8}{9}$. ſubſeſquimilleſimæ, $\frac{1000}{1001}$; &c. Inue[illegible]minator cuiuslibet pro[illegible]meratore fractionis ſu[illegible]n proportione expreſſa, [illegible]minatore, numerus vnitate [illegible]ubſeſquidecimæ eſt $\frac{10}{11}$. [illegible] denominans [illegible]n, numerator [illegible] autem eiuſdem fra-

dem fractionis numeratorem ſuperet vnitate, &c. Reperiemus quoque denominatorem cuiuſuis proportionis ſubſuperparticularis hoc modo. Denominatorem correſpondentis proportionis ſuperparticularis reuocabimus ad vnam fractionem, vt in Arithmetica docuimus; cuius quidem numerator ſuperabit his ſemper vna vnitate denominatorem, qui etiam denominator eſt partis aliquotæ, cuius mentio fit in oblata proportione. Nam ſi huius fractionis terminos inuertamus, vt ex numeratore fiat denominator, & ex denominatore numerator, habebimus denominatorem propoſitæ proportionis ſubſuperparticularis. Vt ſi offeratur proportio ſubſeſquiſeptima: quoniam denominator proportionis ſeſquiſeptimæ, quæ illi reſpondet, eſt $1\frac{1}{7}$*. qui reuocatur ad hanc fractionem* $\frac{8}{7}$*. cuius numerator vna vnitate maior eſt, quam denominator partis aliquotæ. Quare ſi eam fractionem inuertamus hoc modo* $\frac{7}{8}$*. dicemus denominatorem proportionis ſeſquiſeptimæ eſſe* $\frac{7}{8}$*. Facilius denique cuiuſuis proportionis ſubſuperparticularis denominator fortaſsis reperietur, ſi inueniantur primi numeri habentes proportionem ſuperparticularem reſpondentem, vt ſupra docuimus. Nam fractio, cuius numerator ſit eorum numerorum minor, denominator verò maior, erit denominator propoſitæ proportionis. Vt ſi proponatur proportio ſubſeſquiſeptima: quoniam primi, ſiue minimi numeri habentes proportionem ſeſquiſeptimam, ſunt 8. & 7. ſi ex minore fiat numerator, & ex maiore denominator, conficiemus hanc fractionem* $\frac{7}{8}$*, pro denominatore proportionis ſeſquiſeptimæ propoſitæ, vt prius.*

DENOMINATOR *cuiuſuis proportionis ſuperpartientis eſt vnitas cum illis partibus aliquotis non efficientibus vnam, quas maior quantitas debet vltra minorem continere. Vt denominator proportionis ſupertripartientis ſeptimas, eſt* $1\frac{3}{7}$*. ſupertripartientis vigeſimas,* $1\frac{3}{20}$*. &c. Neque vlla difficultas eſt in huiuſmodi denominatoribus inueniendis: propterea quod prolatio ipſa proportionis denominatorem proprium exhibet, vt ex ſuperioribus exemplis liquido conſtat. Denominatores autem proportionum ſubſuperpartientium, ſunt fractiones, quarum numeratores tot vnitatibus minores ſunt, quam earundem fractionum*

ctionum denominatores, quot partibus aliquotis maior quantitas minorem ſuperat. Vt denominator proportionis ſubſupertripartientis ſeptimas, eſt $\frac{7}{10}$; ſubſupertripartientis vigeſimas: $\frac{20}{23}$; &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis ſubſuperpartientis, ſi pro numeratore fractionis ſumatur denominator partium aliquotarum, quæ in proportione exprimuntur, cui ſi addatur numerus earundem partium, habebitur eiuſdem fractionis denominator. Vt denominator proportionis ſubſuperquadripartientis vndecimas, eſt $\frac{11}{15}$, cum huius fractionis numerator ſit numerus denominans partes vndecimas, nimirum 11. cui additus eſt numerus 4. quatuor partium, vt fiat eiuſdem fractionis denominator 15. Denominator autem proportionis ſubſupertripartientis quintas eſt hæc fractio, $\frac{5}{8}$. Nam eius numerator eſt numerus denominans partes quintas, nimirum 5. Denominator autem 8. eiuſdem fractionis conflatus eſt ex illo numeratore 5. & ex numero 3. trium partium. Eademque ratione reperiemus & aliarum proportionum ſubſuperpartientium denominatores. Quos hac etiam ratione inuenies. Reuoca denominatorem proportionis cuiuſque ſuperpartientis correſpondentis ad vnam fractionem, vt in Arithmetica docuimus; cuius quidem numerator denominatorem, qui partes etiam aliquotas expreſſas denominat, ſuperabit hic ſemper tot vnitatibus, quot ſunt partes aliquotæ. Nam huius fractionis numeri inuerſi, vt ex numeratore fiat denominator, & ex denominatore numerator, dabunt denominatorem propoſitæ proportionis ſubſuperpartientis. Vt denominator proportionis ſubſuperdecupartientis decimastertias eſt $\frac{13}{23}$. quia denominator proportionis ſuperdecupartientis decimastertias eſt $1\frac{10}{13}$, qui ad hanc fractionem $\frac{23}{13}$. reuocatur, cuius numeri inuerſi efficiunt hanc fractionem $\frac{13}{23}$. Denique facilius cuiuſuis proportionis ſubſuperpartientis denominator inuenietur fortaſſis, ſi reperiantur primi, vel minimi numeri habentes proportionem ſuperpartientem correſpondentem, vt ſupra tradidimus. Fractio etenim, cuius numerator ſit eorum numerorum minor; denominator autem, maior, denominator erit propoſitæ proportionis ſubſuperpartientis. Veluti ſi proponatur proportio ſubſuperquadrupartiens

nonas:

Digitized by Google

nonas: quoniam minimi numeri habentes proportionem ſuperquadrupartientem nonas ſunt 13. & 9. faciemus fractionem $\frac{9}{13}$. pro denominatore proportionis ſubſuperquadrupartientis nonas: & ſic de cæteris.

DENOMINATOR *cuiuſuis proportionis multiplicis ſuperparticularis eſt numerus integer multiplicem proportionem expreſſam denominans, cum illa parte aliquota, quam maior quantitas continere debet vltra minorem quantitatem. Vt denominator proportionis triplæ ſeſquiſeptimæ eſt $3\frac{1}{7}$. Quintuplæ ſeſquinonæ, $5\frac{1}{9}$, &c. Vt nullus omnino labor ſit, exhibere denominatorem cuiuslibet proportionis multiplicis ſuperparticularis; quippe cum ipſa prolatio proportionis diſtinctè exprimat & denominatorem multiplicis proportionis, & partem aliquotam, vt exempla propoſita declarant. Denominatores autem proportionum ſubmultiplicium ſuperparticularium, ſunt fractiones, quarum numeratores numeri ſunt denominantes partes aliquotas in proportionibus expreſſas. Vt denominator proportionis ſubtriplæ ſeſquiſeptimæ, eſt $\frac{7}{22}$; ſubquintuplæ ſeſquinonæ, $\frac{9}{46}$, &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis ſubmultiplicis ſuperparticularis, ſi pro numeratore fractionis ſumatur denominator partis aliquotæ, qui ſi multiplicetur per denominatorem proportionis multiplicis, addaturq; vnitas numero producto, habebitur denominator eiuſdem fractionis. Vt denominator proportionis ſubquadruplæ ſeſquiſextæ, eſt $\frac{6}{25}$; cum huius fractionis numerator 6. denominet partes ſextas, isq; ductus ſit in 4. denominatorem proportionis quadruplæ, ac producto numero 24. addita vnitas, vt eiuſdem fractionis denominator conficiatur 25. &c. Iidem denominatores proportionum ſubmultiplicium ſuperparticularium inuenientur, ſi denominator cuiuſuis proportionis multiplicis ſuperparticularis reſpondentis reuocetur ad vnã fractionem, vt in Arithmetica docuimus, multiplicando nimirum denominatorẽ multiplicis proportionis per denominatorem fractionis ei adhærentis, & producto numero vnitatem, id eſt, numeratorem eiuſdem fractionis addendo. Nam ſi huius fractionis termini commutent ordinem inter ſe, fiet denominator proportionis propoſitæ. Vt ſi detur proportio ſubquadruplæ*

Digitized by Google

drupla ſeſquiſexta: quoniam denominator correſpondentis proportionis quadruplæ ſeſquiſextæ eſt $4\frac{1}{6}$. ducemus 4. id eſt, denominatorem multiplicis proportionis, in 6. hoc eſt, in denominatorem fractionis adhærentis, numeroque producto 24. addemus 1. nimirum numeratorem eiuſdem fractionis, vt totum denominatorem $4\frac{1}{6}$. reuocemus ad hanc fractionem $\frac{25}{6}$. Cuius termini ſi inter ſe ordinem permutent, fiet hæc fractio $\frac{6}{25}$. pro denominatore proportionis ſubquadruplæ ſeſquiſextæ. Eodemque modo in cæteris agendum erit. Denique facilius fortaſſe denominatorem cuiuſque proportionis ſubmultiplicis ſuperparticularis inuenies, ſi duos primos, minimoſue numeros proportionis multiplicis ſuperparticularis correſpondentis reperias, vt ſupra traditum eſt. Nam fractio, cuius numerator ſit minor eorum numerus, denominator autem, maior, erit denominator proportionis propoſitæ. Vt ſi offeratur proportio ſubtripla ſeſquiſeptima: quoniã primi, ſiue minimi numeri proportionis triplæ ſeſquiſeptimæ ſunt 22. & 7. fiet ex illis fractio hæc $\frac{7}{22}$. pro denominatore ꝓportionis ſubtriplæ ſeſquiſeptimæ, atq; ita de cæteris.

DENOMINATOR cuiuſuis proportionis multiplicis ſuperpartientis, eſt numerus integer denominans proportionem multiplicem in ea expreſſam, cum illis partibus aliquotis, non conſtituentibus vnam, quas maior quantitas vltra minorem debet comprehendere. Vt denominator proportionis triplæ ſuperquintupartientis octauas, eſt $3\frac{5}{8}$; quadruplæ ſuperbipartientis quintas, $4\frac{2}{5}$. &c. Nihil enim difficultatis habet hæc inuentio denominatorum in proportionibus multiplicibus ſuperpartientibus, quod apertè, & diſtinctè in qualibet earum exprimatur tam denominator proportionis multiplicis in ea contentæ, quam partes aliquotæ, vt perſpicuè in exemplis prolatis apparet. Denominatores verò proportionum ſubmultiplicium ſuperpartientium, ſunt fractiones, quarum numeratores numeri ſunt denominantes partes aliquotas, quæ in proportionibus expreſſæ ſunt. Vt denominator proportionis ſubtriplæ ſuperquintupartientis octauas, eſt $\frac{8}{29}$. ſubquadruplæ ſuperbipartientis quintas, $\frac{5}{22}$. &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis ſubmultiplicis ſuperpartientis, ſi pro numeratore fractionis

fractionis ſumatur denominator partium aliquotarum, quem ſi multiplices per denominatorem proportionis multiplicis, numeroque producto addas partium aliquotarum numerum, obtinebis eiuſdem fractionis denominatorem. Vt denominator proportionis ſubduplæ ſuperoctupartientis decimastertias, eſt $\frac{13}{34}$. quia huius fractionis numerator 13. denominat partes tertiasdecimas: qui ſi ducatur in 2. denominatorem duplæ proportionis, productoque numero 26. adiiciatur numerus 8. octo partium, conficietur eiuſdem fractionis denominator 34. &c. Denominatorem quoque cuiuslibet proportionis ſubmultiplicis ſuperpartientis ſic reperies. Reduc denominatorem proportionis multiplicis ſuperpartientis, quæ propoſita reſpondet, ad vnam fractionem, vt in Arithmetica præcepimus, nimirum multiplicando denominatorem multiplicis proportionis per denominatorem fractionis ei adhærentis, & producto numero addendo numeratorem eiuſdem fractionis. Nam huius fractionis termini, ſi inter ſe permutent ordinem dabunt fractionem, quæ denominator erit proportionis ſubmultiplicis ſuperpartientis. Veluti ſi proponatur proportio ſubquintupla ſupertripartiens decimas, reducemus denominatorem correſpondentis proportionis quintuplæ ſupertripartientis decimas, hoc eſt, $5\frac{3}{10}$. ad hanc fractionem $\frac{53}{10}$. quod fit ducendo 5. in 10. productoq; numero addendo 3. vt fiat numerator 53. cui idem denominator 10. ſupponendus eſt. Nam ſi hæc fractio terminos permutet, fiet denominator proportionis ſubquintuplæ ſupertripartientis decimas, $\frac{10}{53}$. &c. Sed forſitan facilius denominatorem cuiuſuis proportionis ſubmultiplicis ſuperpartientis obtinebis, ſi primos, ſiue minimos numeros proportionis multiplicis ſuperpartientis reſpondentis reperias, ex eiſq; fractionem conſtituas, ſumendo minorem pro numeratore, & maiorem pro denominatore. Fractio enim hæc dabit denominatorem proportionis propoſitæ. Vt ſi proponatur proportio ſubquintupla ſupertripartiens decimas: quoniam minimi numeri in proportione quintupla ſupertripartiente decimas ſunt 53. & 10. conſtituetur ex eis denominator proportionis propoſitæ hæc fractio $\frac{10}{53}$. & ſic de cæteris.

DENOMINATOR deniq; proportionis æqualitatis perpetuo

petuo

Digitized by Google

petuo eſt vnitas: quia vna quantitas debet in ea proportione eſſe æqualis alteri, ac proinde vna alteram continere ſemel, & nihil præterea. quod quidem vnitas ſignificat.

EX his, quæ de proportionum denominatoribus diximus, perſpicuum eſſe puto, denominatores proportionum maioris inæqualitatis re & nomine ipſas proportiones maioris inæqualitatis denominare; denominatores vero proportionum minoris inæqualitatis re tantum, non autem & verbo, ſiue nomine, denominare proportiones minoris inæqualitatis. id quod ex prolatis exemplis liquido conſtat. Nam denominator, verbi gratia, proportionis triplæ ſuperquadrupartientis nonas, qui eſt $3\frac{4}{9}$. hoc eſt, tria integra, & quatuor nonæ partes, re & verbo denominat eam proportionem, cum diſtinctè aperteq; nobis indicet, in ea maiorem quantitatem continere minorem ter, & inſuper quatuor eius partes nonas. At vero denominator correſpondentis proportionis ſubtriplæ ſuperquadrupartientis nonas, nimirum $\frac{9}{31}$. id eſt, nouem trigeſimæprimæ partes, re quidem ipſa proportionem ſubtriplam ſuperquadrupartientem nonas denominat, cum vere ſignificet, minorem quantitatem in ea eſſe maioris nouem partes trigeſimas primas, quod omnino neceſſarium eſt, vt minor quantitas ad maiorem habeat proportionem ſubtriplam ſuperquadrupartientem nonas: Verbo autem, ſiue nomine, eam proportionem nequaquam denominat; quippe cum $\frac{9}{31}$. hoc eſt, nouem partes trigeſimæprimæ cum nomine proportionis ſubtriplæ ſuperquadrupartientis nonas nihil videantur habere commune, ſed penitus ab eo diſcrepare.

QVARE ſi denominator alicuius proportionis minoris inæqualitatis numeris expreſſus ſit, nimirum per fractionem, vt dictum eſt; vt ſcias, quo pacto proportionem, quam denominat, efferre debeas, vide quam proportionem habeat denominator eius fractionis ad numeratorem: quod ſcies, ſi partiaris denominatorem fractionis per numeratorem. Nam Quotiens denominabit proportionem, quam denominator fractionis habet ad numeratorem. Eodem enim nomine proportionem dati denominatoris proportionis minoris inæqualitatis pronunciabis, præpoſita tantum ſyllaba, ſub quo illa denominatoris fractionis ad numeratorem appellatur. Vt ſi detur denominator $\frac{1}{8}$. dicetur eius proportio ſuboctupla. Quando enim numerator fractionis eſt vnitas, proportio dati denominatoris erit ſubmultiplex ab eiuſdem fractionis denominatore denominata. Quod ſi datus denominator ſit $\frac{20}{327}$. Diuiſo denominatore 327. per numeratorem, fit Quotiens $16\frac{7}{20}$. Denominator igitur fractionis $\frac{20}{327}$. ad numeratorem habet proportionem ſedecuplam ſuperſeptupartientem vigeſimas: ac proinde proportio, cuius denominator eſt $\frac{20}{327}$. dicenda eſt ſubſedecupla ſuperſeptupartiens vigeſimas, & ſic de cæteris.

QVIA vero non ſemper commodè omnes proportiones propriis nominibus

Digitized by Google

minibus appellari poſſunt, (quis enim proportionem, verbi gratia, 37. ad 1. commodè dixerit triginta ſeptuplam, vel trigecuplam ſeptuplam, vel alio id genus nomine? Quis item commodè proportionem 48. ad 29. dixerit ſupernouemdecupartientem vigeſimasnonas? &c.) ſolent Geometræ plerumque in ſuis ſcriptis exprimere proportionem quamcumque per primos, ſiue minimos numeros eius proportionis. Vt proportionem 13. ad 1. vel 39. ad 3. vel 390. ad 30. malunt dicere eam, quam habent 13. ad 1. quam tredecuplam. Et viciſſim proportionem 1. ad 13. vel 3. ad 39. vel 30. ad 390. potius dicunt eam, quam habet 1. ad 13. quàm ſubtredecuplam. Ita quoq; proportionem 52. ad 40. vocant proportionem 13. ad 10. quæ alias diceretur ſupertripartiens decimas. Proportionem vero 40. ad 52. appellant eam, quæ eſt 10. ad 13 quæ proprio nomine diceretur ſubſupertripartiens decimas, & ſic de aliis.

QVANQVAM autem proportio quælibet exprimi poſſit per minimos eius numeros, vt diximus: pernecesſaria tamen eſt cognitio denominatoris eiuſdem proportionis, vt habitudinem vnius numeri ad alterum cognoſcamus. Nam etiamſi aliquis proportionem numeri 1700. ad 400 dicat eſſe eam, quæ eſt numeri 17. ad 4 non intelligam tamen planè, quænam ſit illa proportio, niſi eius denominatorem cognouero, qui eſt $4\frac{1}{4}$. Hic enim manifeſte declarat, maiorem numerum continere minorem quater, & inſuper quartam eius partem. Atque hic denominator facilius ex minimis numeris alicuius proportionis percipitur, quam ex numeris non minimis. Quòd ſi quando minimi numeri alicuius proportionis ſint ita magni, vt denominator ex illis non facile poſſit intelligi, recurrendum erit ad præceptum, quod mox ſubiungam, & ex quo denominator proportionis inter quoſuis duos numeros, ſiue minimi ij ſint, ſiue non, notus efficitur.

QVOD ſi proportionem quamcunque per eius numeros minimos efferunt Mathematici, licebit nobis multo commodius proportionem quorumlibet duorum numerorum explicare per eius proportionis denominatorem: ita vt proportionem 100. ad 20. dicamus eam, cuius denominator eſt 5. Item proportionem 48. ad 38. eam, cuius denominator eſt $1\frac{5}{19}$. quæ dicenda eſſet ſuperquintupartiens decimas nonas, ſic etiam proportio 20. ad 100. dici poteſt ea, quæ habet denominatorem $\frac{1}{5}$. Et proportio 38. ad 48. ea, cuius denominator eſt $\frac{19}{24}$. atque ita de reliquis; quoniam videlicet denominator clariſſimè demonſtrat habitudinem vnius numeri ad alium, vt dictum eſt.

DENOMINATOR porro proportionis inter duos quoſuis numeros ita reperietur. Diuidatur numerus antecedens, qui numerum ad alium refertur, per conſequentem. Quotiens enim numerus, reducta prius fractione ſi qua adſit, ad minimos numeros, vt in Arithmetica tradidimus, erit eius proportionis denominator. Veluti propoſita proportione 39. ad 3. vel 390. ad 30. dicemus denominatorem eius eſſe 13. Quotientem videlicet numerum diuiſionis 39. per 3. vel 390. per 30.

Quod

Quod ſi viciſſim conferantur 3. cum 39. vel 30. cum 390. erit quotiens diuiſionis fractio hæc $\frac{3}{39}$. vel $\frac{30}{390}$. Nam quando minor numerus per maiorem diuiditur, Quotiens ſemper eſt fractio, cuius numerator eſt minor numerus, & denominator, maior, vt in Arithmetica explicauimus. Et quia vtraque fractio, ſi eius numeri ad minimos reuocentur, reducitur ad hanc $\frac{1}{13}$. dicemus denominatorem proportionis 3. ad 39. vel 30. ad 390. eſſe $\frac{1}{13}$. Rurſus data proportione 52. ad 40. ex diuiſione 52. per 40. fit Quotiens $1\frac{12}{40}$. cuius fractio reducitur ad hanc $\frac{3}{10}$. Igitur denominator proportionis 52. ad 40. erit $1\frac{3}{10}$. Si autem proportio offeratur 40. ad 52. inuenietur denominator ſiue Quotiens $\frac{40}{52}$. hoc eſt, in minimis numeris, $\frac{10}{13}$. Præterea proportio 100. ad 20. denominatorem habebit 5. Diuiſis enim 100. per 20. Quotiens eſt 5. Proportionis verò 20. ad 100. denominator erit $\frac{1}{5}$. propterea quod diuiſis 20. per 100. Quotiens eſt $\frac{10}{100}$. id eſt, in minimis numeris $\frac{1}{5}$. Deinde denominator proportionis 48. ad 10. erit $4\frac{4}{5}$. quod diuiſis 48. per 10. Quotiens fit $4\frac{8}{10}$. hoc eſt, in numeris minimis, $4\frac{4}{5}$. At denominator proportionis 10. ad 48. erit $\frac{10}{48}$. id eſt, in minimis numeris $\frac{5}{24}$. Et quia denominator fractionis, $\frac{5}{24}$. ad numeratorem habet proportionem quadruplam ſuperquadrupartientem quintas (quòd diuiſis 24. per 5. Quotiens fiat $4\frac{4}{5}$. appellabitur proportio 10. ad 48. ſubquadrupla ſuperquadrupartiens quintas. Vt enim ritè efferatur proportio minoris inæqualitatis, denominanda prius eſt proportio denominatoris fractionis ad numeratorem, vt ſupra diximus.

INVENTO denominatore proportionis duorum numerorum in minimis numeris, vt dictum eſt, eoque reducto ad vnam fractionem, vt in Arithmetica traditum eſt, erunt numerator, & denominator fractionis, minimi numeri, inter quos illa proportio reperitur. In multiplici tamen proportione, quando nimirum denominator inuentus non habet annexam fractionem, erunt denominator inuentus, & vnitas, minimi numeri illius proportionis. Vt quoniam denominator proportionis 348. ad 120. eſt $2\frac{9}{10}$. ſi reducatur ad hanc vnam fractionem, $\frac{29}{10}$. (quod fit, ducendo integrum numerum 2. in denominatorem fractionis 10. productoque numero 20. eiuſdem fractionis numeratorem 9. addendo.) erunt 29. & 10. minimi numeri habentes proportionem eandem, quam 348. ad 120. Sic etiam, quia denominator proportionis 824. ad 1133. eſt $\frac{8}{11}$. erunt 8. & 11. minimi numeri proportionis 824. ad 1133. Item quia denominator proportionis 84. ad 12. eſt 7. erunt in ea proportione minimi numeri 7. & 1. Viciſſim numeri minimi proportionis 12. ad 84. cuius denominator eſt $\frac{1}{7}$. erunt 1. & 7. Itaque propoſitis duobus numeris quibuſcunque, ſi quærantur minimi numeri eandem, quam illi, habentes proportionem, inueniendus erit denominator proportionis eorum, vt dictum eſt, iſque ad vnam fractionem redigendus. Huius enim fractionis numerator, & denominator, erunt minimi numeri quæſiti. Vt ſi quærantur minimi nu-

Digitized by Google

nimi numeri proportionis, quam habent 400. ad 90. Diviſo antecedente per conſequentem terminum, fit Quotiens $4\frac{4}{9}$. in minimis numeris. Quo reuocato ad hanc fractionem $\frac{40}{9}$. dicemus, minimos numeros proportionis 400. ad 90. eſſe 40. & 9. Eademque ratio eſt de cæteris.

IAM verò ſi, propoſitis duabus proportionibus, cognoſcere velis, vtra earum maior ſit, vel minor, dices eam maiorem eſſe, cuius denominator maior eſt, minorem verò eam, cuius denominator eſt minor. Quod ſi denominatores ſint æquales, proportiones quoque æquales eſſe pronunciabis. Vt ſi proponantur duæ hæ proportiones, ſuperoctupartiens decimasquintas, & ſuperdecupartiens decimas ſeptimas, quarum denominatores ſunt $1\frac{8}{15}$. & $1\frac{10}{17}$. dices priorem poſteriore eſſe minorem: quia denominator $1\frac{8}{15}$. minor eſt denominatore $1\frac{10}{17}$. Qua verò arte cognoſcas, vtra duarum fractionum maior ſit, vel minor, an verò æquales ſint, tradidimus in Arithmetica. Eadem ratione, ſi offerantur duæ proportiones, quarum denominatores ſint $10\frac{1}{1000}$. $9\frac{100}{101}$. dicemus priorem eſſe maiorem. Quanquam enim fractio $\frac{1}{1000}$. minor ſit fractione $\frac{100}{101}$. numerus tamen interger 10. integro numero 9. maior eſt. Sic ſi dentur duæ proportiones, vna 17. ad 11. altera 18. ad 12 dices illam hac eſſe maiorem, quia illius denominator $1\frac{6}{11}$. maior eſt huius denominatore $1\frac{1}{2}$. Cæterum, quando duæ proportiones proponuntur in numeris, dignoſcemus facilè, vtra earum ſit maior, etiamſi earum denominatores non inquiramus, hac ratione. Multiplicato antecedente termino prioris proportionis in terminum conſequentem poſterioris, & termino antecedente poſterioris in conſequentem terminum prioris; cuius proportionis antecedens terminus maiorem numerum produxerit, illa proportio maior eſt: Et ſi duo æquales numeri geniti fuerint, proportiones inter ſe æquales erunt. Vt ſi proponantur duæ proportiones 17. ad 11. & 18. ad 12. comperiemus priorem maiorem eſſe, quia illius antecedens 17. in huius conſequentem 12. ductus procreat 204. at antecedens huius 18. in conſequentem illius 11. producit tantummodo 198. Rurſus ſi dentur duæ proportiones 18. ad 12. & 108. ad 72. producetur idem numerus 1296. tam ex prioris antecedente 18. in poſterioris conſequentem 72. quàm ex antecedente poſterioris 108. in conſequentem prioris 12. multiplicato. Quare proportiones ipſæ æquales inter ſe erunt. Ratio huiuſce operationis eſt: quia hac ratione, propoſitis quatuor numeris, multiplicantur inter ſe tam extremi duo, quam duo intermedij, vt in datis exemplis patet. Igitur ſi procreentur numeri æquales, erit eadem proportio primi ad ſecundum, quæ tertij ad quartum, vt ab Euclide demonſtratur lib. 7. propoſ. 19. Hinc fit, ſi primus in quartum producat maiorem numerum, quam ſecundus in tertium, maiorem eſſe primum, quam vt eandem habere poſſit proportionem ad ſecundum, quam tertius ad quartum: quandoquidem minor eſſe deberet, vt eundem nu-

dem nu-

Digitized by Google

illum numerum poſſet producere, ac proinde eandem habere proportionem.

DESIDERANTVR nonnunquam duo numeri in quacunque proportione, ſiue ij primi ſint, ſiue non; hos ergo, vt inueniamus, multiplicabimus quemcunq; numerum aſſumptum, vel diuidemus, per propoſitæ proportionis denominatorem. Nam productus numerus ad aſſumptum, qui multiplicatus eſt, vel aſſumptus, qui diuiſus eſt, ad Quotientem habebit proportionem propoſitam. Verbi gratia, ſi ſint inueniendi duo numeri in proportione quintupla, ducemus quemcunque numerum, vt 100. in denominatorem 5. Productus enim numerus 500. ad multiplicatum numerum 100. proportionem habebit quintuplam. Vel eundem numerum 100. diuidemus per denominatorem 5. Nam diuiſus numerus 100. ad Quotientem 20. habebit quoque datam proportionem quintuplam. Ita quoque ſi inueniendi ſint duo numeri in proportione dupla ſeſquitertia, cuius denominator eſt $2\frac{1}{3}$. multiplicabimus quemuis numerum, vt 24. per $2\frac{1}{3}$. Productus enim numerus 56. ad numerum multiplicatum 24. habet proportionem denominatam à $2\frac{1}{3}$. Item ſi numerum 24. diuidamus per $2\frac{1}{3}$. habebit diuiſus numerus 24 ad Quotientem $10\frac{2}{7}$. proportionem datam duplam ſeſquitertiam. Sed vt fractiones vitentur, ſi quidem per multiplicationem rem expedire lubet, accipiendus erit numerus multiplicandus, qui numeretur à denominatore partis aliquotæ, vel plurium partium, quarum in proportione fit mentio: In proportione tamen multiplici, quia nullius partis fit mentio, aſſumi poteſt quilibet numerus. Vt ſi deſiderentur duo numeri proportionis triplæ ſuperbipartientis nonas, accipiendus erit numerus à 9. numeratus, qualis eſt 18. vel 27. 36. 45. &c. Quilibet enim horum ductus in denominatorem $3\frac{2}{9}$. gignet numerum integrum: vt ductus 45 in $3\frac{2}{9}$. fit numerus 145. qui ad aſſumptum numerum 45 proportionem habet datam. Sic etiam ſi cupiat quis proportionem ſubquadruplam, cuius denominator eſt $\frac{1}{4}$. ſumendus erit numerus à 4. numeratus, vt 12. Hic enim ductus in denominatorem $\frac{1}{4}$ producet 3. numerũ integrum, qui ad aſſumptum 12. habet proportionem ſubquadruplam. Si verò per diuiſionem agendum ſit, & fractiones vitandæ, ſumendus erit in proportione multiplici numerus à denominatore proportionis numeratus. In aliis autem proportionibus, reuocandus erit denominator proportionis ad vnam fractionem, numerusq; ſumendus à numeratore numeratus. Vt ſi quæratur proportio quintupla, ſumendus erit, verbi gratia, numerus 30. à 5. numeratus. Hic enim diuiſus per denominatorem 5. facit Quotientem 6. ad quem proportionem habet quintuplam. Si autem deſideretur proportio, cuius denominator ſit $4\frac{3}{7}$. reuocato eo ad fractionem $\frac{31}{7}$ ſumendus erit numerus à 31. numeratus, vt 62. Nam hoc diuiſo per $\frac{31}{7}$. fit Quotiens 14. ad quem acceptus numerus 64. habet proportionem à $4\frac{3}{7}$. denominatam, nimirum quadruplam

Digitized by Google

druplam ſupertripartientem ſeptimas. Cæterum ſi duo numeri proponantur, cupiatque quis alios duos in eadem proportione reperire, ſatis erit, ſi vtrumque per quemuis numerum multiplicet, aut diuidat. Numeri enim producti, aut Quotientes eandem habebunt proportionem, quam propoſiti duo numeri. Item ſi propoſito quouis numero, inueniendus ſit alius, qui ad eum proportionem habeat datam, vel ad quem is datum habeat proportionem, aſſequeris primum, ſi propoſitum numerum per denominatorem proportionis multiplices: at ſecundum obtinebis, ſi eundem per denominatorem proportionis diuidas. Quòd ſi proportio detur in duobus numeris, proponaturque tertius quiſpiam numerus; ſi quidem inueniendus ſit quartus, ad quem tertius datus eandem habeat proportionem, quam primus datus ad ſecundum: ſi quidem denominator proportionis duorum numerorum datorum notus eſt, diuidendus erit tertius numerus datus per denominatorem. Quotiens enim numerus erit, quem quærimus. Vel certè ſiue denominator cognitus ſit, ſiue non, multiplicandus erit tertius numerus per ſecundum datum, hoc eſt, per conſequentem terminum datæ proportionis, productusq; numerus per primum, ſiue per antecedentem terminum, diuidendus. Vt ſi dentur duo numeri 4. 7. quorum proportionis denominator eſt $\frac{4}{7}$. detur item tertius numerus 20. Diuide numerum 20. per denominatorem $\frac{4}{7}$ produceturque quartus numerus quæſitus 35. Vel multiplica tertium numerum 20. per ſecundum 7. & productum numerum 140. partire per primum 4. Ad Quotientem enim 35. habebit tertius numerus 20. eandem proportionem, quam 4. ad 7. Si verò inueniendus ſit quartus, qui ad tertium eandem habeat proportionem, quam dati duo numeri, ſi quidem denominator notus eſt, ducendus is erit in tertium numerum. Productus enim numerus erit, quem quæris. Vel ſiue notus ſit denominator, ſiue non, multiplicandus erit tertius numerus per primum datum, nimirum per terminum antecedentem, & numerus productus per ſecundum, id eſt, per conſequentem terminum, diuidendus. Vt datis eiſdem duobus numeris 4. 7. & tertio 20. multiplica 20. per $\frac{4}{7}$. denominatorem, gignetùrque quæſitus numerus $11\frac{3}{7}$. Vel duc tertium numerum 20. in primum 4. numerumq; productum 80. partire per ſecundum 7. Nam ad tertium 20. habebit Quotiens $11\frac{3}{7}$. eandem proportionem, quam 4 ad 7.

QVIA verò diximus, eam proportionem eſſe maiorem; cuius denominator maior eſt, fit, vt in proportionibus multiplicibus detur minima, nimirum dupla, denominata à 2. non autem maxima: propterea quod numerus 2. inter omnes denominatores proportionum multiplicium eſt minimus, maximus autem dari non poteſt, cum numeri augeantur in infinitum. Efficitur quoque, inter proportiones ſuperparticulares reperiri maximam, nimirum ſeſquialteram, denominata à $1\frac{1}{2}$. non autem minimam: quia numerus $1\frac{1}{2}$. omnium denominatorum proportionum ſuperparticularium maximus eſt, minimus autem

mus autem dari non poteſt, cum denominatores fractionum progredi poſſint in infinitum. Conſtat autem ex iis, quæ in Arithmetica tradidimus, fractionem, cuius denominator maior eſt, minorem eſſe, ſi idem ſit numerator; fractionem autem, cuius denominator minor eſt, ſi idem ſit numerator, maiorem eſſe. Cum ergo denominator 2. ſit omnium minimus, erit fractio $\frac{1}{2}$. omnium, quæ numeratorem habent 1. (quales ſunt fractiones denominatorum proportionum ſuperparticularium) maxima. Colligitur denique, in aliis proportionibus maioris inæqualitatis neque minimam poſſe dari, neque maximam. Quod intelligendum eſt de vltimis ſpeciebus. Nam ſi de vltimis ſpeciebus non ſit ſermo, erit ſuperbipartiens inter ſuperpartientes minima; ſuperpartiens autem tertias, maxima. Inter multiplices autem ſuperparticulares maxima erit multiplex ſeſquialtera; minima verò, dupla ſuperparticularis. Inter multiplices denique ſuperpartientes maxima erit multiplex ſuperpartiens tertias; minima verò, dupla ſuperbipartiens. E contrario in proportionibus ſubmultiplicibus datur maxima, nimirum ſubdupla, non autem minima: In ſubſuperparticularibus autem reperitur minima, vt ſubſeſquialtera, non autem maxima: In aliis denique proportionibus minoris inæqualitatis neque maxima, neque minima dari poteſt. Quæ omnia perſpicua erunt, ſi denominatores proportionum inter ſe conferantur.

COLLIGITVR etiam, hanc eſſe connexionem inter proportionem maioris inæqualitatis, æqualitatis, & minoris inæqualitatis, vt quælibet proportio maioris inæqualitatis maior ſit proportione æqualitatis, quælibet verò proportio minoris inæqualitatis, minor: propterea quòd quilibet denominator proportionis maioris inæqualitatis, quãtumuis minimus, maior eſt vnitate, quæ denominator eſt proportionis æqualitatis, cum ille minor eſſe nequeat, quàm vnitas cum vna parte aliquota: At denominator proportionis minoris inæqualitatis ſemper minor eſt, quàm vnitas, cum ſit fractio, cuius numerator à denominatore ſuperatur vt ex iis, quæ ſupra diximus, patet. Itaque proportio æqualitatis media eſt inter proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis. Vbi hoc animaduerſione dignum eſt, Proportionem maioris inæqualitatis decreſcendo appropinquare ſemper magis ac magis in infinitum proportioni æqualitatis, nunquam tamen ad eam peruenire: E contrario verò proportionem minoris inæqualitatis creſcendo ſemper magis, ac magis in infinitum accedere ad eandem proportionem æqualitatis, nunquam tamen eam attingere. Nam quælibet proportione multiplici propoſita datur minor, ac minor, vſque ad duplam, quæ omnium multiplicium eſt minima. Deinde hac datur minor, nimirum ſuperparticularis, vel ſuperpartiens quæcunque, in qua cum minima non poſſit dari, omniſque proportio eiuſmodi maior ſit proportione æqualitatis, liquido conſtat, proportionem maioris inæqualitatis ad æqualitatis proportionem non

Digitized by Google

poſſe peruenire, etiamſi in infinitum decreſcendo ad ipſam accedat. Rurſus cum omnis proportio minoris inæqualitatis minor ſit proportione æqualitatis, non poſſit autem in ea reperiri maxima, manifeſtum quoque eſt, proportionem minoris inæqualitatis attingere non poſſe proportionem æqualitatis, licet in infinitum creſcendo ad eam accedat. Sed vt vtrumque exemplo etiam diſcatur, ſciendum eſt, ſi inter duos numeros quoſuis non proximos interponatur quilibet numerus intermedius, maior ſcilicet vno eorum, & altero minor; proportionem maioris numeri ad minorem diuiſam eſſe in duas minores, quarum vna eſt maioris numeri ad medium interpoſitum, altera verò numeri medij ad minorem. Item proportionem minoris numeri ad maiorem diuiſam eſſe in duas maiores, quarum vna eſt minoris numeri ad medium interpoſitum, altera verò medij ad maiorem. Vt ſi inter duos numeros 6. 3. ponatur medius 4. hoc modo, 6. 4. 3. proportio 6. ad 3. quæ dupla eſt, diuiſa erit in ſeſquialteram 6. ad 4. & ſeſquitertiam 4. ad 3. quarum vtraque minor eſt proportione dupla 6. ad 3. Contra verò, proportio 3. ad 6. quæ ſubdupla eſt, diuiſa erit in ſubſeſquitertiam 3. ad 4. & ſubſeſquialteram 4. ad 6. quarum vtraque maior eſt proportione ſubdupla 3. ad 6. Idem fit, ſi inter eoſdem numeros 6. 3. interponatur medius 5. hoc modo, 6. 5. 3. Tam enim proportio 6. ad 5. ſeſquiquinta, quam proportio ſuperbipartiens tertias 5. ad 3. minor eſt proportione dupla 6. ad 3. Contra verò tum proportio ſuperbipartiens tertias 3. ad 5. quam ſubſeſquiquinta 5. ad 6. maior eſt proportione ſubdupla 3. ad 6. Quæ omnia ex denominatoribus probari poſſunt. Verum vtrumque demonſtrabitur hac ratione. Quoniam medius numerus minor eſt maiore dato, & maior minore, habebit maior datus ad minorem datum, maiorem proportionem, quam idem maior ad medium, & quam medius ad minorem. At verò minor ad maiorem habebit minorem proportionem, quam idem minor ad medium, & quam medius ad maiorem, vt manifeſtum eſt vel ex defin. 20. lib. 7. vt ibidem explicauimus, vel ex propoſ. 8. huius lib. 5. vbi demonſtrat Euclides, propoſitis duabus quantitatibus inæqualibus maioris ad tertiam aliquam eſſe maiorem proportionem, quam minoris: At è contrario, tertiam eandem quantitatem ad minorem habere minorem proportionem, quam ad maiorem. Ex quo ſequitur id, quod diximus: nimirum poſitis his tribus numeris 6. 4. 3. maiorem eſſe proportionem eiuſdem numeri 6. ad minorem 3. quam ad medium 4. maiorem: Item maiorem eſſe proportionem maioris numeri 6. ad 3. quam minoris 4. ad eundem 3. Contra verò, maiorem eſſe proportionem eiuſdem numeri 3. ad minorem 4. quam ad maiorem 6. Item maiorem eſſe proportionem maioris numeri 4. ad 6. quam minoris 3. ad eundem 6. Eademque in cæteris ratio eſt. His poſitis, erit proportio dupla 4. ad 2. diuiſa hic, 4. 3. 2. in duas minores. Et tam proportio 8. ad 6. quæ eadem eſt, quæ 4. ad 3. diuiſa hic, 8. 7. 6. quam

proportio

Digitized by Google

proportio 6. ad 4. quæ eadem eſt, quæ 3. ad 2. hic 6. 5. 4. in duas minores. Item tam proportio 16. ad 14. quæ eadem eſt, quæ 8. ad 7. diuiſa hic, 16. 15. 14 & proportio 14. ad 12. quæ eadem eſt, quæ 7. ad 6. hic, 14. 13. 12. quam proportio 12. ad 10. quæ eadem eſt, quæ 6. ad 5. hic, 12. 11. 10. & proportio 10. ad 8. quæ eadem eſt, quæ 5. ad 4. hic, 10. 9. 8. in duas minores: atque ita fieri poteſt in infinitum. E contrario verò proportio ſubſeſquialtera 4. ad 6. diuiſa erit hic, 4. 5. 6. in duas maiores. Et tam proportio 8. ad 10. quæ eadem eſt, quæ 4. ad 5. diuiſa hic, 8. 9. 10. quam proportio 10. ad 12. quæ eadem eſt, quæ 5. ad 6. hic, 10. 11. 12 in duas maiores. Item tam proportio 16. ad 18. quæ eadem eſt, quæ 8. ad 9. diuiſa hic, 16. 17. 18. & proportio 18. ad 20. quæ eadem eſt, quæ 9. ad 10. hic, 18. 19. 20. quam proportio 20. ad 22. quæ eadem eſt, quæ 10. ad 11. hic, 20. 21. 22. & proportio 22. ad 24. quæ eadem eſt, quæ 11. ad 12. hic, 22. 23. 24. in duas maiores: atque huius incrementi nunquam erit finis. Idemque experiri licebit in quibuſuis aliis proportionibus. Vt proportio decupla 10. ad 1. diuiſa hic eſt, 10. 6. 1. in duas minores: Et proportio ſubſuperſeptupartiens vndecimas 11. ad 18. diuiſa hic, 11. 15. 18. in duas maiores, &c.

DE PROPORTIONALITATIBUS.

PROPORTIONALITAS *ab Euclide definita in plura genera diuiditur, vt videre licet apud Boetium, Iordanum, & alios Arithmeticos: ſed præcipuæ proportionalitates, quas auctores nominati Medietates vocant, ſunt hæ tres; Arithmetica, Geometrica, & Muſica, ſiue Harmonica.*

ARITHMETICA *proportionalitas, ſiue Medietas, eſt, quando tres, vel plures numeri per eandem differentiam progrediuntur. Vt hi numeri 4. 7. 10. 13. 16. quorum quilibet ſuum antecedentem ternario ſuperat, dicuntur conſtituere proportionalitatem Arithmeticam. Eſt autem duplex, continua, & diſcreta. Continua eſt, quando in progreßione numerorum nulla fit interruptio, ſed quilibet cum proximè antecedente confertur, vt in dato exemplo fit. Diſcreta autem eſt, quando in numerorum progreßione interruptio fit, ita vt bini tantum inter ſe conferantur, non autem quilibet cum proximè præcedente. Vt in his numeris contingit, 4. 7. 8. 11. 30. 33. Nam eadem differentia eſt inter binos 4. 7. & 8. 11. & 30. 33. non autem inter 4. 7. & 7. 8. &c.*

GEOMETRICA proportionalitas, ſiue Medietas eſt, quando tres, vel plures numeri eandem proportionem habent: quam quidem Euclides definiuit. Hæc enim propriè proportionalitas dicitur, ſiue Analogia: alia verò impropriè, cum non ſit eadem ſemper inter earum terminos proportio, ita vt rectius Medietates dicantur, propter medios terminos, qui certa quadam ratione inter extremos interiiciuntur. Vt hi numeri, 2. 6. 18. 54. quoniam quilibet ad ſuum antecedentem eandem habet proportionem triplam, conſtituunt proportionalitatem Geometricam. Hæc duplex quoque eſt, continua, & diſcreta, vt in 4. defin. huius lib. explicauimus. Continua cernitur in datis numeris, diſcreta autem in hiſce ſex, 2. 3. 12. 18. 20. 30. Nam bini tantum 2. 3. & 12. 18. & 20. 30. eandem habent proportionem ſeſquialteram; non autem quilibet ad proximè præcedentem.

MVSICA ſiue Harmonica proportionalitas, ſiue Medietas eſt, quando tres numeri ita ordinantur, vt eadem ſit proportio maximi ad minimum, quæ differentiæ inter maiores duos ad differentiam inter duos minores: ita vt nec eadem inter eos ſit differentia, vt in Arithmetica, nec eadem proportio, vt in Geometrica. Vt tres hi numeri, 3. 4. 6. quoniam eadem eſt proportio maximi 6. ad minimum 3. quæ differentiæ inter maximum 6. & medium 4. nimirum numeri 2. ad differentiam inter medium 4. & minimum 3. id eſt, ad 1. (cum vtrobique proportio ſit dupla) conſtituunt proportionalitatem, ſiue Medietatem Muſicam ſiue Harmonicam: Ipſi verò neque eandem habent differentiam, neque eandem proportionem, vt patet. Sic etiam tres hi numeri 42. 12. 7. Harmonicam proportionalitatem conſtituunt, quia eadem proportio eſt maximi 42. ad minimum 7. quæ differentiæ inter maximum 42. & medium 12. hoc eſt, numeri 30. ad differentiam 5. inter medium 12. & minimum 7. cum vtrobique proportio ſit ſextupla. Dicitur autem huiuſmodi proportionalitas Muſica, ſiue Harmonica, quia plerumque eius numeri habent proportiones eas, in quibus conſonantiæ Muſicæ conſiſtunt. Vt in priori exemplo inter 6. & 4. eſt proportio ſeſquialtera, conſtituens conſonantiam, quæ Diapente dicitur, ſiue Quinta. Item inter 4. & 3. eſt proportio ſeſquitertia, conſtituens conſo-

Digitized by Google

conſonantiam, quam Diateſſaron, ſiue Quartam vocant. Denique inter extremos 6. & 3. cernitur proportio dupla, quæ Diapaſon conſonantiam, ſiue octauam conſtituit. Atque eodem modo in pleriſque aliis idem cernitur.

PROPRIETATES ALIQVOT TRIVM proportionalitatum, ſiue Medietatum, quas explicauimus.

I.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, minor eſt proportio maximi ad medium, quàm medij ad minimum. Vt hic patet. 2. 4. 6. Nam proportio 6. ad 4. eſt ſeſquialtera; & 4. ad 2. dupla.

AT in tribus numeris proportionalitatis Muſicæ, maior eſt proportio maximi ad medium, quàm medij ad minimum. Vt hîc vides. 3. 4. 6. Proportio enim 6. ad 4. eſt ſeſquialtera; & 4. ad 3. ſeſquitertia.

IN tribus denique numeris proportionalitatis Geometricæ, eadem eſt proportio maximi ad medium, quæ medij ad minimum, vt ex eius definitione conſtat, apparetq; in hiſce tribus numeris 3. 6. 12. Tam enim 12. ad 6. quàm 6. ad 3. duplam habent proportionem. Quæ in re Geometrica proportionalitas medium locum tuetur inter Arithmeticam, atque Harmonicam, cùm in Arithmetica inter maiores numeros minor ſit proportio, quàm inter minores. Contrà verò in Harmonica inter maiores numeros maior, quàm inter minores: In Geometrica autem eadem inter maiores, quæ inter minores, vt explicatum eſt.

II.

ARITHMETICA proportionalitas habet terminorum differentias æquales, proportiones verò eorundem inæquales.

GEOMETRICA è contrario differentias terminorum habet inæquales, proportiones verò eorundem æquales.

HARMONICA denique neque differentias, neque proportiones terminorum æquales habet: Patet hoc ex ſuprioribus exemplis.

III.

IN tribus numeris Arithmeticæ proportionalitatis, medius eadem ſui parte, vel partibus minorem ſuperat, & à maiori ſuperatur. Vt hic, 3. 7. 11. Medius 7. ſuperat minorem 3. quatuor vnitatibus, quæ efficiunt $\frac{4}{7}$ ipſius medij 7. Item medius idem 7. ſuperatur à maiore 11. quatuor quoque vnitatibus, quæ conſtituunt eiuſdem medij, $\frac{4}{7}$. Item hic 15. 20. 25. medius 20. ſuperat minorem 15. quinque vnitatibus, quæ efficiunt $\frac{1}{4}$. ipſius medij 20. Item medius idem 20. ſuperatur à maiore 25. quinque quoque vnitatibus, quæ conſtituunt $\frac{1}{4}$. eiuſdem medij 20.

AT in tribus numeris proportionalitatis Geometricæ, medius eadem ſui parte, vel partibus minorem ſuperat, qua parte, vel partibus maioris à maiore ſuperatur. Vt hic 4.6.9. medius 6. ſuperat minorem 4. binario, qui eſt ⅓. medij, ſuperaturq; à maiore 9. ternario, qui quoque eſt ⅓. maioris. Sic etiam hic 9. 15. 25. vbi eſt continua proportio ſuperbipartiens tertias, medius 15. ſuperat minorem 9. ſex vnitatibus, quæ faciunt ⅖. ipſius medij 15. Et idem medius 15. ſuperatur à maiore 25. decem vnitatibus, quæ efficiunt quoque ⅖. ipſius maioris 25.

IN tribus denique numeris Harmonicæ proportionalitatis, medius eadem parte, vel partibus minoris minorem ſuperat, qua parte vel partibus maioris à maiore ſuperatur. Vt hic, 3.4.6. medius 4. ſuperat minorem 3. vnitate, quæ eſt ⅓. eiuſdem minoris, ſuperaturq; à maiore 6. binario, qui quoque eſt ⅓. eiuſdem maioris. Rurſus in hac proportionalitate Harmonica, 42. 12. 7. medius 12. ſuperat minorem 7. quinque vnitatibus, quæ ſunt 5/7. ipſius minoris 7. Et idem medius 12. ſuperatur à maiore 42. triginta vnitatibus, quæ ſunt 30/42. hoc eſt, in minimis numeris, 5/7. quoq; ipſius maioris 42.

IV.

IN tribus numeris Arithmeticæ proportionalitatis, ſumma extremorum dupla eſt medij. Vt hic, 3.7.11. ſumma extremorum 14. dupla eſt medij 7.

AT in tribus numeris proportionalitatis tam Geometricæ, quàm Harmonicæ, ſumma extremorum ſuperat duplum medij numero, quo differentia maiorum differentiam minorum ſuperat. Vt hic, 4. 6. 9. & 3. 4. 6. tam ſumma 13. extremorum 4. 9. ſuperat duplum medij 6. hoc eſt, 12. vnitate, qua differentia maiorum, nimirum 3. ſuperat 2. differentiam minorum, quàm ſumma 9. extremorum 3. 6. duplum medij 4. id eſt, 8. ſuperat vnitate, qua differentia maiorum, nimirum 2. ſuperat differentiam minorum, quæ eſt 1. Sic etiam hic, 9. 15. 25. vbi eſt continua proportio ſuperbipartiens tertias, ſumma 34. extremorum 9. 25. ſuperat duplum medij 15. hoc eſt, 30. numero 4. quo eadem differentia maiorum, 10. differentiam minorum, 6. ſuperat. Item in hac proportionalitate Harmonica, 42.12.7. ſumma 49. extremorum duplum medij 12. id eſt, 24. ſuperat numero 25. quo differentia maiorum 30. ſuperat differentiam minorum 5.

V.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, extremi inter ſe multiplicati procreant numerum, qui à quadrato medij ſuperatur numero, qui fit ex differentia minorum in maiorum differentiam. Vt hic 3. 7. 11. numerus 33. factus ex 3. in 11. ſuperatur à 49. quadrato medij, numero 16. qui fit ex differentia 4. in differentiam 4.

AT in tribus numeris proportionalitatis Geometricæ, numerus

Digitized by Google

ex primo in tertium genitus quadrato medij æqualis eſt, vt hic, 4. 6. 9. Extremos inter ſe multiplicati faciunt 36. quadratum medij.

IN tribus numeris denique Harmonicæ proportionalitatis, numerum ex multiplicatione extremorum inter ſe genitus ſuperat quadratum medij numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam maiorum. Vt hic 42. 12. 7. numerus 294. factus ex 42. in 7. ſuperat 144. quadratum medij numero 150. qui fit ex differentia 30. in differentiam 5. Qua in re etiam medium locum obtinet Geometrica proportionalitas inter Arithmeticam, & Harmonicam; quippe cùm in Arithmetica minus producatur ex primo in tertium, quam ex medio in ſe, in Harmonica verò plus, & in Geometrica idem numerus gignatur.

VI.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, ſumma extremorum in medium ducta producit numerum, qui duplum producti ex primo in tertium ſuperat numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam maiorum duplicatam. Vt hic, 3. 7. 11. Summa extremorum 14. in medium 7. facit 98. qui numerus ſuperat numerum 66. qui duplus eſt producti 33. ex primo in tertium, numero 32. qui fit ex differentia 4. in differentiam 4. duplicatam, hoc eſt, in 8.

IN tribus autem numeris Geometricæ proportionalitatis ſummæ extremorum in medium multiplicata gignit numerum, qui duplum producti ex primo in tertium ſuperat numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam maiorum. Vt hic 4. 6. 9. Summa 13. extremorum in mediũ 6. facit 78. qui numerus duplum producti ex 4. in 9. id eſt, 72 ſuperat numero 6. ex differentia 2 in differentiã 3 genito.

DENIQVE in tribus numeris proportionalitatis Harmonicæ, ex ſumma extremorum in medium procreatur numerus duplus producti ex primo in tertium. Vt hic 3. 4. 6. Ex ſumma extremorum 9. in medium 4. fit numerus 36. duplus producti 18. ex 3. in 6.

VII.

QVATVOR numeris in proportionalitate Geometrica non continuè proportionalibus datis, ſi ſecundus eſt inter extremos medius in proportionalitate Arithmetica, erit tertius inter eoſdem extremos medius in Harmonica proportionalitate: Et ſi ſecundus medius eſt in proportionalitate Harmonica, erit tertius in Arithmetica medius. Vt hic, 6. 9. 8. 12. quoniam ita eſt 6. ad 9. vt 8. ad 12. Et ſunt 6. 9. 12. proportionales Arithmeticè, cùm eundem habeant exceſſum 3. vides 6. 8. 12. Harmonicè proportionales eſſe, cùm eadem ſit proportio 12. ad 6. quæ differentiæ maiorum, 4. ad 2. differentiam minorum. Item hic, 6. 8. 9. 12. quia ita eſt 6. ad 8. vt 9. ad 12. Et ſunt 6. 8. 12. proportionales Harmonicè, vt diximus, vides 6. 9. 12. Arithmeticè eſſe proportionales, cùm eundem exceſſum 3 habeant.

ITEM quatuor numeris datis, quorum alteruter mediorum ſit

inter

Digitized by Google

inter extremos medius in proportionalitate Arithmetica, & alter in Harmonica; erunt quatuor dati numeri Geometricè non continuo proportionales. Vt quia datis his 4. numeris, 4.6.8.12. tertius 8. medius eſt Arithmeticè inter extremos 4.12. & ſecundus 6. inter eoſdem extremos 4.12. medius eſt Harmonicè; vides ita eſſe 4. ad 6. vt 8. ad 12. Et 4. ad 8. vt 6. ad 12.

VIII.

PROPOSITIS quotquot numeris continuè proportionalibus ſiue Arithmeticè, ſiue Geometricè, ſiue Harmonicè, (continuantur autem plures numeri in proportionalitate Harmonica, quando tres primi ſunt Harmonicè proportionales, item tres primum inſequentes, relicto primo; & relictis primis duobus, alij tres, qui ſequuntur; nec non primis tribus relictis, ſubſequentes tres, & ſic deinceps.) erunt in eadem proportionalitate conſtituti numeri, qui in locis tam imparibus, quàm paribus, atque etiam partim in imparibus, partim in paribus alternis locantur, dummodò æqualis multitudo numerorum inter quoſuis impares, & pares, vel inter partim impares, partim pares alternis interijciantur: cuiuſmodi ſunt primus, tertius, quintus, ſeptimus, &c. Item ſecundus, quartus, ſextus, &c. Præterea primus, quartus, ſeptimus, &c. Inſuper primus, quintus, nonus, &c. atque ita deinceps. Id quod in exemplis, quæ ſequuntur, perſpicuum eſt.

PROPORTIONALITATES Arithmeticæ.

3.	7.	11.	15.	19.	23.	27.	31.	35.	39.	43.	47.	51.	55.	59.
3.		11.		19.		27.		35.		43.		51.		59.
	7.		15.		23.		31.		39.		47.		55.	
3.			15.			27.			39.			51.		
	7.			19.			31			43.			55.	
3.				19.				35.				51.		

Proportionalitates Geometricæ.

5	10	20	40	80	160	120	640	1280	2560	5120	10240	20480	40960
5		20		80		320		1280		5120		20480	
	10		40		160		640		2560		10240		40960
5			40			320			2560			20480	
	10			80			640			5120			40960
5				80				1280				20480	

Propor-

Proportionalitates Harmonicæ.

252	280	315	360	420	504	630	840	1260	2520
252		315		420		630		1260	
	280		360		504		840		2520
252			360			630			2520
	280			420			840		
252				420				1260	

IX.

QVOTQVOT numeris proportionalibus datis ſiue in Arithmetica proportionalitate, ſiue Geometrica, aut Harmonica, ſi ſinguli per aliquem numerum eundem multiplicentur, aut diuidantur, habebunt quoque producti numeri, vel Quotientes proportionalitatem Arithmeticam, vel Geometricam, aut Harmonicam. Vt hic vides ſingulos multiplicatos per 4. Item diuiſos per 4.

Arithmetica prop.			*Geometrica prop.*			*Harmonica prop.*		
20	28	36	20	40	80	60	84	140
Producti.			*Producti.*			*Producti.*		
80	112	144	80	160	320	240	336	560
Quotientes.			*Quotientes.*			*Quotientes.*		
5	7	9	5	10	20	15	21	35

CÆTERVM in Geometrica, & Harmonica proportionalitate, numeri producti, & Quotientes retinent eandem ſpecie proportionem, quam numeri multiplicati, aut diuiſi habent: At in Arithmetica non ſeruant eandem differentiam: Sed producti numeri habent differentiam differentiæ multiplicatorum numerorum multiplicem à numero multiplicante denominatum. Vt in dato exemplo quadruplam. Differentia enim inter 20. & 28. eſt 8. at inter 80. & 112. eſt 32. Quotientum verò differentia ad differentiam numerorum diuiſorum habet proportionem ſubmultiplicem à diuiſore denominatam, prapoſita particula, ſub. Vt in dato exemplo ſubquadruplam. Nam differentia inter 20. & 28. eſt 8. at inter 5. & 7. eſt 2. Eadem proportio differentiarum inter productos numeros, & multiplicatos, atque inter Quotientes, numeroſq; diuiſos reperitur in proportionalitate Geometrica, & Harmonica: Ita vides differentias numerorum 80. 160. 320. Item numerorum 240. 336. 560. quadruplas eſſe differentiarum inter numeros 20. 40. 80. & inter numeros 60. 84. 140. At verò differentias numerorum 5. 10. 20. & numerorum 15. 21. 35. eſſe earundem differentiarum ſubquadruplas.

DE

DE PROPORTIONALITATE Arithmetica.

I.

DATIS duobus numeris quibuſcunque, ſi eorum differentiam maiori addas, habebis tertium terminum in proportionalitate Arithmetica vtroque dato maiorem. Et ſi eandem differentiam huic tertio addas, conficies quartum adhuc maiorem in eadem proportionalitate: Atque ita deinceps reperies infinitos alios ſemper maiores, ſi differentiam vltimo inuento ſemper adijcias. Vt datis duobus numeris 4. 11. quorum differentia eſt 7. conſtituetur hac proportionalitas Arithmetica, quæ extendi poteſt in infinitum.

4. 11. 18. 25. 32. 39. 46. 53. 60. 67. &c.

Quod ſi eandem differentiam à minori ſubtrahas, quando ſubtrahi poteſt, habebis rurſus tertium terminum in eadem proportionalitate: vtroq; minorem: Et ſi differentiam eandem à tertio detrahas, reliquus fiet quartus adhuc minor in eadem proportionalitatis. Atq; ita deinceps inuenies alios minores, ſi differentiam ab vltimo inuento ſemper demas, donec ſubtractio amplius fieri nequeat. Vt datis numeris 30. 34. quorum differentia eſt 4. conſtituetur hac proportionalitas Arithmetica vſq; ad 2. quæ vlterius progredi nequit, cùm differentia 4. amplius ſubtrahi nequeat à 2.

34. 30. 26. 22. 18. 14. 10. 6. 2.

EADEM proportionalitas extendetur, etiamſi differentia non aſſumatur, hoc modo. Datis duobus numeris, à maiore duplicato detrahe minorem. Reliquus enim numerus erit tertius terminus vtroque dato maior. A quo duplicato ſi proximè præcedentem ſubtrahas, habebis quartum; & ſic in infinitum. Vt datis duobus numeris 4. 15. ſi à 15. duplicato, hoc eſt, à 30. ſubtrahas 4. reliquus erit tertius terminus 26. Ab huius duplo 52. ſi quoque demas 15. habebis quartum terminum 37. & ſic deinceps, vt hic apparet 4. 15. 26. 37. 48. &c.

RVRSVS datis duobus numeris; ſi ex duplo minoris detrahas maiorem, relinquetur tertius numerus vtroque minor. Et ſi ex huius duplo proxime præcedentem demas, relinques quartum terminum adhuc minorem; & ſic deinceps, donec amplius ſubtractio fieri nequeat. Vt datis duobus numeris 20. 27. ſi ex 20. duplicato, id eſt, ex 40. detrahas 27. reliquus fiet tertius terminus 13. Ab huius duplo 26. ſi quoque detrahas 20. manebit quartus terminus 6. Et quia ab huius duplo 12. præcedens terminus 13. ſubtrahi non poteſt, non poterit proportionalitas vlterius progredi, vt hic vides. 27. 20. 13. 6.

QVAN-

Digitized by Google

11.

QVANDO terminorum numerus eſt impar, ſumma extremorum æqualis eſt ſummæ quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter diſtantium, dupla autem medij termini, à quo extremi æqualiter diſtant. Vt hic.

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28.

Summa 4. & 28. *Item* 7. & 25. *Item* 10. & 22. *Item* 13. & 19. *Item duplum medij termini* 16. *ſemper eſt* 32.

QVANDO autem numerus terminorum eſt par, ſumma extremorum æqualis ſemper eſt ſummæ quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter remotorum. Vt hic.

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31.

Summa 4. & 31. *Item* 7. & 28. *Item* 10. & 25. *Item* 13. & 22. *Item* 16. & 19. *ſemper eſt* 35.

ITAQVE quando numerus terminorum impar eſt, habebit ſumma omnium terminorum ad medium terminum ab extremis æqualiter diſtantem, hoc eſt, ad ſemiſſem ſummæ extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis æqualiter diſtantium, proportionem multiplicem à numero terminorum denominatam. Cùm enim ſumma extremorum, vel quorumlibet duorum ab extremis æquali interuallo diſtantium, dupla ſit termini medij, continebitur medius terminus, ſiue ſemiſſis ſummæ extremorum, in ſumma omnium terminorum toties, quot ſunt termini; ſemel quidem in ipſo medio termino, & bis in qualibet ſumma duorum à medio termino æqualiter diſtantium: ac proinde omnium terminorum ſumma ad ſemiſſem aggregati extremorum, hoc eſt, ad medium terminum, proportionem habebit multiplicem, cuius denominator eſt numerus terminorum. Vt in hac ſerie nouem numerorum.

6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30.

Summa omnium terminorum continebit medium terminum 18: *hoc eſt, ſemiſſem ſummæ extremorum* 6. & 30. *toties, quot vnitates ſunt in* 9. *numero terminorum, id eſt, ſumma omnium terminorum ad* 18. *ſemiſſem ſummæ extremorum, ſiue ad medium terminum, proportionem habebit nonuplam. Eademq; in cæteris eſt ratio.*

SVMMAM igitur omnium terminorum proportionalitatis Arithmeticæ, cuius terminorum numerus impar eſt, facilè inueniemus, ſi ſemiſſem aggregati extremorum, (quod ſemper par eſt, quando terminorum numerus eſt impar) per numerum terminorum multiplicemus. Vt in hac ſerie 11. *terminorum.*

7. 19.

7. 19. 31 43. 55. 67. 79. 91. 103. 115. 127.

Summa extremorum eſt 134. Cuius ſemiſſis 67. quæ à medio termino 67. non differt, in 11. numerum terminorum ducta producit 737. ſummam omnium terminorum. Atq; hæc ratio conuenit etiam in proportionalitatem, cuius terminorum numerus eſt par: ſed quando extremorum ſumma impar eſt (quando enim terminorum numerus eſt par, poteſt eſſe ſumma extremorum impar, non autem ſemper par) erit eius ſemiſſis, numerus integer cum $\frac{1}{2}$.

QVANDO autem terminorum numerus eſt par, habebit ſumma omnium terminorum ad ſummam extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis æqualiter diſtantium proportionem multiplicem à ſemiſſe numeri terminorum denominatam. Cùm enim ſumma quorumlibet duorum ab extremis æqualiter diſtantium æqualis ſit ſummæ extremorum, continebitur hæc ſumma extremorum toties in ſumma omnium terminorum, quoties vnitas in dimidiato numero terminorum continetur, ſemel nimirum in ſumma quorumlibet duorum ab extremis diſtantium æqualiter: atque idcirco ſumma omniũ terminorum ad ſummam extremorum proportionem habebit multiplicem à dimidiato numero terminorum denominatam. Vt in hac ſerie 10. terminorum.

6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33.

Summa omnium terminorum ſummam extremorum 6. & 33. quæ eſt 39. continebit quinquies, hoc eſt, ſumma omnium terminorum ad 38. ſummam extremorum habebit proportionem quintuplam. Et ſic de alijs.

SVMMAM ergo omnium terminorum proportionalitatis Arithmeticæ, cuius terminorum numerus par eſt, obtinebimus, ſi ſummam extremorum in dimidiatum numerum terminorum (qui terminorum numerus dimidium habebit ſine fractione vnitatis, cùm par ponatur) ducamus. Vt in hac ſerie 10. terminorum.

6. 11. 16. 21. 26. 31. 36. 41. 46. 51.

Summa extremorum eſt 57. quæ in 5. ſemiſſem numeri terminorum ducta efficit 285. ſummam omnium terminorum. Hæc ratio conuenit etiam in proportionalitatem, cuius terminorum numerus eſt impar: ſed ſemiſſis numeri terminorum ſemper erit integer cum $\frac{1}{2}$. *numerus terminorum ponatur impar.*

VIDES igitur ſatis eſſe, vt ſumma inueniatur, ſi extremi termini, vnà cum terminorum numero cogniti ſint. Quo pacto autem ex cognito altero extremorum terminorum numero, atq; differentia, in cognitionem alterius extremi peruenire poſſimus, iamiam docebimus.

III.

SI in proportionalitate Arithmetica quotuis terminorum alterum extremorum, numerum terminorum, & differentiam cognoſcamus, reperiemus alterum extremum, hoc modo. Numerum proximè minorem numero terminorum in differentiam datam ducemus, & productum minori extremo cognito adijciemus, vel eundem numerum productum ex maiore extremo noto detrahemus. Nam ibi conficiemus maius extremum, quod quæritur, hic autem reliquum fiet minus extremum ignotum. Exempli cauſa. Si proponatur minus extremum notum 4. numerus terminorum 12. & differentia 5. multiplicabimus 11. nimirum numerum proximè minorem terminorum numero, per differentiam datam 5. productoq; 55. minus extremum 4. adijciemus. Summa enim 59. erit extremum maius. Vt in his 12. terminis manifeſtum eſt, quorum differentia eſt 5.

4. 9. 14. 19. 24. 29. 34. 39. 44. 49. 54. 59.

Si verò proponatur maius extremum notum 59. & idem terminorum numerus 12. cum differentia eadem 5. auferemus numerum 55. productum ex 11. numero, qui numero terminorum proximè minor eſt, in differentiam 5. ex noto maiore extremo 59. Reliquus enim numerus 4. erit minus extremum. Vt in eodem exemplo perſpicuum eſt.

NECESSE autem eſt, ſi minus extremum inquiratur, numerum productum ex numero, qui numero terminorum proximè minor eſt, in differentiam, maiorem eſſe maiore extremo cognito, vt ſubtractio fieri poſſit. Alioquin quæſtio erit impoſſibilis: hoc eſt, fieri non poterit, vt datus numerus poſſit eſſe maius extremum in progreſſione vlla, cuius differentia, & numerus terminorum ita ſe habeant, vt proponitur. Vt ſi quis daret maius extremum 20. numerum terminorum 6. & differentiam 5. non poſſet inueniri minus extremum; propterea quòd numerus 25. productus ex 5. qui proximè minor eſt terminorum numero, in differentiam 5. maior eſt dato maiore extremo 20. Quod ſi quando contingat, productum illum numerum maiori extremo eſſe æqualem, ita vt ſubtractione facta, relinquatur 0. erit quidem quæſtio poſſibilis, ſed minus extremum erit 0. Vt ſi in poſteriori hoc exemplo maius extremũ proponeretur 25. fieret hæc proportionalitas Arithmetica. 0. 5. 10. 15. 20. 25.

IV.

SI extremi termini noti ſint, vnà cum numero terminorum, reperiemus differentiam numerorum hoc pacto. Dempto minore extremo à maiore, diuidemus reliquum numerum per numerum proximè minorem numero terminorum. Nam Quotiens erit differentia quæſita. Vt ſi quis dicat, eſſe 10. terminos proportionalitatis cuiuſpiam Arithmeticæ, cuius numeri extremi ſint 7. & 52. Dempto minore extremo 7.

Digitized by Google

ex maiore 52. reliquum numerum 45. partiemur per 9. numerum proximè minorem numero terminorum. Quotiens enim 5. erit differentia, quæ quæritur, vt hic apparet.

7. 12. 17. 22. 27. 32. 37. 42. 47. 52.

VERVM vt fractiones vitentur, progreſſioq́; propoſita locum habeat in numeris integris, neceſſe eſt, minore extremo detracto ex maiore, vt reliquus numerus poſſit numerari à numero, qui terminorum numero proximè minor eſt. Si enim non numeretur, differentia inuenta erit vel fractio, vel numerus integer cum fractione: quæſtio tamen erit poſſibilis. Vt ſi quis proponat extremos terminos 2. & 38. & numerum terminorum 9. Demptis 2. ex 38. & reliquo numero 36. diuiſo per 8. reperitur differentia 4½. vt patet in hoc exemplo.

2. 6½. 11. 15½. 20. 24½. 29. 33½. 38.

V.

SI duo termini extremi, vnà cum differentia, noti ſint, eliciemus numerum terminorum hac ratione. Detracto minore extremo à maiore, partiemur reliquum numerum per differentiam. Nam ſi Quotienti adiiciamus 1. conflabimus numerum terminorum quæſitum. Vt datis duobus extremis 10. & 40. cum differentia 3. Ablatis 10 ex 40. & reliquo numero 30 diuiſo per 3. fit Quotiens 10. Addito ergo 1. fit numerus terminorum 11. vt hic videre licet.

10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34. 37. 40.

SED vt quæſtio propoſita ſit poſſibilis, hoc eſt, vt verè in rerum natura exiſtat progreſſio aliqua, quæ habeat omnes conditiones propoſitas, neceſſe eſt, maiore extremo ſubducto ex maiore, reliquum numerum à differentia numerari. Si enim non numeretur, Quotiens non erit numerus integer, ac proinde indicare non poterit numerum terminorum, etiamſi addatur 1. Fieri enim non poteſt, vt detur progreſſio aliqua, cuius terminorum numerus non ſit integer.

VI.

SI duo extremi termini, vnà cum omnium terminorum ſumma, noti ſint, explorabimus, & numerum terminorum, & differentiam, hac arte. Summam omnium terminorum per extremorum ſummam partiemur. Quotiens enim dabit dimidiatum numerum terminorum, & duplicatus totum numerum indicabit. Inuento autem terminorum numero, cùm & duo extremi termini cogniti ſint, inueniemus differentiam, vt in 4. regula traditum eſt; ſi nimirum minore extremo dempto ex maiore, reliquum numerum diuidamus per numerum

numerum

Digitized by Google

numerum proximè minorem numero terminorũ inuento. Verbi gratia. Si ſumma proponatur 515. & extremi termini 20 & 83. diuidemus ſummam 515 per 103. ſummam extremorum. Quotiens enim 5. duplicatus dabit numerum terminorum 10. quorum differentiam obtinebimus, ſi dempto minore extremo 20. ex maiore 83. reliquum numerum 63. partiamur per 9. numerum proximè minorem numero terminorum inuento. Nam Quotiens 7. erit differentia, vt hic cernis.

20. 27. 34. 41. 48. 55. 62. 69. 76. 83.

Vides ergo, vt quæſtio ſit poſſibilis, hoc eſt, vt re vera exiſtat aliqua progreſſio, in qua omnium terminorum ſumma, & duo extremi ita ſe habeant, vt proponitur, neceſſe eſſe, vt ſumma omnium terminorum data à ſumma extremorum numeretur. Alioquin terminorum numerus erui non poterit, ſi Quotiens non ſit numerus integer: Vel certè, ſi ſumma omnium terminorum data à ſumma extremorum non numeretur, neceſſe eſſe, vt diuiſa ſumma omnium terminorum per extremorum ſummam, Quotiens ſit numerus integer cum $\frac{1}{2}$. vt nimirum duplicatus efficere poſſit numerum terminorum integrum.

VII.

SI trium terminorum extremi habeant proportionem duplam, medius ad differentiam habebit triplam proportionem. Si verò extremorum proportio maior ſit quàm dupla, proportio medij ad differentiam minor erit quàm tripla: Si denique minor ſit extremorum proportio quàm dupla, maior erit proportio medij ad differentiam, quàm tripla. Vt hic, 8. 12. 16. proportio extremorum 16 & 8. eſt dupla: & medij 12. ad differentiam 4. tripla. Hic autem, 8. 14. 20. proportio inter extremos 20. & 8. eſt dupla ſeſquialtera, nimirum maior quàm dupla: & medij 14. ad differentiam 6. dupla ſeſquitertia, minor videlicet, quàm tripla. Hic denique 8. 11. 14. extremi 14. & 8. proportionem habent ſupertripartientem quartas, quæ minor eſt quàm dupla: & medius 11. ad differentiam 3. triplam ſuperbipartientem tertias, hoc eſt, maiorem quàm triplam.

VIII.

INTER quoſuis duos numeros conſtitues medium proportionalem Arithmeticè, ſi eorum ſummæ accipias ſemiſſem. Vt datis duobus numeris 6. & 30. ſumma eorum eſt 36. Huius ergo ſemiſſis 18 medio loco proportionalis eſt Arithmeticè inter 6. & 30. vt hic manifeſtum eſt. 6. 18. 30. Itaque ſi medius terminus conſtituendus ſit numerus integer, neceſſe eſt, vtrumque numerorum datorum eſſe vel parem, vel imparem, vt videlicet ſumma extremorum ſemper ſit par, hoc eſt, vt poſſit habere dimidiũ ſine fractione vnitatis. Nam quando ſum-

ma extremorum impar eſt: quod accidit cùm alter extremorū par eſt, & alter impar, erit medius terminus integer numerus cum ſemiſſe Vnitatis. Vt datis numeris duobus 8 25. ſumma eorum eſt 33. Huius ergo dimidium $16\frac{1}{2}$. medius terminus erit hoc modo, 8. $16\frac{1}{2}$. 25.

IX.

INTER quoſuis autem duos numeros conſtitues, quotquot quis iuſſerit, medios proportionales Arithmeticè, hoc modo. Minorem detrahe ex maiore: Reliquum deinde numerum partire per numerum proximè maiorem numero mediorum conſtituendorum. Quotiens enim erit differentia proportionalitatis Arithmetica, quam ſi minori numero propoſito adijcias, conflabis primum medium. Huic ſi eandem differentiam addas, conficies ſecundum, & ſic deinceps. Vel ſi eam differentiam à maiori numero propoſito ſubtrahas, relinquetur Vltimus medius. A quo ſi eandem differentiam demas, remanebit penultimus, & ſic deinceps. Veluti ſi inter 6. & 114. conſtituendi ſint 11. termini medij, detrahemus 6. ex 114. Reliquum numerum 108. per 12. (qui numerus proximè maior eſt numero mediorum conſtituendorum) partiemur. Quotiens enim 9. erit differentia terminorum proportionalitatis. Sic ergo ſe habebunt 11. termini medij inter 6. & 114.

6. 15. 24. 33. 42. 51. 60. 69. 78. 87. 96. 105. 114.

SED quoniam plerunque tales duo numeri proponuntur, inter quos nō poſſunt cadere numeri integri medij proportionales, propterea quòd inuentus Quotiens pro differentia non ſemper numerus integer eſt; ſi fractiones Vitare Velis, neceſſe eſt, duos propoſitos numeros eſſe eiuſmodi, Vt dempto minore ex maiore, reliquus à numero, qui proximè maior eſt numero mediorum conſtituendorum, numeretur: quos ita facilè reperies. Accipe pro minore extremo quemcunque numerum, eumque adde cuicunque alij numero, quem numerus proximè maior numero mediorum inueniendorum metitur. Conflatus enim numerus maius extremum proportionalitatis erit. Vt ſi Velis duos numeros, inter quos cadant 8. numeri proportionales Arithmeticè, primus autem ſit, Verbi gratia 7. Adde hunc numerum 7. ad quemuis numerum, quem nouenarius, (qui proximè maior eſt numero mediorum conſtituendorum) metitur, nimirum ad 72. conficieſque maius extremum 79. Differentiam autem inuenies, Vt dictum eſt, detrahendo 7. ex 79. & reliquum numerum 72. per 9. diuidendo. Quotiens enim 8. erit differentia, Vt hic Vides.

7. 15. 23. 31. 39. 47. 55. 63. 71. 79.

QVOD

QVOD ſi quis proponat & minus extremum, & differentiam proportionalitatis, inuenies maius extremum, ita vt inter minus, & maius cadant quotuis medij numeri habentes illam differentiam, ſi numerum proximè maiorem numero mediorum conſtituendorum per datam differentiam multiplices, numeroq; producto minus extremum addas. Vt ſi quis velit inter 5. & quempiam maiorem numerum conſtituere 9. terminos medios, quorum differentia ſit 4. Multiplicanda erunt 10. per 4. & producto numero 40. addendum minus extremum 5. Nam inter conflatum numerum 45. & datum minus extremum 5. intercipiuntur 9. medij termini cum differentia data 4. Vt hic manifeſtum eſt.

5. 9. 13. 17. 21. 25. 29. 33. 37. 41. 45.

HAC alia etiam iucunda operatione conſtitues quotuis medios proportionales inter datos duos numeros. Vtrumque datorum numerorum partire per numerum proximè maiorem numero mediorum conſtituendorum: Quotientes ſub illis colloca, quemque ſub ſuo, & ab eiſdem Quotientibus aſcende per continuam eorum additionem addendo primo quemque ad ſeipſum, deinde ad numerum conflatum, atque ita deinceps, ita vt duas proportionalitates Arithmeticas inſtituas à Quotientibus incipientes, & per eoſdem progredientes, tot terminorum, (excluſis datis duobus numeris) quot medij termini deſiderantur. Poſtremò adde ſingulos terminos vnius ordinis ſingulis terminis aduerſis alterius ordinis; id eſt, maximum vnius minimo alterius; proximum deinde ſub illo, proximo ſupra hunc, &c. Numeri enim conflati dabunt medios optatos. Exempli gratia. Sint inter 15. & 100. conſtituendi 4. medij termini Arithmeticè proportionales. Vtroque diuiſo per 5. hoc eſt, per numerum proximè maiorem numero mediorum, fiunt Quotientes 3. & 20. Conſtitues ergo hos ordines 4. terminorum ſub 15. & 100. Arithmeticè proportionalium per eorundem Quotientum continuam additionem, addendo primùm 3. ad 3. vt fiant 6. Item 3. ad 6. vt fiant 9 Item 3. ad 9. vt fiant 12. Rurſus addendo 20. ad 20. vt fiant 40. Item 20. ad 40. vt fiant 60. Item 20. ad 60. vt fiant 80. vt hic vides.

15	32	49	66	83	100
12					80
9					60
6					40
3					20

EX 12. ſupremo primi ordinis, & infimo 20. ſecundi ordinis fiunt

32. pro primo medio. Ex 9. & 40. fiunt 49. pro ſecundo medio. Ex 6. & 60 fiunt 66. pro tertio medio. Denique ex 3 & 80. fiunt 83. pro quarto medio. Itaque in primo ordine ſemper deſcendendum eſt à ſupremo ad infimũ vſque, in ſecundo verò ab infimo ad ſupremũ vſque aſcendendum.

EST autem dignum conſideratione, differentiam Quotientum, qui ſunt minimi numeri duorum ordinum conſtitutorum, eſſe quoque differentiam proportionalitatis conſtituendæ. Ita vides differentiam in propoſito exemplo eſſe 17. quæ differentia etiam eſt inter Quotientes 3. & 20. Quocirca, inuentis Quotientibus, ſi minor à maiore ſubtrahatur, & reliquus numerus minori extremo dato adijciatur, & huic compoſito numero idem ille numerus reliquus addatur, & ita deinceps, conſtituentur ijdem termini medij, etiamſi duo illi ordines non inſtituantur.

VIDES ergo, vtrumque numerum propoſitum numerari debere à numero, qui numerum mediorum vna vnitate ſuperat, ſi fractiones euitandæ ſint: Vel certè inueniendos eſſe duos extremos, vt in priori parte huius regulæ præcepimus. In ijs enim fractiones quoque vitantur, etiamſi eos numerus numero mediorum proximè maior non numeret: quia minore Quotiente detracto ex maiore, ſemper numerus integer relinquitur; vt in exemplis prioris illius regulæ apparet. Nam in tertio eorum verbi gratia, inter 5. & 45. conſtituendi ſunt 9. termini medij. Si igitur vterque per 10. diuidatur, fiunt Quotientes $\frac{5}{10}$. & $\frac{45}{10}$. hoc eſt, $\frac{1}{2}$. & $4\frac{1}{2}$. quorum differentia eſt 4. numerus integer, ex cuius continua additione ad minus extremum datum medij termini optati conficiuntur: qui ijdem reperientur, ſi per Quotientes $\frac{1}{2}$. & $4\frac{1}{2}$. duo ordines inſtituantur aſcendentes, vt dictum eſt, per ipſorum Quotientum additionem continuam, &c.

X.

NVMERVM quemlibet propoſitum diſtribuemus in partes quotquot quis iuſſerit, proportionalitatem Arithmeticam ſeruantes, hac ratione. Diuiſo dato numero per ſemiſſem numeri terminorum, ſecabimus Quotientem in duas partes inæquales vtcunque, pro extremis terminis proportionalitatis. Deinde quia iam dati ſunt duo termini extremi, cum numero terminorum, detrahemus minus extremum ex maiore, partiemurque reliquum numerum per numerum proximè minorem numero terminorum. Ita namque prodibit in Quotiente differentia, vt ex 4. regula patet. Si igitur hæc differentia addatur minori extremo aſſumpto, deinde ad numerum conflatum, atque ita deinceps, conſtituetur numerus terminorum datus, quorum ſumma propoſito numero æqualis eſt: ac proinde datus numerus in numerum partium Arithmeticè pooportionalium ſectus erit. Exempli cauſa, ſi numerus 830. diſtribuendus ſit in 10. partes proportionales Arithmeticè; partiemur eum per 5. ſemiſſem terminorum, Quotien-

tientemque 166. ſecabimus in 20. & 146. terminos extremos proportionalitatis conſtituendæ. Deinde deductis 20. ex 146. numerum reliquum 126. diuidemus per 9. numerum proximè minorem numero terminorum. Quotiens enim 14. (Vt in 4. regula dictum eſt) differentia erit proportionalitatis. Vt hic vides.

20. 34. 48. 62. 76. 90. 104. 118. 132. 146.

Rurſus ſi numerus 10. diuidendus ſit in 10. partes proportionales Arithmeticè, diuidemus eum per 5. ſemiſſem terminorum: Quotientem verò 2. in duas partes inæquales ſecabimus $\frac{1}{2}$. & $1\frac{1}{2}$. pro extremis terminis proportionalitatis. Dempto deinde minore extremo $\frac{1}{2}$. ex maiore $1\frac{1}{2}$. partiemur reliquam 1. per 9. numerum proximè minorem numero partium conſtituendarum. Quotiens enim $\frac{1}{9}$. differentia erit continuè addenda minori extremo $\frac{1}{2}$. & numero conflato, &c. Quæ additio, vt facilior fiat, reducemus minus extremum $\frac{1}{2}$. & differentiam $\frac{1}{9}$. ad eandem denominationem, vt ad $\frac{9}{18}$. & $\frac{2}{18}$. Sic ergo diuiſus erit numerus 10. in 10. partes Arithmeticè proportionales, quarum prima eſt $\frac{1}{2}$. ſiue $\frac{9}{18}$. vltima verò $1\frac{1}{2}$. ſiue $1\frac{9}{18}$. & differentia $\frac{2}{18}$.

$\frac{9}{18}$. $\frac{11}{18}$. $\frac{13}{18}$. $\frac{15}{18}$. $\frac{17}{18}$. $1\frac{1}{18}$. $1\frac{3}{18}$. $1\frac{5}{18}$. $1\frac{7}{18}$. $1\frac{9}{18}$.

Certum autem eſt, hac ratione varijs modis datum numerum diuidi poſſe in propoſitum numerum partium proportionalium, prout videlicet, diuiſo dato numero per ſemiſſem numeri terminorum, Quotiens in alias partes binas inæquales pro terminis extremis ſectus fuerit.

IDEM efficiemus hac ratione. Numero dato, ac ſi eſſet ſumma omnium terminorũ conſtituendorum, diuiſo per numerum terminorum datũ, dabit Quotiens duplicatus ſummam extremorũ: propterea quòd huius extremorum ſumma ſemiſſis, id eſt, Quotiens inuentus ductus in numerum terminorum, hoc eſt, in diuiſorem, producit ſummam omnium terminorum, nimirum datum numerum, vt in ſecunda regula dictum eſt. Quare ſi Quotientem duplicatum in duos numeros inæquales ſecemus pro terminis extremis: & minore detracto ex maiore, reliquum numerum per numerum proximè minorem numero terminorum dato diuidamus, dabit Quotiens differentiam, vt in 4. regula diximus. Quam ſi ad minus extremum factum adijciamus, & iterum ad conflatum numerum, & ſic deinceps, conſtituta erit proportionalitas Arithmetica, quæ imperatur. Veluti, ſi numerus 198. ſecandus proponatur in 9. partes Arithmeticè proportionales, partiemur eum per 9. terminorum numerum, vt fiat Quotiens 22. qui duplicatus dabit 44. ſummã extremorũ. Conſtituto igitur

Digitized by Google

minore extremo 10. ac proinde maiore 34. ſi detrahamus 10. ex 34. & reliquum numerum 24. per 8. numerum proximè minorem numero terminorum partiamur, gignetur differentia 3. Sic ergo ſtabunt 9. termini proportionalitatis Arithmeticæ conficientes ſummam 198.

10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34.

Hic etiam manifeſtum eſt, varijs medijs datum numerum diſtribui poſſe in datum numerum partium, prout videlicet Quotiens primus duplicatus, quem ſummam eſſe diximus extremorum, in alias atq; alias partes binas ſectus fuerit pro extremis duobus terminis.

SED fortaſſe faciliùs (quanquam operatio aliquantò longior ſit) idem hoc abſolues hac ratione: Cape tot numeros Arithmeticè quomodocunq; proportionales, in quot partes datus numerus diſtribuendus eſt, & ſingulos in datum numerum duc, procreatoſq; numeros per ſummam omnium terminorum ſumptorum ex 2. regula inuentam, partire. Quotientes enim dabunt partes, quas quæris. Verbi gratia. Sit diuidendus numerus 525. in 10. partes proportionales Arithmeticè. Sume 10. numeros Arithmeticè proportionales quoſcunque, 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. quorum ſumma eſt 175. Ductis autem ſingulis in datum numerum 525. creabuntur hi 10. numeri, 2100. 3675. 5250. 6825. 8400. 9975. 11550. 13125. 14700. 16275. quibus ſingulis diuiſis per ſummam 175. tuorum numerorum in proportionalitate Arithmetica acceptorum, gignentur hæ 10. partes, quas quæris.

12. 21. 30. 39. 48. 57. 66. 75. 84. 93.

IDEM obtinebis, ſi datum numerum per aſſumptorum numerorum ſummam partiaris, Quotientemq; in ſingulos aſſumptos numeros ducas. Producti enim numeri dabunt partes, quas quæris. Vt in dato exemplo, ſi datus numerus 525 diuidatur per 175. ſummam aſſumptorum numerorum, fit Quotiens 3. quo ducto in ſingulos numeros aſſumptos, 4. 7. 10. &c. gignētur eadē partes, quæ prius, 12. 21. 30. &c.

Vt autem operatio fiat facilior, ac breuior, ſatis eſt, priores duos numeros proportionalitatis accepta multiplicare per datum numerū, productosque numeros per ſummam omnium terminorum eiuſdem acceptæ proportionalitatis partiri. Vel ſatis eſt, dato numero per ſummam aſſumptorum numerorum diuiſo, Quotientem in duos priores aſſumptos numeros ducere. Ita enim reperientur primæ duæ partes numeri dati, quarum differentia addita maiori, fiet tertia, & eadem differentia addita tertiæ faciet quartam, & ſic deinceps. Liquidò autem hic quoque conſtare puto, datum numerum varijs modis diſtribui poſſe in partes, quotquot quis imperauerit, proportionales: prout ſcilicet alij atq; alij numeri eiuſdem proportionalitatis

Arith-

Arithmetica fuerint aſſumpti, vel quorum alia atque alia ſit differentia.

HAC via partes inuentæ habent ordinatim eaſdem proportiones inter ſe, quæ inter terminos proportionalitatis aſſumptos eodem ordine reperiuntur. Perpetuo autem ſinguli numeri accepti proportionalitatis ad ſingulas partes inuentas, primus ad primam, ſecundus ad ſecundam, &c. eandem omnino habent proportionem. Sic vides, inter primas partes inuentas 12. 21. eſſe proportionem ſupertripartientem quartas, qualis eſt inter primos numeros acceptos 4. 7. &c. Item 4. ad 12. & 7. ad 21. & 10. ad 30. &c. habere eandem prorſus proportionem, nimirum ſubtriplam.

ITAQVE, ſi accipiatur proportionalitas Arithmetica, cuius primi duo numeri habeant proportionem duplam, ita vt primus ſit differentia omnium terminorũ, habebunt primæ partes duplam quoq; proportionem, atque ideo prima erit quoque differentia, ex cuius additione aliæ partes coacervuentur. Vt ſi in ſuperiore exemplo accepiſſes hos 10. terminos, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. quorum ſumma eſt 55. Vel hos 10. numeros, 3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. quorum ſumma eſt 165. multiplicaſſesque primum quemque in datum numerum 525. & productos numeros 525. 1575. per ſummam quemlibet propriam, vt priorem per 55. & poſteriorem per 165. diuiſiſſes, inueniſſes primam partem 9 $\frac{6}{11}$. quæ eadem eſſet differentia. Quare partes omnes 10. conſtituentes proportionalitatem Arithmeticam fuiſſent hæ.

9 $\frac{6}{11}$. 19 $\frac{1}{11}$. 28 $\frac{7}{11}$. 38 $\frac{2}{11}$. 47 $\frac{8}{11}$. 57 $\frac{3}{11}$.

66 $\frac{9}{11}$. 76 $\frac{4}{11}$. 85 $\frac{10}{11}$. 95 $\frac{5}{11}$.

DE PROPORTIONALITATE Geometrica.

I.

DATIS quibuſuis duobus numeris, ſi denominatorem proportionis, quam habent, conferendo maiorem cum minore, hoc eſt, ſi diuiſo maiore per minorem, Quotientem ducas in maiorem, gignes tertium terminum in proportionalitate Geometrica vtroque dato maiorem. Et ſi eundem denominatorem, ſiue Quotientem in hunc tertium ducas, produces quartum adhuc maiorem in eadem proportionalitate: Atque ita deinceps conſtitues infinitos alios ſemper maiores, ſi denominatorem, Quotientemue per vltimum inuentum ſemper multiplices. Vt datis duobus numeris 4. 12. denominator proportionis 12. ad 4. eſt 3. quod diuiſis 12. per 4. Quotiens fiat 3. Si igitur ducas 3. in 12. & iterum in productum, & ſic in infinitum, conſtitues hanc proportionalitatem Geometricam, quæ in infinitum poteſt extendi.

4. 12. 36. 108. 324. 972. 2916. 8748. &c.

Digitized by Google

Quod ſi minorem cum maiore conferas, & denominatorem proportionis, quam habent, id eſt, diuiſo minore per maiorem, Quotientem ducas in minorem: Vel, quod idem eſt, per denominatorem proportionis, quam maior ad minorem habet, diuidas minorem, creabitur tertius numerus proportionalis vtroque minor. Ex quo eadem via reperies quartum adhuc minorem, & ſic in infinitum. Vt datis duobus numeris 8. 16. denominator proportionis 8. ad 16. eſt $\frac{1}{2}$. quod diuiſis 8. per 16. Quotiens fiat $\frac{1}{2}$. Denominator autem proportionis 16. ad 8. eſt 2. quod diuiſis 16. per 8. Quotiens fiat 2. Si igitur ducas $\frac{1}{2}$. in 8. vel diuiſis 8. per 2. idemque cum producto numero facias, conſtituetur hac proportionalitas Geometrica, progrediens quoque in infinitum verſus minores numeros, ſicut illa in infinitum verſus maiores numeros progrediebatur.

16. 8. 4. 2. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{32}$. $\frac{1}{64}$. &c.

EXTENDETVR quoq; eadem proportionalitas in infinitum, etiamſi denominator proportionis ignotus ſit, hoc modo. Datis duobus numeris, duc maiorem in ſe, & productum per minorem diuide. Quotiens enim erit tertius terminus vtroque maior. Hunc ſi iterum in ſe ducas, productumque per proximè præcedentem terminum diuidas, dabit Quotiens quartum terminum, & ſic deinceps. Vt datis duobus numeris, 3. 6. Ducto 6. in ſe, fit 36. quo diuiſo per 3. fit 12. tertius terminus. Rurſus ducto 12. in ſe, fit 144. quo diuiſo per 6 fit 24. quartus terminus, atque ita in infinitum, vt hic vides, 3. 6. 12. 24. 48. &c.

RVRSVS datis duobus numeris, ſi minorem in ſe duxeris, productumq; per maiorem diuiſeris, dabit Quotiens tertium terminum vtroque minorem. Quem ſi rurſus in ſe duxeris, productumque per proximè præcedentem terminum diuiſeris, dabit Quotiens quartum terminum adhuc minorem, & ſic deinceps. Vt datis duobus numeris 6. 18. Ducto 6. in ſe, fit 36. quo diuiſo per 18. fit 2. tertius terminus. Rurſus ducto 2. in ſe fit 4. quo diuiſo per 6. fit $\frac{4}{6}$. ſiue $\frac{2}{3}$. in minimis numeris, pro quarto termino: atque ita in infinitum, vt hic apparet.

18. 6. 2. $\frac{2}{3}$. $\frac{2}{9}$. $\frac{2}{27}$ &c.

IAM verò ſi quamcunq; proportionem non multiplicem (in multiplici enim, ſi regulam præſcriptam ſequaris, nulla eſt difficultas) extendere velis in numeris integris ad quotlibet terminos maiores, efficies id iucunda hac & facili operatione. Cape tot terminos continuè proportionales eius proportionis multiplicis ab 1. incipientis, cuius denominator denominat partem, vel partes aliquotas, cuius, vel quarum in data proportione fit mentio; tot, inquam, cape terminos, quot in propoſita proportionalitate non multiplici terminos deſideras. Vltimus enim

mus enim eorum erit primus terminus tuæ proportionis non multiplicis. Eum ergo ſi multiplices per denominatorem datæ proportionis, & iterum numerum productum in eundem denominatorem ducas, atque ita deinceps, conſtitues terminos optatos. Vbi hoc eſt mirabile, ſi termini imperati hac via reperiantur, non poſſe vltra terminos propoſitos proportionalitatem extendi ſine fractione. Verbigratia, ſi inueniendi ſint 7. termini proportionis ſeſquialteræ: Quoniam denominator fractionis ½. cuius mentio fit, eſt 2. ſumendi ſunt 7. termini proportionis duplæ, videlicet, 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. Si ergo à 64. incipias, conſtitues 7. terminos proportionalitatis ſeſquialteræ, & non plures, hos nimirum.

64. 96. 144. 216. 324. 486. 729.

Inuenientur autem facilè hi termini, ſi ad primum 64. adiicias eius dimidium, & ad ſecundum 96. iam factum, eius quoque dimidium, &c. Sic quoque ſi deſiderentur 6. termini proportionis duplæ ſuperbipartientis quintas, accipiendi ſunt 6. termini proportionis quintuplæ, propter denominatorem partium quintarum, qui eſt 5. videlicet, 1. 5. 25. 125. 625. 3125. Nam ſi ab vltimo 3125. incipias, reperies hos 6. terminos in proportione dupla ſuperbipartiente quintas.

3125. 7500. 18000. 43200. 103680. 248832.

Qui termini facilè reperientur, ſi duas quintas partes primi ad eundem primum duplicatum adiicias, & rurſus ⅖. ſecundi iam facti ad eundem ſecundum duplicatum, &c. Atque numeri hac via inuenti ſemper minimi ſunt in ſua proportione, ita vt alij totidem termini in eadem proportione continua reperiri, qui minores illis ſint, ſit prorſus impoſſibile: niſi fractiones admittere velimus. Facilius iidem termini reperientur, ſi inuentis duobus minimis terminis in data proportione, per maiorem multiplicetur primus ex illa proportione multiplici inuentus, & productus per minorem diuidatur. Ita enim ſecundus terminus reperietur. Qui ſi rurſus ducatur in maiorem minimorum terminorum, & productus per minorem diuidatur, inuenietur tertius terminus; & ſic deinceps. Vt in poſteriori exemplo, minimi termini proportionis duplæ ſuperbipartientis quintas ſunt 5. & 12. Si igitur ſextum 3125. proportionis quintuplæ, qui debet eſſe primus ſex terminorum quæſitorum, ducatur in 12. & productus 37500. per 5. diuidatur, prodibit ſecundus terminus 7500. qui ſi rurſus in 12. ducatur, & productus 90000. per 5. diuidatur, producetur tertius terminus 18000. &c. In proportione porrò multiplici quæcunque minimi termini quotcunque perpetuo incipiunt ab 1. Vt tres minimi termini in proportione continua quadrupla ſunt hi, 1. 4. 16.

QVAN-

Digitized by Google

11.

QVANDO numerus terminorum continuè proportionalium impar eſt, numerus genitus ex multiplicatione extremorum inter ſe, æqualis eſt numero, qui ex quorumlibet duorum ab extremis æqualiter diſtantium multiplicatione inter ſe creatur, & ei quoque qui ex medio in ſe ipſum ducto producitur. Vt in his 5. numeris proportionis ſeſquialtera,

16. 24. 36. 54. 81.

tam ex 16. in 81. quàm ex 24. in 54. & ex 36. in ſe, procreatur numerus 1296.

QVANDO autem proportionalium terminorum numerus eſt par, etiamſi non continuè ſint proportionales, dum modo bini continuam proportionem interrumpentes habeant vnam eandemque inter ſe proportionem, hoc eſt, dum modo ſecundus & tertius; Item quartus & quintus; nec non ſextus & ſeptimus, &c. (quibus in locis proportio interrumpitur) ſint quoque non continuè proportionales, in diuerſa tamen proportione ab ea, quam primus habet ad ſecundum, & tertius ad quartum, & quintus ad ſextum, &c. Quando, inquam, terminorum numerus eſt par, numerus ex ductu extremorum vnius in alterum productus ſemper æqualis eſt numero, qui ex multiplicatione quorumlibet duorum ab extremis æqualiter diſtantium inter ſe gignitur. Vt hic in 6. numeris duplæ proportionis continuæ.

3. 6. 12. 24. 48. 96.

Ex 3. in 96. & ex 6. in 48. & ex 12. in 24. producitur idem ſemper numerus 288.

Item in hac ſeſquitertia non continua 8. terminorum, vbi bini proportionem continuam interrumpentes habent vnam eandemque proportionem, videlicet triplam, quæ à ſeſquitertia diuerſa eſt.

3. 4. 12. 16. 48. 64. 192. 256.

idem omnino numerus 768. fit ex 3. in 256. & ex 4. in 192. & ex 12. in 64. & ex 16. in 48.

HINC ſequitur, quando terminorum numerus impar eſt, numerum ex ductu extremorum vnius in alterum, vel ex duorum quorumlibet æqualiter ab extremis, vel à medio diſtantium multiplicatione inter ſe procreatum, eſſe quadratum, (Dicitur quadratus numerus is, qui ex multiplicatione alicuius numeri in ſeipſum producitur; numeruſque ipſum producens latus eius, ſiue radix appellatur) cuius radix, ſiue latus eſt medius numerus: quia nimirum idem numerus gignitur ex medio in ſeipſum; ac proinde medius eius radix quadrata eſt. Nu-

Digitized by Google

eſt. Numerum verò ex tribus inter ſe multiplicatis productum, quorum duo ſunt vel extremi, vel ab extremis æqualiter remoti, tertius autem, medius, eſſe cubum, (Numerus ille dicitur cubus, qui producitur ex numero aliquo in ſeipſum ducto, & iterum in productum numerum: & numerus ille, qui in ſe ductus, & iterum in productum, cubum producit, latus eius cubicum, ſiue radix cubica appellatur) cuius latus, ſiue radix eſt medius numerus: quia videlicet gignitur ex medio in ſe cubice ducto, hoc eſt, primum in ſe, deinde in productum ex aliis duobus inter ſe multiplicatis. In ſe enim facit productum ex aliis duobus: ac proinde in hunc procreatum iterum ductus producit cubum.

SEQVITVR quoque, quando ſunt 4. numeri ſiue continuè, ſiue non continuè proportionales, numerum ex mutua omnium multiplicatione productum, (Dicuntur tres, vel plures numeri ſe mutuo multiplicare continuè, quando vnus ducitur in alium, & productus numerus in tertium, & hic productus numerus in quartum, & ſic deinceps, donec omnes numeri ſint multiplicati) eſſe quadratum, cuius latus, ſiue radix eſt numerus ex primo in quartum, vel ex ſecundo in tertium genitus. Nam ex multiplicatione mutua omnium 4 numerorum inter ſe idem procreatur numerus, quem producit numerus factus ex primo in quartum, ſi in productum ex ſecundo in tertium (qui producto ex primo in quartum æqualis eſt) multiplicetur. Quando autem ſunt 6. numeri ſiue continuè, ſiue non continuè proportionales, dummodo bini numeri proportionem continuam interrumpentes ſint quoque non continuè proportionales, fiet cubus ex mutua multiplicatione omnium 6. numerorum inter ſe, cuius radix, latuſue eſt numerus ex multiplicatione extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis æqualiter diſtantium, productos: qui videlicet gignitur ex numero, qui fit ex duobus extremis inter ſe multiplicatis, in ſe cubice multiplicato: hoc eſt, ſemel in ſe, nimirum in productum ex duobus, qui ſunt extremis proximi, & iterum in productum, quando videlicet hic productus numerus ducitur in productum ex duobus mediis: quippe cum tres hi numeri producti ſint inter ſe æquales.

III.

SI, propoſitis quotcunque terminis continuè proportionalibus, minus extremum à maiore ſubtrahatur, & reliquus numerus per numerum vna vnitate minorem denominatore proportionis, (quam quilibet propoſitorum numerorum ad minorem habet, qui illi proximus eſt) diuidatur, Quotiens deniq; maiori extremo adiiciatur, conflabitur ſumma omnium terminorũ. Vt hic in proportione continua tripla.

2. 6. 18. 54. 162. 486. 1458. 4374. 13122.

Dempto minore extremo 2. ex maiore 13122. & reliquo numero

13120. di-

Digitized by Google

13120. *diuiſo per* 2. *per numerum ſcilicet vna vnitate minorem denominatore* 3. *proportionis triplæ, quam quilibet eorum numerorum ad proximè antecedentem minorem habet, fit Quotiens* 6560. *cui ſi addatur maius extremum* 13122. *fit ſumma omnium* 19682. *Item in hac ſeſquitertia continua.*

243. 324. 432. 576. 768. 1024.

Subducto minore extremo 243. *ex maiore* 1024. *& reliquo numero* 781. *diuiſo per* $\frac{1}{3}$. *(qui numerus vna vnitate minor eſt denominatore* $1\frac{1}{3}$ *) fit Quotiens* 2343. *Addito ergo maiore extremo* 1024. *fit omnium terminorum ſumma* 3367.

ITAQVE vt vides, ad explorandam ſummam quotcunque terminorum proportionalitatis Geometricæ ſatis eſt, ſi duo extremi cognoſcantur, vna cum proportionis denominatore. Quo verò artificio inueſtigandus ſit vltimus terminus cuiuſuis proportionalitatis Geometricæ quotcunque terminorum, etiamſi medios numeros ignoremus, copioſè tradidimus in progreſſionibus in noſtra Arithmetica practica, vt ſupernacaneum ſit, ea hoc loco repetere.

IV.

PROPOSITIS quotlibet numeris ſe mutuo æqualiter ſuperantibus id eſt, Arithmeticè proportionalibus; ſi totidem alij numeri ſumantur habentes eaſdem proportiones, quas illi eodem ordine ſumpti; ſuperabunt ſe quoque poſteriores hi numeri æqualiter, hoc eſt, erunt Arithmeticè proportionales, ſicut illi. Vt ſi ſex hi numeri, 4. 7. 10. 13. 16. 19. *Arithmeticè proportionales proponantur, ſumanturque alij ſex cum iiſdem proportionibus, cuiuſmodi ſunt hi,* 20. 35. 50. 65. 80. 95. *comperies ipſos quoque Arithmeticè eſſe proportionales; quippe cum habeant differentiam* 15. *Sed caue putes, hanc proprietatem poſſe conuerti: Neque enim ſi dentur quotuis numeri Arithmeticè proportionales, & totidem alij Arithmeticè quoque proportionales ſumantur, etiamſi vtrobique eadem ſit differentia, neceſſario hi illis proportionales erunt. Id quod perſpicuum eſt in hiſce duabus proportionalitatibus Arithmeticis.*

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20.

3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21.

Vbi prioris duo primi numeri 2. 4. *habent proportionem duplam, at poſterioris duo primi* 3. 5. *ſuperbipartientem tertias. Item primus numerus* 3. *in poſteriore ordine ad primum numerum* 2. *in ordine priore habet ſeſquialteram proportionem, ſecundus autem* 5. *ad ſecundum* 4. *ſeſquiquartam, &c.*

DVOBVS

Digitized by Google

V.

DVOBVS quibuſuis numeris datis, ſi eorum alterutro in quotlibet partes diſtributo, ſingulæ partes in alterum ducantur, & ſinguli numeri producti per priorem numerum diuidantur, conſtituent omnes Quotientes ſimul ſumpti poſteriorem numerum, habebuntque ordine eaſdem omnino proportiones inter ſe, quas partes prioris numeri inter ſe eodem ordine habent: at ſinguli Quotientes, ſiue partes poſterioris numeri ad ſingulas partes prioris, vt prima ad primam, ſecunda ad ſecundam, &c. vnam eandemque prorſus habebunt proportionem. Veluti, datis duobus numeris 57. 285. *ſi prior ſecetur in partes, quæ ſimul additæ ipſum conficiant,* 2. 5. 10. 40. *& earum qualibet in poſteriorem numerum* 285. *ducatur, gignentur hi numeri,* 570. 1425. 2850. 11400. *quibus ſigillatim per numerum priorem* 57. *diuiſis, fiunt Quotientes,* 10. 25. 50 200. *qui in vnam collecti ſummam conſtituunt poſteriorem numerum* 285. *habentque eaſdem proportiones, quas habent partes* 2. 5. 10 40. *nimirum duplam ſeſquialteram, duplam, & quadruplam: ſinguli verò ad ſingulas partes, vt* 10. *ad* 2. *&* 25. *ad* 5. *&* 50. *ad* 10. *&* 200. *ad* 40. *eandem omnino proportionem habent, nimirum quintuplam.*

EASDEM partes numeri poſterioris obtinebis, ſi eum per priorem, qui in partes diſtributus eſt, partiaris, Quotientemque factum in ſingulas partes eiuſdem prioris numeri ducas. Vt in eodem exemplo, diuiſo numero 285. *per* 57. *fit Quotiens* 5. *quo ducto in* 2. 5. 10. 40. *partes numeri* 57. *fiunt partes numeri* 285. *hæ,* 10. 25. 50. 200. *vt prius.*

HINC facilè elicitur, quo pacto duo quilibet numeri ſecandi ſint in partes componentes ipſis numeris æquales, ita vt partes vnius ſint partibus alterius proportionales, collatis tum partibus vtriuſque numeri inter ſe, tum & partibus vnius cum partibus alterius. Atque hac proprietate nititur tertia ratio diſtribuendi numerum propoſitum in quotuis partes Arithmeticè proportionales, quam in regula 10. *proportionalitatis Arithmeticæ præſcripſimus. Nam ſumptis totidem numeris Arithmeticè proportionalibus, erit eorum ſumma, numerus in illos, tanquam in partes ipſum componentes, diuiſus. Quare ſi ſingulæ hæ partes in datum numerum ducantur, & producti numeri per ſummam illam diuidantur; Vel ſi per aſſumptorum numerorum ſummam datus numerus diuidatur, ac Quotiens in ſingulos eos numeros ducatur; producentur partes totidem numeri propoſiti in eiſdem proportionibus. Quare Arithmeticè quoque proportionales erunt, vt ex antecedente regula* 4. *manifeſtum eſt.*

VI.

QVOTLIBET numeris continuè proportionalibus datis, erunt eorum differentiæ continuè quoque in eadem proportione proportionales. Vt in

Vt in appoſito exemplo tum numeri, quàm eorum differentiæ, habent continuam proportionem ſeſquialteram.

Differentiæ.	32	48	72	108	162	243	
	64	96	144	216	324	486	729

Eadem ratione in hoc altero exemplo, quod ſequitur, habent & numeri, & eorum differentiæ, duplam proportionem. Vbi vides differentias non differre à numeris duplæ proportionis, quorum ſunt differentiæ. Id quod ſoli proportioni duplæ cuicunque accidit: quia in ea quilibet numerus maior proximè præcedentem minorem ſuperat ipſomet numero proximè antecedente, cuius duplus eſt, hoc eſt, quem bis continet.

Differentiæ.	7	14	28	56	112	224	448	896	
	7	14	28	56	112	224	448	896	1792

VII.

DATIS quotcunque numeris continuè proportionalibus, ſi eorum ſumma per eos ſigillatim diuidatur, erunt Quotientes conuerſo ordine in eadem proportione continuè proportionales. Et ſi Quotientum ſumma per ipſos Quotientes ſigillatim diuidatur, creabuntur iidem prorſus Quotientes ordine conuerſo: atque ita in infinitum. Summa autem eorum Quotientum æqualis erit numero, qui fit ex primo Quotiente in vltimum, vel ex multiplicatione duorum quorumlibet ab extremis æqualiter diſtantium, vel denique, ſi terminorum numerus eſt impar, ex medio in ſeipſum ducto. Quod ſane incredibile videri poſſit. Exempli cauſa. Sidentur hi 4. numeri continuè proportionales in proportione dupla, 3. 6. 12. 24. ſi eorum ſumma 45. per ſingulos diuidatur, erunt Quotientes 15. $7\frac{1}{2}$. $3\frac{3}{4}$ $1\frac{7}{8}$. conuerſo ordine in eadem proportione dupla continuè proportionales. Et ſi per hoſce Quotientes diuidatur eorum ſumma $28\frac{1}{8}$. prodibunt ordine conuerſo iidem omnino Quotientes, & ita deinceps in infinitum. Ipſa verò ſumma $28\frac{1}{8}$. æqualis eſt numero, qui fit ex 15. in $1\frac{7}{8}$. vel ex $7\frac{1}{2}$. in $3\frac{3}{4}$. Sic etiam datis his 5. terminis, in continua proportione tripla, 2. 6. 18. 54. 162. ſi eorum ſummam partiemur per eos ſigillatim, efficiemus hos 5. Quotientes, 121. $40\frac{1}{3}$. $13\frac{4}{9}$. $4\frac{13}{27}$. $1\frac{40}{81}$. in eadem continua proportione tripla. Quorum ſumma $180\frac{61}{81}$ producitur vel ex 121. in $1\frac{40}{81}$ vel ex $40\frac{1}{3}$. in $4\frac{13}{27}$. vel denique ex $13\frac{4}{9}$. in ſeipſum. Vbi duo conſideratione ſunt digna. Primum, quando terminorum numerus eſt impar, ſummam Quotientum eſſe numerum quadratum, cuius radix eſt medius terminus: quippe qui ex medio termino in ſeipſum ducto procrea-

Digitized by Google

procreetur, vt dictum eſt. Deinde, eoſdem ſemper Quotientes gigni ex diuiſione ſumma quotcunque terminorum proportionis eiuſdem continua, quantumuis termini illi ſint magni, aut parui, dummodo terminorum numerus idem ſemper ſit. Veluti, ſi ſint tres termini continuè dupli, ſiue magni, ſiue parui, erunt perpetuo hi Quotientes, 7. $3\frac{1}{2}$. $1\frac{3}{4}$. Si ſint quatuor, hi Quotientes erunt, 15. $7\frac{1}{2}$. $3\frac{3}{4}$. $1\frac{7}{8}$. In quinque numeris continuè triplis, erunt hi ſemper Quotientes, 121. $40\frac{1}{3}$. $13\frac{4}{9}$. $4\frac{13}{27}$. $1\frac{40}{81}$. Ac denique in quinque numeris continuam proportionem ſeſquialteram habentibus reperientur hi Quotientes. $13\frac{3}{16}$. $8\frac{12}{24}$. $5\frac{31}{36}$. $3\frac{49}{54}$. $2\frac{49}{81}$.

EX hac proprietate inueniemus quotcunq; terminos in data proportione continuè proportionales, quorum ſumma aqualis ſit numero, qui fit ab extremis inter ſe multiplicatis, vel ex duobus mediis quibuslibet aqualiter diſtantibus ab extremis, vel etiam ex termino medio in ſeipſum ducto; ſi numerus terminorum fuerit impar. Nam ſi ſumantur tot termini in data proportione continuè proportionales, quot inueniendi ſunt, ſiue magni, ſiue parui, eorumque ſumma per eoſdem ſeorſum diuidatur, erunt Quotientes numeri, qui deſiderantur. Quòd ſi ſumma debeat eſſe numerus quadratus, accipiendi erunt termini, quorum numerus impar ſit, & dato numero terminorum impari aqualis, &c. Qua res miraculi inſtar quodammodo cenſeri poſſit, dari poſſe in data proportione, quotquot quis iuſſerit, terminos continuè proportionales, quorum ſumma ex multiplicatione primi termini in vltimum gignatur: cum contrarium huius experiamur in omnibus proportionibus continuis inaqualitatis, quarum termini ſint numeri integri; & in aliis etiam omnibus, quarum numeri fractiones habent admixtas, niſi hi numeri Quotientes ſint producti ex diuiſione ſumma alicuius quotcunque terminorum continuè proportionalium, per ipſos terminos proportionales, vt diximus.

EODEM modo ſatisfaciemus quaſtioni, ſi quis petat duos numeros datam habentes proportionem, quorum ſumma aqualis ſit numero ex eorum multiplicatione vnius in alterum procreato. Nam ſi ſumantur quilibet duo numeri in proportione data, atque eorum ſumma per eoſdem ſigillatim diuidatur, ſatisfiet quaſtioni propoſita per Quotientes inuentos. Vt ſi cupiat quis duos numeros, inter quos reperiatur proportio tripla ſuperbipartiens nonas, accipiemus vel hos duos numeros 29. 9. vel 87. 27. proportionem datam habentes, vel alios quoſuis. Summa etenim priorum 38. diuiſa per 29. & 9. vel poſteriorum ſumma 114. per 87. & 27. diuiſa dabit Quotientes, $1\frac{9}{29}$. & $4\frac{2}{9}$. proportionem eandem habentes, quam 29. & 9. vel 87. & 27. ordine tamen conuerſo, & quorum aggregatum eſt $5\frac{139}{261}$. qui videlicet numerus ex ductu etiam $1\frac{9}{29}$. in $4\frac{2}{9}$. gignitur.

VIII.

INTER duos quoſcunque numeros conſtituemus medium Geo-

metricè proportionalem, ſi eos inter ſe multiplicemus, & procreati numeri radicem quadratam accipiamus. Vt datis duobus numeris 6. & 96. ex vno in alterum fit numerus 576. cuius radix quadrata 24. erit medio loco proportionalis inter datos numeros hoc modo, 6. 24. 96. Nam 96. ad 24. habent proportionem quadruplam, qualem etiam habent 24. ad 6. Itaque ſi inter datos duos numeros conſtituendus ſit numerus medius rationalis, qui videlicet exprimi poſſit, neceſſe eſt, vt numerus ex vno in alterum productus ſit quadratus. Niſi enim quadratus ſit, non habebit radicem in numeris, ſed eius radix erit numerus, quem Arithmetici ſurdum, vel irrationalem vocant, explicantque hoc modo, radix quadrata talis numeri. Veluti, datis duobus numeris 7. & 9. fiet ex vno in alterum numerus 63. qui radicem non habet. Dicemus ergo radicem quadratam numeri 63. quæ quidem numeris exprimi nequit, eſſe medio loco proportionalem inter numeros datos 7. & 9. hoc modo, quæ quidem radix maior eſt, quam 7. cum huius quadratum ſit 49. minor verò quam 8. cum huius quadratum ſit 64. Neque verò numerus 7. cum aliqua fractione, qui medius eſt inter 7. & 8. radix eſſe poteſt, etiamſi vnitas in infinitum cogitetur eſſe diuiſa: quia omnis talis numerus cum fractione producit numerum cum fractione, vt ad defin. 8. demonſtrabimus, cuiuſmodi non eſt numerus 63.

7.	R. q. 63.	9.

IX.

SI quis inuenire velit tres numeros in Arithmetica proportionalitate, inter quorum binos ſinguli cadant medij Geometricè proportionales, aſſequetur id hac ratione. Sumantur tres numeri quicunque, quorum ſecundus primi ſit quintuplus, & tertius eiuſdem primi ſeptuplus. Quadrati enim numeri eorum erunt Arithmeticè proportionales, & primus numerus acceptus in ſecundum ductus producet medium proportionalem Geometricè inter primum quadratum, & ſecundum, in proportione primi aſſumpti numeri ad ſecundum, ſecundus verò numerus aſſumptus in tertium ductus gignet medium proportionalem inter ſecundum quadratum, & tertium, in proportione, quam inter ſe habent ſecundus ac tertius numerus aſſumptus. Id quod perſpicuè in hoc exemplo apparet.

Tres num. aſſumpt.	Primus 8.	quintup. pri. 40.		Septup. prim. 56.	
Quad. Arith. pro.	64		1600		3136
Medij Geometr.		320		2240	

Differentia enim trium quadratorum eſt 1536. & medij proportionales inter eos, 320. & 2240. producti ex 8. in 40. & ex 40. in 56.

HINC

HINC facile reperies tres numeros quadratos, qui ſe æqualibus differentiis mutuo ſuperent, ſi pro radicibus eorum ſumes tres numeros, quorum ſecundus ſit primi quintuplus, & tertius eiuſdem primi ſeptuplus, vt diximus.

PARI ratione, dato quouis quadrato, reperientur alij duo maiores cum illo conſtituentes proportionalitatem Arithmeticam. Si enim radix dati quadrati ſtatuatur primus numerus, & alij duo numeri ſumantur, quorum alter illius radicis ſit quintuplus, & ſeptuplus alter, erunt quadrati numeri horum duorum numerorum, quos quærimus. Vt ſi detur quadratus numerus 64. *erit eius radix* 8. *primus numerus, ſecundus,* 40. *& tertius,* 56. *&c.*

INVENTIS autem tribus quadratis Arithmeticè proportionalibus, ſi eos per quemuis numerum eundem multiplices, vel per quamuis partem aliquotam, ſi quam habent, diuidas, erunt producti quoque numeri, aut Quotientes Arithmeticè proportionales, inter quorum binos ſinguli etiam medij in Geometrica proportionalitate intercipiuntur; qui medij reperientur eodem modo, ſi nimirum medij inter quadratos inuentos per eundem illum numerum multiplicentur, vel per eandem illam partem aliquotam diuidantur. Vt ſi ſuperiores quadrati, vna cum mediis proportionalibus duplicentur, creabuntur hi numeri.

Arithmet. proportio.	128		3200		6272.
Medij Geometr.		640		4480	

Si verò diuidantur iidem per 8. *partem aliquotam communem quadratorum, (ſunt autem quælibet partes aliquotæ quadratorum, partes etiam aliquotæ mediorum) prodibunt hi numeri.*

Arith. proportio.	8		200		392.
Medij Geometr.		40		280	

Habebunt autem hi numeri hoc modo inuenti eaſdem ſemper proportiones, quas quadrati, eorumque medij inter ſe habent. Quod ſi hos 8. 200. 392. *diuidas per* 4. *inuenies alios* 2. 50. 98. *Arithmeticè proportionales, inter quos cadunt Geometricè medij,* 10. *&* 70. *Et ſi denique hos* 2. 50. 98. *partiaris per* 2. *habebis alios,* 1. 25. 49. *inter quos medij Geometricè ſunt,* 5. *&* 35.

VBI hoc etiam admiratione videtur dignum, quandocunque inter tres numeros Arithmeticè proportionales, ſiue quadrati ſint, ſiue non, cadunt duo medij Geometricè proportionales, vnus inter primum & ſecundum, & inter ſecundum ac tertium alter, quadratum prioris medij, & quadratum ſecundi numeri Arithmetica proportionali-

Digitized by Google

tatis, & quadratum poſterioris medij conſtituere proportionalitatem Arithmeticam. Vt in poſteriori exemplo, quadrati numeri horum trium numerorum 40. 200. 280. *ſunt* 1600. 40000. 78400. *Arithmeticè proportionales, habentes differentiam eandem communem* 30400. *& ſic de cæteris.*

X.

INTER quoſcunque duos numeros reperiemus quotcunque medios continuè proportionales, iucunda ſane, & artificioſa operatione: quam vt planius explicem, dicenda pauca ſunt de radicum generibus, & quo pacto numeri ex ſuis radicibus gignantur. In omni ergo proportione continua, quæ ab 1. *incipit, ſecundus terminus radix eſt omnium numerorum inſequentium. Ea enim radix bis poſita, atque ita in ſe ipſam ducta producit tertium terminum, qui eſt numerus quadratus, radixque ipſa quadrata dicitur. Eadem radix ter poſita, & primum in ſe, & iterum in productum multiplicata gignit quartum terminum, qui cubus eſt, & propterea radix eius cubica appellatur. Denique ſi eadem radix ponatur quater, & fiant tres multiplicationes, primum in ſe, deinde in productum, tertio iterum in vltimum productum, fiet quintus terminus: Et ſi ponatur quinquies, fiantque quatuor ordine multiplicationes, orietur ſextus terminus, atque ita in infinitum: Quo pacto autem omnes hæ radices nominari debeant, & ſignari, non eſt huius loci declarare, ſed ad Algebram tota hæc res ſpectat, vbi etiam docebimus, qua arte ex dato numero eruendæ ſint. Nunc, vt intelligatur res, de qua agimus, notandæ ſunt tres infraſcriptæ proportionalitates continuæ, quarum duæ primæ ſunt Arithmeticæ, nimirum duæ ſeries naturales numerorum ab* 1. *incipientes, tertia verò Geometrica ab* 1. *quoque initiũ ducens. Vbi perſpicuè apparebit, quàm egregium vſum habeat ſeries numerorum naturalis in re propoſita.*

Numerus mediorum.			1	2	3	4	5	6	&c.
Numeri ſignificantes radices.		1	2	3	4	5	6	7	&c.
Numeri Geometr. propor.	1	2	4	8	16	32	64	128	&c.

Prima complectitur numeros mediorum conſtituendorum, ſecunda numeros, qui ſignificant genera radicum, hoc eſt, quoties terminus ſecundus tertiæ proportionalitatis, quem radicem omnium inſequentium diximus, ordine poni debeat, vt multiplicatos numeros proportionalitatis Geometricæ illis reſpondentes procreet. Verbi gratia, vnitas medij ordinis ſignificat, numerum 2. *tertij ordinis, qui radix eſt omnium aliorum, ſemel poſitum non eſſe multiplicandum, ſed ipſummet eſſe radicem omnium ex nulla ſui multiplicatione productum. At numerus* 2. *eiuſdem ſecundi ordinis indicat, eandem radicem* 2. *tertij ordinis*

Digitized by Google

ordinis poſitam bis hoc modo, 2. 2. & ita in ſe multiplicatam gignere 4. tertium terminum eiuſdem tertij ordinis. Sic numerus 3. medij ordinis denotat, radicem eandem 2. infimi ordinis poſitam ter hoc modo, 2. 2. 2. atque ita multiplicatam producere 8. quartum terminum infimi ordinis. Nam ex radice 2. primo loco poſita in eandem 2. poſitam ſecundo loco fit numerus 4. & ex hoc producto in radicem 2. tertio poſitam loco gignitur numerus 8. quartus nimirum proportionalitatis Geometricæ ſub numero 3. ordinis ſecundi. Idem dices de aliis. Vt verbi gratia numerus 7. ſecundæ proportionalitatis monſtrat, radicem eandem 2. tertij ordinis poſitam ſepties, hoc pacto. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. & in ſe continuè ſexies multiplicatam producere 128. octauum numerum Geometricæ proportionalitatis illi numero 7. ſuppoſitum. Nam ex 2. primi loci in 2. ſecundi loci fiunt 4. & ex 4. in 2. tertij loci fiunt 8. & ex 8. in 2. quarti loci fiunt 16. & ex 16. in 2. quinti loci fiunt 32. & ex 32. in 2. ſexti loci fiunt 64. & denique ex 64. in 2. ſeptimi loci fiunt 128. &c. Atque hoc non ſolum verum eſt in propoſita proportione continua dupla, ſed in omnibus aliis ab vnitate incipientibus, quicunque numerus ſecundum locum occupet tanquam radix aliorum, & qui proportionem denominat.

ITAQVE ſi conſtituere vis quotlibet medios inter duos propoſitos numeros, cape numerum mediorum conſtituendorum in primo ordine. Nam ex vtroque numero dato extrahenda eſt radix, quæ toties ordine poſita, & continuè multiplicata vtrumque producat, quot vnitates continentur in numero ſecundi ordinis, qui infra numerum mediorum conſtituendorum in ſupremo ordine acceptum ſcriptus eſt. Radices inuentas ſub datis numeris colloca, quamque ſub ſuo, & ab eiſdem aſcende per continuam vtriuſque multiplicationem, (ducendo primum quamque radicem in ſe, deinde in numerum productum, & ſic deinceps) ita vt duas proportionalitates Geometricas multiplices inſtituas à radicibus incipientes, & ab eiſdem denominatas, tot terminorum, (excluſis datis duobus numeris) quot medij termini quæruntur. Poſt hæc ſingulos terminos vnius ordinis duc in ſingulos terminos alterius ordinis aduerſos, & oppoſitos, hoc eſt, maximum vnius in minimum alterius: proximum deinde ſub illo in proximum ſupra hunc, &c. Ita vt in vno ordine ſemper deſcendas à ſupremo ad infimum vſque, in altero verò ab infimo vſque ad ſupremum aſcendas, vt in exemplis patebit. Numeri enim procreati dabunt medios terminos, quos quærimus. Exempli cauſa, ſi inter 9. & 144. inueniendus ſit vnus terminus medio loco proportionalis, ſumemus in primo ordine 1. & ſub hoc termino in ſecundo ordine numerum 2. qui indicat, ex vtroque numero dato eruendam eſſe radicem quadratam, quæ videlicet bis poſita, per eius multiplicationem vtrumque producat, vt declarauimus. Radices autem quadratæ inuentæ ſunt 3. & 12. Et quia vnus tantum medius terminus deſideratur, non ſunt in-

Digitized by Google

ſtituendæ proportionalitates Geometricæ à radicibus incipientes, quæ plures terminos habeant, ſed ipſæ radices inter ſe multiplicandæ. Numerus enim procreatus 36. *erit medio loco proportionalis inter* 9 & 144. *Vt hic vides*, 9. 36. 144. *Sic etiam ſi inter* 18. & 288. *conſtituendus ſit vnus terminus medius: quoniam hi numeri radices quadratas non habent, ſignabimus priorem hoc modo, R. q.* 18. *poſteriorem autem ſic. R. q.* 288. *Hæ autem radices inter ſe multiplicatæ faciunt* 72. *terminum medium proportionalem inter* 18. & 288. *hoc modo* 18. 72. 288. *Vbi etiam admiratione dignum eſt, duos numeros, quorum neuter poteſt efferri, inter ſe multiplicatos gignere numerum rationalem: cuius rei demonſtratio ex lib.* 10. *petenda eſt. Quo pacto autem inter ſe multiplicandi ſint duo numeri ſurdi, qui nimirum efferri non poſſunt, quales ſunt R. q.* 18. & *R. q.* 288. *docebimus in Algebra.*

RVRSVS ſi dati ſint duo numeri 16. & 625. *inter quos tres medij conſtituendi ſint, accipiemus in primo ordine numerum mediorum* 3. *cui in ordine ſecundo ſubſcribitur numerus* 4. *Igitur ex vtroque dato numero extrahenda eſt radix, quæ quater poſita, & continuè multiplicata vtrumque producat, quæ quadrati quadrata, vel zenſizenſica dici ſolet, cuiuſmodi in dato exemplo ſunt* 2. & 5. *Conſtitues ergo hos ordines trium terminorum ſub* 16. & 625. *Geometricè proportionalium in proportione multiplici, incipientes ab eiſdem radicibus* 2. & 5. *à quibus proportiones horum ordinum denominantur, vt hic apparet.*

16	40	100	250	625
8				125
4				25
2				5

Ex 8. *ſupremo primi ordinis in* 5. *infimum ſecundi ordinis fiunt* 40. *pro primo medio. Ex* 4. *in* 25. *fiunt* 100. *pro medio ſecundo. Denique ex* 2. *in* 125 *fiunt* 250. *pro tertio medio.*

SCITV autem dignum eſt, medios terminos inuentos cum duobus extremis datis continere proportionem continuam eam, quæ inter radices datorum numerorum reperitur. Sic enim in dato exemplo vides ita eſſe 625. *ad* 250. & 250. *ad* 100. & 100. *ad* 40. & 40. *ad* 16. *vt* 5. *ad* 2. *Quapropter, inuentis radicibus, ſi maior per minorem diuidatur, & per Quotientem, qui denominator eſt proportionis radicum inuentarum, multiplicetur minor numerus datus, & productus numerus rurſum per eundem Quotientem multiplicetur, atque ita deinceps, conſtituentur inter duos extremos datos medij termini iidem, etiamſi duo illi ordines proportionum multiplicium à radicibus denominatarum non inſtituantur. Vt in exemplo dato. Diuiſa radice* 5. *per radicem*

dicens 2. fit Quotiens $2\frac{1}{2}$. denominator videlicet proportionis 5. ad 2. Si igitur ducas minorem numerum datum 16. in $2\frac{1}{2}$. gignes 40. primum medium: Et ſi rurſus ducas 40. in $2\frac{1}{2}$. procreabis 100. ſecundum medium: Et denique ſi 100. ducas in $2\frac{1}{2}$. produces 250. tertium medium.

PERSPICVVM autem eſt, inter datos quoslibet numeros non ſemper conſtitui poſſe numerum terminorum propoſitum, qui ſint rationales: propterea quod dati numeri non habent ſemper illas radices, quæ extrahendæ ſunt: aut certè non habent eam proportionem, quam aliqui duo numeri, ex quibus eæ radices poſſunt extrahi, quod etiam ſatis eſſet. Sicut enim inter 16. & 625. qui habent radices quadrati quadratas, hoc eſt, quæ quater poſitæ eos ſuis multiplicationibus producunt, tres medij termini incidunt: ita quoque inter 48. & 1875. qui illis 16 & 625. proportionales ſunt, licet non habeant ſimiles radices, cadunt tres medij termini, vt hic patet 48. 120. 300. 750. 1875.

QVAMOBREM ſi quis deſideret duos numeros, inter quos cadant, quotquot voles, termini medij rationales in data proportione, accipiendi ſunt duo numeri quomodocunque datam habentes proportionem. Eorum enim vterque ſi toties ponatur, quot termini medij quærendi ſunt, & adhuc ſemel, & continuè multiplicetur, erunt vltimi duo numeri producti, quos quærimus: Inter eos enim medij termini conſtituentur eo modo, quem expoſuimus; hoc eſt, vel inſtituendo ſub illis duos ordines proportionum multiplicium, quas aſſumpti numeri denominent, tot terminorum, quot medij termini quæruntur; vel multiplicando minorem eorum per denominatorem proportionis datæ, quæ eſt inter acceptos duos numeros, &c. Verbi gratia, ſi quis velit duos numeros, inter quos conſtitui poſſint quatuor termini medij rationales in proportione ſuperbipartiente tertias, cuius denominator eſt $1\frac{2}{3}$. ſumemus duos numeros 6. & 10. habentes datam proportionem ſuperbipartientem tertias, & vtrumque quinquies ponemus hoc modo, 6. 6. 6. 6. 6. & 10. 10. 10. 10. 10. Ex multiplicatione enim continua vtrinſque exiſtent hi numeri 7776. & 100000. inter quos conſtitues quatuor medios numeros proportionales, vt hic vides.

7776	12960	21600	36000	60000	100000
1296					10000
216					1
36					
6					10

Qui quidem medij termini inueniuntur vel ex 1296. in 10. & ex 216. in 100. & ex 36. in 1000. & ex 6. in 10000. vel ex denominatore $1\frac{2}{3}$. proportionis ſuperbipartientis tertias in minorem numerum inuentum 7776. & iterum in numerum productum, &c.

XI.

NVMERVM quemcunque datum diſtribuemus in quotuis partes proportionales Geometricè in data proportione hoc modo. Cape tot numeros continuè proportionales in data proportione ſiue minimos, ſiue non minimos, in quot partes datus numerus diſtribuendus eſt, & per eorum ſummam datum numerum partire. Quotiens namque per ſingulos terminos in data proportione acceptos multiplicatus procreabit partes dati numeri ſeruantes datam proportionem inter ſe. Veluti ſi datus numerus 756. ſecandus ſit in 6. partes continuè proportionales in proportione dupla; ſi ſumantur 6. termini continue dupli, 3. 6. 12. 24. 48. 96. quorum ſumma eſt 189. & per hanc ſummam datus numerus 756. diuidatur, Quotiens autem 4. per ſingulos acceptos numeros multiplicetur, procreabuntur hi 6. numeri continue dupli, conficienteſque ſimul in vnam ſummam collecti datum numerum 756. videlicet.

12. 24. 48. 96. 192. 384.

Eadem partes inuenientur, ſi ſumantur hi alij 6. numeri continue dupli, $\frac{1}{100}$. $\frac{2}{100}$. $\frac{4}{100}$. $\frac{8}{100}$. $\frac{16}{100}$. $\frac{32}{100}$. quorum ſumma eſt $\frac{63}{100}$. Vel hi 6. alij, 100. 200. 400. 800. 1600. 3200. quorum ſumma eſt 6300. Nam datus numerus 756. diuiſus per ſummam priorem $\frac{63}{100}$. facit 1200. qui Quotiens ductus in primum numerum acceptum $\frac{1}{100}$. dabit primam partem 12. vt prius, &c. At idem numerus datus 756. diuiſus per poſteriorem ſummam 6300. facit Quotientem $\frac{750}{6300}$. qui ductus in primum numerum aſſumptum 100. producit eandem partem primam 12. & ſic de cæteris.

QVOD ſi cupias numerum, qui ſecari poſſit in quotuis partes proportionales ſine vlla fractione, (Nam niſi ſeruetur id, quod iam præcipiemus, incidemus plerunque in fractiones) aſſequeris propoſitum, ſi ſumas quemcunque numerum multiplicem ſummæ totidem terminorum proportionalium aſſumptorum. Vt ſi quis quærat numerum, qui poſſit diſtribui in 5. numeros integros ſeſquialteram proportionem continuam habentes; ſumptis 5. terminis in ſeſquialtera proportione continue quibuſcunque, vt 64. 96. 144. 216. 324. quorum ſumma eſt 844. accipiemus huius ſummæ quemcunque numerum multiplicem, nimirum decuplum 8440. Hic enim per præceptum traditum ſecabitur in 5. numeros integros proportionis ſeſquialteræ continuæ, cum eo diuiſo per ſummam acceptorum numerorum, Quotiens neceſſario ſit numerus integer.

HINC

HINC nullo negotio ſatisfaciemus quæſtioni, qua iubeamur in data proportione continua reperire quotuis numeros, qui in vnam ſummam collecti conſtituant numerum quemcunque datum. Nam ſi datus numerus ſecetur in tot partes proportionales data proportionis, vt docuimus, ſoluta erit quæſtio. Vt ſi quis inuenire velit 4. numeros tripla proportionis continua, quorum ſumma ſit 100. *ſecandus erit hic numerus* 100. *in* 4. *numeros proportionis tripla, vt in* $2\frac{1}{2}$. $7\frac{1}{2}$. $22\frac{1}{2}$. $67\frac{1}{2}$. *Hi enim conficiunt datum numerum* 100. *Quòd ſi conficere debeant ſummam* 400. *erunt numeri quæſiti in tripla proportione continua hi* 10. 30. 90. 270. *Horum enim ſumma eſt* 400. *Si denique ſummam conficere debeant non ſuperantem* 1. *erunt huiuſmodi numeri*, $\frac{1}{40}$. $\frac{3}{40}$. $\frac{9}{40}$. $\frac{27}{40}$. *Summa enim horum eſt* $\frac{40}{40}$. *hoc eſt*, 1.

DE PROPORTIONALITATE Harmonica.

I.

TRES numeri in proportionalitate Harmonica inuenientur ex tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ quibuſcunque, ſi primus in ſecundum, ac tertium, & ſecundus in tertium multiplicetur. Vt ſubiecta exempla demonſtrant.

Arit.	1. 2. 3.	3. 7. 11.	4. 6. 8.	10. 60. 110.
Har.	2. 3. 6.	21. 33. 77.	24. 32. 48.	600. 1100. 6600.

In omnibus enim ex primo termino Arithmeticæ proportionalitatis in ſecundum & tertium fit primus terminus Harmonicæ, & ſecundus: ex ſecundo verò in tertium, tertius.

ALIO modo, & in idem recidit, gignitur Harmonica proportionalitas ex Arithmetica. Nam medius terminus Arithmeticæ proportionalitatis ductus in extremos gignit extremos Harmonicæ: extremi verò eiuſdem Arithmeticæ inter ſe multiplicati creant medium Harmonicæ. Vt in iiſdem exemplis manifeſtum eſt.

HINC fit, extremos terminos Harmonicæ proportionalitatis, ac proinde & differentias, eandem habere proportionem, quam extremi Arithmeticæ, ex qua orta eſt, habent: quia videlicet extremi Arithmeticæ per eundem medium multiplicati produxerunt Harmonicæ extremos.

QVAPROPTER ſi recipiendi ſint tres numeri proportionalitatis Harmonicæ, quorum extremi, atque adeò & differentiæ, datam habeant proportionem, ſumendi ſunt duo numeri proportionem datam habentes, & inter eos medius Arithmeticæ proportionalitatis conſtituendus: ac denique ex hiſce tribus terminis inueniendi tres in proportionalitate Harmonica, vt diximus. Vt ſi quærantur tres, quo-

rum extremi habeant proportionem ſeſquitertiam, ſumemus 5. & 4. inter quos ea proportio reperitur: ſed quia eorum ſumma 7. impar eſt, non poteſt inter eos collocari medius integer in proportionalitate Arithmetica, ducemus vtrumque per aliquem numerum parem, nimirum per 2. Inter productos enim 6. 8. cadet integer medius proportionalis Arithmeticè, 7. nimirum ſemiſſis eorum ſumma. Ex his igitur tribus 6. 7. 8. Arithmeticè proportionalibus orientur hi tres Harmonicè proportionales, 42. 48. 56. quorum extremi, atque adeò & differentia, proportionem ſeſquitertiam datum habent.

SEQVITVR etiam, binos numeros trium terminorum proportionalitatis Harmonicæ binis Arithmeticæ, ex qua orta eſt, converſo ordine eſſe proportionales: hoc eſt, in Harmonica ita eſſe ſecundum ad primum, vt in Arithmetica tertius eſt ad ſecundum. Item in illa ſic eſſe tertium ad ſecundum, vt in hac eſt ſecundus ad primum: quia nimirum priores duo in Harmonica producti ſunt ex poſterioribus duobus in Arithmetica per primum eundem multiplicatis: Duo verò poſteriores Harmonicæ procreati ſunt ex prioribus duobus Arithmeticæ in tertium ductis. Vt ex ſuperioribus exemplis perſpicuum eſt.

VICISSIM ſi primus numerus Harmonicæ proportionalitatis ducatur in ſecundum, ac tertium, & ſecundus in tertium, procreati erunt tres numeri Arithmeticæ proportionalitatis. Vel (quod idem eſt) ſi medius terminus Harmonicæ in duos extremos ducatur, gignentur duo extremi Arithmeticæ; duo verò extremi Harmonicæ inter ſe multiplicati producent medium Arithmeticæ: eodem ſcilicet prorſus modo, quo ex Arithmetica proportionalitate Harmonicam oriri diximus. Ita vides ex hac Harmonica 2. 3. 6. gigni hanc Arithmeticam, 6. 12. 18. Siue enim ducas primum 2. in ſecundum 3. & tertium 6. Item ſecundum 3. in tertium 6. produces 6. 12. 18. ſiue ducas medium 3. in extremos 2. 6. facies extremos 6. 18. & ex primo 2 in tertium 6. medium 12.

HARMONICA proportionalitas dicitur continuari vltra tres terminos ſiue ad maiores numeros progrediendo, ſiue regrediendo ad minores, quando primi tres numeri ſunt proportionales Harmonicè, & tertio adiunguntur duo cum eo conſtituentes quoque eandem proportionalitatem Harmonicam, & in eadem omnino proportione. Deinde vltimo, qui quintus eſt, adiunguntur eodem modo alij duo; atque vltimo, ſiue ſeptimo, alij duo; & ſic in infinitum. Hoc autem fit verſus maiores numeros progrediendo, ſi poſteriores duo numeri ducantur in denominatorem proportionis, quam tertius ad primum habet. Vt datis his tribus numeris 2. 3. 6. Harmonicè proportionalibus, ſi poſteriores duo, 3. 6. ducantur in 3. denominatorem proportionis 6. ad 2. fient 9. 18. atque ita erunt iam quinque termini 2. 3. 6. 9. 18. Harmonicè proportionales: Et ſi poſteriores duo 9. 18. ducantur iterum in 3. denominatorem proportionis, erunt

ſeptem

Septem hi termini, 2. 3. 6. 9. 18. 27. 54. continuè proportionales Harmonicè: & ſic progredi poterimus in infinitum, ita ut ſemper Harmonica proportionalitas continuetur per terminos locorum imparium, ut per tertium, quintum, ſeptimum, nonum, &c. Quòd ſi verſus minores terminos progredi libeat, diuidendi erunt minores duo numeri per denominatorem proportionis extremorum: Et poſteriores duo minores inuenti iterum diuidendi per eundem denominatorem, & ſic deinceps in infinitum. Vt datis his tribus numeris, 18. 9. 6. ſi minores duo, 9. 6. diuidantur per 3. denominatorem proportionis inter extremos 18. 6. fient 3. 2. atque ita erunt iam quinque termini, 18. 9. 6. 3. 2 Et ſi rurſus duo poſteriores inuenti 3. 2. diuidantur per eundem denominatorem 3. adiuncti erunt ultimo termino 2. alij duo in Harmonica proportionalitate hoc modo. 18. 9. 6. 3. 2. 1. $\frac{2}{3}$. atq; ita deinceps progredi licebit in infinitum.

ALIO modo, & quidem magis propriè, continuatur proportionalitas Harmonica, ſiue ad maiores numeros progrediendo, ſiue ad minores, quando primi tres numeri ſunt Harmonicè proportionales; Item, relicto primo, alij ſequentes tres; & relictis duobus, ſequentes alij tres, atque ita deinceps: Sed in hac continuatione nunquam erit eadem proportio inter extremos trium, quæ inter extremos aliorum trium. Vt in his 4. numeris, 3. 4. 6. 12. continuata dicitur proportionalitas Harmonica, quoniam tam tres 3. 4. 6. quàm tres 4. 6. 12. Harmonicè proportionales ſunt; ſed priorum extremi 3. 6. proportionem habent duplam, at extremi poſteriorum 4. 12. triplam. Item continuata eſſe dicitur Harmonica proportionalitas in his quinque terminis, 10. 12. 15. 20. 30. quia & in tribus, 10. 12. 15. & in tribus, 12. 15. 20. & in tribus, 15. 20. 30. Harmonica proportionalitas reperitur, licet extremi quorumlibet trium non habeant eaſdem proportiones. Quo pacto autem in utramque partem hoc modo continuanda ſit, quando continuari poteſt (neque enim ſemper ad maiores numeros progrediendo poteſt hoc modo extendi) aut quo pacto quotlibet numeri continuè Harmonicè proportionales, ut expoſuimus, reperiri poſſint ex ijs, quæ ſequuntur, conſtabit.

II.

INTER quoſuis datos duos numeros conſtitues medium Harmonicè proportionalem, hac ratione. Numerum, qui fit ex datorum duorum numerorum differentia in eorum minorem, partire per eorundem ſummam, Quotientemque minori adde. Conflatus enim numerus erit medius, quem quæris. Vel eandem differentiam datorum numerorũ duc in maiorem, & productam partire per eorundem ſummã. Si enim Quotientem ex maiore dato ſubtrahas, reliquus fiet medius terminus quæſitus. Vt inter duos numeros 15. & 60. inuẽturus

medium

Digitized by Google

medium duc eorum differentiam 45. in minorem 15. & numerum productum 675. partire per eorum ſummam 75. Nam ſi Quotientem 9. minori 15. adijcias, conflabis medium terminum 24. Vt hic patet, 15. 24. 60. Eundem medium reperies, ſi eandem differentiam 45. ducas in maiorem 60. & productum 2700. per eorum ſummam 75. diuidas. Quotiens enim 36. ex maiore 60. detractus relinquet eundem medium terminum 24.

VIDES ergo, quando ſumma datorum duorum numerorum non metitur productum ex eorundem differentia in minorem eorum, vel in maiorem, medium inuentum eſſe neceſſariò integrum cum fractione. Vt ſi inter 7. & 10. inueniendus ſit medius, duc eorum differentiam 3. in minorem 7. & productum 21. per eorundem ſummam 17. partire. Quotiens enim $1\frac{4}{17}$. additus eidem minori 7. facit medium terminum $8\frac{4}{17}$. Vt hic vides, 7. $8\frac{4}{17}$. 10. Quia tam 10. ad 7 habent proportionem ſupertripartientem ſeptimas, quàm differentia maiorum $1\frac{13}{17}$. ad minorum differentiam $1\frac{4}{17}$. Vel eorum differentiam 3. duc in maiorem 10. productumq́ue numerum 30. partire per eorum ſummam 17. Quotiens enim $1\frac{13}{17}$. ſubtractus ex maiore 10. reliquum faciet eundem medium terminum $8\frac{4}{17}$.

ALII tradunt medij termini inuentionem inter duos numeros datos in proportionalitate Harmonica hoc modo. Inuentis duobus minimis numeris in proportione duorum numerorum datorum, iubent Quotientem, qui fit ex diuiſione differentiæ datorum duorum numerorum per ſummam minimorum duorum inuentorum, duci in minorem inuentum, & productum numerum minori dato adijci: Vel eundem Quotientem duci in maiorem inuentum, & productum numerum ex maiore dato ſubtrahi. Semper enim vel ille conflatus numerus, vel hic reliquus dabit medium terminum, qui quæritur. Vt ſi inter 20. & 30. ſit inueniendus medius: minimi numeri proportionis inter 20. & 30. ſunt 2. 3. Si igitur differentia datorum numerorum 10. diuidatur per inuentorum ſummam 5. fit Quotiens 2. quem ſi ducamus in minorem inuentum 2. & productum 4. minori dato 20. addamus, vel ſi eundem Quotientem 2. ducamus in maiorem inuentum 3. & productum 6. ex dato maiore 30. demamus, inuenietur ſemper medius terminus 24. Vt hic apparet. 20. 24. 30.

BREVIVS ita medius terminus reperietur. Diuidatur datorum numerorum differentia per numerum, qui denominatorem proportionis, quam dati numeri habent, vna vnitate ſuperat. Quotiens enim minori termino additus dabit medium. Vt datis numeris 10. 40. habentibus proportionem quadruplam; ſi eorum differentia 30. diuidatur per 5. qui numerus denominatorem proportionis vna vnitate ſuperat, fiet Quotiens 6. qui additus minori termino 10. conficiet medium terminum 16. hoc modo 10. 16. 40.

SED ad memoriam iuuandam inueniemus fortaſſe commodiùs,

(licet

(licet aliquantò longiore operatione) medium terminum inter duos extremos datos, hoc modo. Si duo extremi non ſunt impares, vel pares, ſed vnus par, & alter impar, duplica illos, & inter duplicatos conſtitue medium Arithmeticè proportionalem, qui ſemper erit ſemiſſis ſumma eorum. Per eos deinde tres numeros Arithmeticè proportionales quare ex regula 1. tres Harmonicè proportionales. Ita enim inuentus erit medius terminus inter duos, qui eandem inter ſe proportionem habent, quam dati duo extremi. Quod ſi fiat, vt primus inuentus ad ſecundum, ita primus datus ad aliud, hoc eſt, ſi per primum inuentum diuidatur numerus ex ſecundo inuento in primum datum factus, reperietur medius inter datos duos extremos. Vt ſi inter 7. & 10. inueniendus ſit medius, duplica eos, vt fiant 14 & 20. Summa enim horum 34. par eſt, cuius ſemiſſis 17. eſt medius Arithmeticè inter 14. & 20. hoc modo 14.17.20. Ex his tribus inuenientur hi tres Harmonicè proportionales, 238.280.340. Si ergo fiat, vt primus inuentus 238. ad ſecundum 280. ita primus datus 9. ad aliud inuenietur numerus $8\frac{4}{17}$. qui medius eſt Harmonicè inter 7. & 10. qui ab initio propoſiti fuerunt.

III.

PROPOSITIS duobus numeris, reperiemus tertium vtroque maiorem in proportionalitate Harmonica, quando id fieri poteſt, (Pulchrè autem operatio docebit, quando id fieri nequeat) hac ratione. Numerum ex vno in alterum genitum partiemur per numerum, qui relinquitur, ſubtracta amborum differentia ex minore termino dato. Quotiens enim erit tertius terminus vtroque dato maior, quem quærimus. Quod ſi quando diuiſor reperiatur eſſe 0. vel quando amborum differentia ex minore termino ſubtrahi nequit, impoſſibile eſt, datis duobus numeris poſſe adiungi tertium maiorem in proportionalitate Harmonica. Vt ſi duo termini minores dentur 12. 16. diuidemus numerum ex eis procreatũ 192. per 8. qui numerus relinquitur, ſi amborũ differentia 4. ex minore 12. detrahatur. Quotiens enim 24. cum datis duobus conſtituit hanc Harmonicam proportionalitatem, 12. 16. 24. Hanc extendemus, ſi ad duos terminos 16. 24. tertium adiungamus, nimirum diuidendo 384. numerum ex 16. in 24. factum, per 8. qui numerus remanet, facta ſubtractione differentia amborum, qua eſt 8. ex minore 16. Inuenietur enim numerus 48. Quare ita ſtabunt 4. termini Harmonicè proportionales, 12.16.24.48. Quod ſi tentemus his adiungere alium maiorem, fruſtrà laborabimus. Nam datis duobus vltimis 24. 48. reperietur diuiſor eſſe 0. Differentia enim amborum, qua eſt 24. ſubtracta ex minore 24. relinquit 0. Quod ſi quis proponat hos duos numeros, 10. 12. adiungetur illis tertius vtroque maior, 15. Ad hos verò duos 10.11. apponetur tertius $12\frac{2}{9}$. Et ad duos 90.99. tertius 110. At verò ad 3.6. nullus adiungi po-

gi poterit: quia differentia inter ambos, quæ eſt 3. dempta ex maiore 3. relinquit 0. Atq; eodem modo quando dati numeri habeant proportionem duplam, non poteſt illis adiungi tertius proportionalis, quia differentia amborum ſemper eſt minori termino æqualis. Multò magis cùm dati numeri habent proportionem dupla maiorem, non inuenietur tertius maior illis proportionalis Harmonicè, quia differentia amborum tunc ſemper maior eſt minore termino, atq; ideircò ſubtractio fieri nequit. Vt ſi dentur numeri 3. 7. quorum proportio eſt dupla ſeſquitertia, nimirum maior, quàm dupla, vides amborum differentiam 4. maiorem eſſe minore termino 3. Quare illis non adiungetur vllus tertius proportionalis.

ALII ita inueſtigant tertium terminum. Ducunt datorum numerorum differentiam in maiorem, numerumq; productum per numerum, qui relinquitur, ſubtracta eadem differentia ex minore numero, diuidunt; Quotientem denique maiori adijciunt, vt tertium conficiant. Vt datis duobus numeris, 12. 16. ſi eorum differentia 4. ducatur in 16. & productus numerus 64. diuidatur per 8. (qui numerus relinquitur, ſubtracta eadem differentia 4. ex minore 12.) fit Quotiens 8. qui additus ad minorem 16. facit tertium 24. vt prius.

ITAQVE, vt duobus numeris adiungi poſſit tertius maior proportionalis, neceſſe eſt, illorum proportionem eſſe vel ſuperparticularem, vel ſuperpartientem, nimirum dupla minorem. Ex quo liquidò conſtat, Harmonicam proportionalitatem non poſſe progredi in infinitum verſus maiores numeros, ſi de continuatione ſecundo modo accepta loquamur, quæ propria eſt, vt in prima regula diximus. Nam cùm primum ventum erit ad duos numeros, quorum proportio dupla eſt, vel maior, ibi neceſſariò proportionalitas conſiſtet, & vltra non promouebitur.

SEQVITVR quoque ex priori regula, quando minor terminus ſuperat differentiam amborum ſola vnitate, tertium procreari ex primo in ſecundum: quia productus hic numerus diuiſus per illam vnitatem facit tertium numerum, vt diximus. Conſtat autem numero per vnitatem diuiſo, Quotientem eſſe eundem numerum diuiſum. Vt ſi dentur duo numeri 6. 11. quia minor 6. ſuperat amborum differentiam 5. ſola vnitate, erit tertius proportionalis numerus 66. qui fit ex 6. in 11. veluti hic vides, 6. 11. 66. Idem cernitur in hiſce numeris, 2. 3. 6. & 10. 19. 190. Semper enim tertius fit ex primo in ſecundũ: quia primus ſuperat differentiam priorum duorum ſola vnitate.

EX poſteriori verò regula ſequitur, quando minor terminus ſuperat amborum differentiam ſola vnitate, tertium procreari, ſi productus ex amborum differentia in maiorem, maiori adijciatur: quia productus ille diuiſus per illam vnitatem, non facit diuerſum Quotientem ab eo porducto, &c. Vt datis iiſdem numeris 6. 11. ſi differentia 5. ducatur in 11. productus 55. addatur maiori 11. fiet tertius terminus 66. vt prius.

QVA-

QVARE faciliè quoque reperiri poſſunt tres numeri Harmonicè proportionales, ſi pro primo ſumatur quilibet numerus, pro ſecundo verò eius duplus, detracta priùs vnitate, pro tertio denique numerus, qui ex primo fit in ſecundum. Vt ſi primus ſit 8. erit ſecundus 15. & tertius 120. & ſic de cæteris. Proportio autem tam extremorum hoc modo inuentorum, quàm differentiarum ſemper erit multiplex à medio, qui perpetuò impar eſt, denominata. Vt in his proximis tribus, 8.15.120. proportio eſt quindecupla.

VNDE ſi quærantur tres minimi numeri integri Harmonicè proportionales in quacunque proportione multiplici, ſi quidem denominator eſt numerus impar, ſtatuemus eum denominatorem in medio: ſemiſſem autem numeri proximè maioris in primo loco. In tertio denique collocabimus eum, qui ex primo in ſecundum fit. Vt ſi deſiderentur tres numeri integri, & minimi in proportione ſeptupla, locabimus 7. in medio, & 4. (id eſt, ſemiſſem numeri 8. proximè maioris quàm 7.) in primo loco, & in tertio numerum 28. ex 4. in 7. procreatum, vt hic vides, 4. 7. 28. Si verò denominator eſt par, ſtatuemus numerum proximè maiorem in primo loco: in tertio verò collocabimus numerum, qui fit ex illo proximè maiore in denominatorem: In medio denique ponemus denominatorem duplicatum. Vt ſi inueniendi ſint tres minimi integri in proportione octupla, conſtituemus 9. qui numerus proximè maior eſt denominatore 8. in primo loco; & in tertio numerum 72. ex 9. in 8 genitum, in medio denique duplum denominatoris, nimirum 16. vt hic apparet 9.16.72.

QVOD ſi tres numeri Harmonicè proportionales in data proportione inueniendi ſint, ſiue illi minimi ſint & integri, ſiue non, agendum erit hoc modo. In medio ſtatuemus denominatorem datæ proportionis: In primo verò ſemiſſem numeri, qui denominatorem vna vnitate ſuperat: In tertio denique loco locabimus numerum ex multiplicatione primi per medium factum. Veluti ſi quærantur tres in data proportione dupla ſupertripartiente ſeptimas; erit denominator huius proportionis $2\frac{3}{7}$. *collocandus in medio, & in primo numerus* $1\frac{5}{7}$. *nimirum ſemiſſis numeri* $3\frac{3}{7}$. *qui denominatorem* $2\frac{3}{7}$. *vnitate ſuperat. Tertius denique erit* $4\frac{8}{46}$ *factus ex primo* $1\frac{5}{7}$. *in medium* $2\frac{3}{7}$. *Ita igitur ſtabunt tres numeri inuenti,* $1\frac{5}{7}$. $2\frac{3}{7}$. $4\frac{8}{49}$. *qui ad hos tres eiuſdem denominationis reuocabuntur,* $\frac{84}{49}$. $\frac{119}{49}$. $\frac{204}{49}$. *ſi priùs quilibet ad vnicam fractionem reducatur: Numeratores autem 84. 119. 204. erunt numeri integri Harmonicè proportionales, eritq; extremorum proportio, ac proinde & differentiarum, dupla ſupertripartiens ſeptimas, quæ videlicet data eſt.*

IV.

DVOBVS numeris datis, reperiemus tertium vtroq; minorem in proportionalitate Harmonica, hoc modo. Numerum ex vno in alte-

Digitized by Google

rum productum partiemur per ſummam ex maiore dato, & amborum differentia collectam. Quotiens enim erit is, qui quaeritur. Vt ſi dentur duo numeri 6. 12. ſi diuidamus numerum 72. ex 6. in 12. factum, per 18. ſummam ex 12. & amborum differentia 6. collectam, reperiemus tertium 4. minorem vtroque illis proportionalem, vt hic cernis, 4.16.12. Hanc extendemus regrediendo verſus minores numeros, ſi duobus 4. 6. minorem tertium adiungemus 3. hoc modo 3.4 6. 12. qui numerus 3. inuenietur, diuidendo numerum 24 factum ex 4. in 6. per 8. ſummam videlicet ex 6. & amborum differentia 2. collectam. Eodem modo duobus minoribus 3.4. adiungetur tertius minor $2\frac{2}{5}$. *Atque in hunc modum decreſcet proportionalitas qualibet Harmonica continuè in infinitum. Vbi animaduertere licet admirabilem ſanè varietatem inter has tres proportionalitates, Arithmeticam, Harmonicam, & Geometricam; qua varietas tribus hiſce propoſitionibus explicatur.*

I. ARITHMETICA augetur in infinitum, ſed in infinitum non decreſcit.

II. HARMONICA contrà, decreſcit in infinitum, ſed in infinitum augeri non poteſt. Quod intelligendum eſt, ſi ita continuari debeat, vt quilibet tres numeri habeant proportionalitatem Harmonicam; hoc eſt, vt primus, ſecundus, ac tertius ſint Harmonicè proportionales: Item ſecundus, tertius, & quartus: Item tertius, quartus, & quintus, &c. Nam aliàs in vtramque partem extendi poteſt in infinitum, ſicut Geometrica, vt ſuprà in regula 1. diximus.

III. GEOMETRICA denique & augetur, & decreſcit in infinitum.

EST & hoc notatu dignum, in cubo reperiri quatuor terminos in Harmonica proportionalitate continuos, qui variè inter ſe comparati praecipuas perfectaſque conſonantias Muſicas exprimunt. Nam 6. eius baſes quadrata; 8. anguli ſolidi; 12. latera; & 24. anguli plani conſtituunt hos 4. terminos 6. 8. 12. 24. continuè proportionales Harmonicè. Proportio autem 8. ad 6. eſt ſeſquitertia, qua conſonantiam Diateſſaron, ſiue Quartum, conſtituit. Proportio verò 12 ad 8. ſeſquialtera eſt, continens conſonantiam Diapenten, ſiue Quintam. Proportio deinde 12. ad 6. vel 24. ad 12. dupla eſt, explicans conſonantiam Diapaſon, ſiue Octauam. At proportio 24. ad 8. tripla eſt, efficiens conſonantiam Diapaſon & Diapenten, hoc eſt, Duodecimam. Denique proportio 24 ad 6. quadrupla exiſtit, exhibens conſonantiam Diſdiapaſon, ſiue Decimamquintam.

V.

DATIS quoslibet numeris Arithmeticae proportionalitatis, ſi quicunque numerus, ſiue minimus, ſiue non minimus, ab eis numeratus per ſingulos diuidatur, erunt Quotientes conuerſo ordine Harmoni-

Digitized by Google

monicè proportionales. Et viciſſim, datis quotlibet numeris in proportionalitate Harmonica, ſi numerus, quem metiuntur, per ſingulos diuidatur, erunt Quotientes ordine conuerſo Arithmeticè proportionales. Verbi gratia: Sint Arithmeticè proportionales 1.2.3.4.5.6. Numerus, quem metiuntur, eſt 720. ex eorum continua multiplicatione inter ſe procreatus. At minimus ab eis numeratus erit 60. quem reperies per ea, quæ in Arithmetica practica cap.10. ſcripſimus. Priore ergo per ſingulos datos diuiſo, inuenientur hi in proportionalitate Harmonica continua.

720. 360. 240. 180. 144. 120.

Poſteriore autem per eoſdem datos diuiſo, reperientur hi:

60. 30. 20. 15. 12. 10.

Atque hi numeri inuenti eaſdem proportiones habent, quas dati numeri Arithmeticæ proportionalitatis, bini ac bini, conuerſo tamen ordine: nimirum vt in Harmonica primus ad ſecundum, ita in Arithmetica ſecundus ad primum: Et vt in Harmonica ſecundus ad tertium, ita in Arithmetica tertius ad ſecundum, &c. Numeri quoque per minimum numeratum inuenti, ſunt minimi in ſuis proportionibus. Quòd ſi viciſſim numerus ab inuentis numeratus diuidatur per ſingulos inuentos, gignentur totidem numeri Arithmeticè proportionales: & ſi quidem minimus, quem metiuntur, diuidatur, prodibunt iidem numeri Arithmeticè proportionales, per quos Harmonicè proportionales inuenti ſunt, & eodem quidem ordine, quo dati ſunt, ſed ordine conuerſo, ſi cum inuentis in Harmonica proportionalitate conferantur. Semper enim ſi in vna proportionalitate progrediantur numeri à minoribus ad maiores, in altera à maioribus ad minores progreſſus fit, & contrà.

IGITVR ſi quis cupiat quotcumque terminos continuè Harmonicè proportionales, ſumendi ſunt totidem termini Arithmeticè quomodolibet proportionales, & numerus ab eis numeratus (& minimus quidem, ſi minimi deſiderentur) per ſingulos diuidendus, vt diximus.

VI.

DATIS tribus numeris in proportionalitate Harmonica, tantum fit ex priorum differentia in tertium, quantum ex differentia poſteriorum in primum. Vt hic cernis. Nam tum ex 2. in 12. tum ex 4. in 6. fit numerus 24. Ratio huiuſce rei eſt: quia cùm ſit, vt 12. primus ad 6. ſecundum, ita 4. tertius ad 2. quartum; erit numerus ex primo 12. in quartum 2. factus, æqualis numero, qui ex ſecundo 6. fit in

Digitized by Google

Differentia	2	4	
Proper. Har.	6	8	12

tertium 4. Vt ex 2. regula proportionalitatis Geometricæ manifeſtum eſt. Idem conſtat in pluribus terminis, ſi terni ac terni ſumantur cum ſuis differentijs, vt in his 6. terminis appares.

Differentia.	30	10	5	3	2	
Proper. Harm.	60	30	20	15	12	10

Nam ex 30. in 20. & ex 10. in 60. fiunt 600. Item ex 10. in 15. & ex 5. in 30. fiunt 150. Rurſus ex 5. in 12. & ex 3. in 20. fiunt 60. Ac denique ex 3. in 10. & ex 2. in 15. fiunt 30. Atque ita, vt vides, iucunda operatione probare potes, num dati quotcunque termini, aut inuenti, ſeruent continuam proportionalitatem Harmonicam, nec ne. Nam ſumptis ternis, ac ternis cum ſuis differentijs, ſi differentiæ commutato ordine ducantur in primum terminum ac ſecundum, producantque vtrobique numeros æquales, erunt termini omnes continuè proportionales Harmonicè, ſin minus, nequaquam.

VII.

QVOD ſi quis reperire velit quinque minimos numeros, in quibus omnes tres proportionalitates exiſtant: ita vt primi tres numeri habeant proportionalitatem Arithmeticam: Relicto autem primo, tres inſequentes, proportionalitatem Geometricam, & tres poſtremi proportionalitatem Harmonicam: ac deinde primus, tertius, & quintus habeant datam proportionem continuam Geometricam. Vel ſi reperire quis velit tres numeros in data proportione continuè proportionales, ita vt inter primum, ac ſecundum cadat medius Arithmeticè proportionalis; & inter ſecundum ac tertium medius Harmonicè proportionalis, medius denique trium datorum numerorum ſit inter medios inuentos medius proportionalis Geometricè, atque quinque numeri ita inuenti ſint minimi omnium, in quibus ea contingant; efficiendum id erit hac ratione.

9.	6.	3.	$1\frac{1}{2}$.	1.
9.	6.	3.	$\frac{3}{2}$	1.
18.	12.	6.	3.	2.

Sit data proportio tripla, in qua tres minimi ſumantur termini, 9. 3. 1. Inter primos duos ſtatuatur medius Arithmeticè, 6. Per hunc diuidatur quadratus medij numeri 3. aſſumpti, & Quotiens $1\frac{1}{2}$. inter 3. & 1. ſtatuatur, vt in primo ordine hic poſito apparet. Sed quia hic quotiens integer eſt cum fractione, reuocabimus eum ad vnicam fractionem hanc $\frac{3}{2}$. vt in ſecundo ordine vides. Quod ſi eius numeratorem 3. accipiamus, relicto denominatore, & alios numeros ſecundi ordinis per denominatorem 2. multiplicemus, procreabimus quinque minimos numeros quæſitos, vt in tertio ordine cernis. Nam 18. 12. 6. Arithmeticam habent

Digitized by Google

bent proportionalitatem: 12. 6. 3. Geometricam: & 6. 3. 2. Harmonicam: ac denique 18. 6. 2. triplam datam. Quòd ſi non inueniendi ſint minimi quinque termini in his tribus proportionalitatibus continuatis, accipi poſſunt quicunque tres numeri datam proportionem habentes continuam, & cum eis duo medij, nimirum ſecundus, & quartus, inueſtigandi, vt dictum eſt.

SI minores termini cum maioribus conferendi ſint, & data ſit proportio ſubtripla, inueniemus eodem artificio ex his tribus minimis, 1. 3. 9. ſubtriplis hos quinque 2. 4. 6. 9. 18. Nam 2. 4. 6. ſeruant proportionalitatem Arithmeticam: 4. 6. 9. Geometricam: 6. 9. 18. Harmonicam; & 2. 6. 18. ſubtriplam propoſitam. Inueniendi modum conſpicis in hiſce tribus ordinibus appoſitis.

1.	2.	3.	$4\frac{1}{2}$.	9.
1.	2.	3.	$\frac{9}{2}$.	9.
2.	4.	6.	9.	18.

RVRSVS ſit data proportio ſeſquialtera, in qua tres minimi termini ſint, 9. 6. 4. Inter 9. & 6. medius eſt Arithmeticè $7\frac{1}{2}$. vt in primo ordine. Reuocetur ad vnicam hanc fractionem $\frac{15}{2}$. vt in ſecundo ordine. Sumpto autem numeratore 15. pro ſecundo numero, relicto denominatore, ducantur alij in ſecundo ordine in denominatorem, 2. Vt in tertio ordine factum eſt: Et quadratus numerus numeri 12. nimirum 144. diuidatur per 15. ac Quotiens $9\frac{3}{5}$. in minimis terminis, ſtatuatur medius inter 12. & 8. eiuſdem tertij ordinis. Hunc numerum $9\frac{3}{5}$. reuocabimus ad hanc vnicam fractionem, $\frac{48}{5}$. vt in quarto ordine. Sumpto denique numeratore 48. pro penultimo numero, relicto denominatore, ducemus alios quarti ordinis in denominatorem 5. inuentiq́ erunt quinque minimi numeri quæſiti, vt in quinto ordine apparet.

9.	$7\frac{1}{2}$.	6.		4.
9.	$\frac{15}{2}$.	6.		4.
18.	15.	12.	$9\frac{3}{5}$.	8.
18.	15.	12.	$\frac{48}{5}$.	8.
90.	75.	60.	48.	40.

Si minores numeri cum maioribus comparandi ſint, inuenientur in proportione data ſeſquialtera quinq́ termini minimi, vt hic vides in quarto ordine. Eademq́ in cæteris eſt ratio.

POTES quoque, ſi placet, in primo ordine omnes quinque numeros conſtituere, & fractiones, ſi quæ ſint, ad vnicam denominationem minimam reuocare, & deinde quamlibet ad vnicam fractionem; Nam ſi numeratores pro illis ſubſtituas, denominatore communi relicto, & reliquos numeros integros per communem denominatorem multiplices, efficies quinque numeros minimos integros quæſitos. Vt ſi ſub quadrupla proportio proponatur, erunt minimi tres termini, 1. 4. 16. Additis ſimul 1. 4. erit ſumma dimidiũ $2\frac{1}{2}$. medius Arithmeticè inter eos. Et ſi diuidatur quadratus numerus numeri 4.

4.		6.		9.
4.	5.	6.	$7\frac{1}{5}$.	9.
4.	5.	6.	$\frac{36}{5}$.	9.
20.	25.	30.	36.	45.

Digitized by Google

1	$2\frac{1}{2}$.	4	$6\frac{2}{5}$.	16.
1.	$2\frac{5}{10}$	4.	$6\frac{4}{10}$	16.
1.	$\frac{25}{10}$	4.	$\frac{64}{10}$	16.
0.	25.	40.	64.	16.

per $2\frac{1}{2}$. *fit Quotiens* $6\frac{2}{5}$. *medius Harmonicè inter 4. & 16. Duæ autem fractiones reducentur ad eandem denominationem, Vt in ſecundo ordine. Et fractionibus ſingulis ad Vnicam fractionem reuocatis, conſtituetur tertius ordo. Sumptis autem numeratoribus, relinquendo denominatorem communem, & numeris integris per denominatorem communem multiplicatis, conſtituentur quinque minimi numeri quæſiti, Vt in quinto ordine Vides. Atque in hunc modum quotcunque terminos proportionem aliquam ſeruantes, in quibus permiſtæ ſunt fractiones, ad totidem terminos integros reduces, quando res exigit.*

VIII.

QVANDO quatuor numeri ita ordinantur, Vt ipſi ſint Geometricè proportionales non continuè, Vnus autem mediorum cum extremis ſeruet proportionalitatem Arithmeticam, alter Verò Harmonicam, ita Vt in quatuor illis numeris tres proportionalitates, quas diximus, reperiantur, dicuntur quatuor illi numeri conſtituere Harmoniam maximam. Quando autem quatuor numeri ita ordinantur, Vt in ipſis reperiantur duæ duntaxat proportionalitates, Vt Vel Geometrica, & Arithmetica: Vel Geometrica, & Harmonica; Vel Harmonica, & Arithmetica, dicuntur illi quatuor numeri Harmoniam minorem conſtituere.

MAXIMAM Harmoniam, in qua extremi termini habeant etiam proportionem datam, ita conſtitues. Sit data proportio quæ 6. ad 1. quam extremi termini habere debent. Quoniam ſumma eorum eſt impar, accipio eorum duplos 12. & 2. inter quos medius Arithmeticè conſtituatur 7. hoc modo 12. 7. 2. Quòd ſi eorum ſumma fuiſſet par, accepiſſem ſtatim medium inter eos in proportionalitate Arithmetica. Ex his tribus Arithmeticè proportionalibus inueniantur tres Harmonicè proportionales per primam regulam, 84. 24. 14. quorum extremi habent proportionem datam, nimirum eandem, quam 12. ad 2. Vel 6. ad 1. Si igitur inter extremos 84. 14 qui ſemper ita inuenti pares erunt, ſtatuatur etiam medius Arithmeticè, 49. erunt quatuor quæſiti numeri, 84. 49. 24. 14. Nam extremi habent datum proportionem, quam 6. ad 1. Deinde in eis reperiuntur omnes tres proportionalitates. Inter ipſos enim quatuor exiſtit Geometrica proportionalitas non continua, cùm eadem ſit proportio 84. ad 49. quæ 24. ad 14. Vel 84. ad 24. quæ 49. ad 14. Vt liquidò conſtat ex 7. proprietate trium harum proportionalitatum. At inter 84. 49. 14. Arithmetica. Ac denique inter 84. 24. 14. Harmonica ex conſtructione, Vt hic Vides.

Tres

Digitized by Google

Tres proportio-	84.	49.	24.	14.	*nalitates ſimul.*				
Geometricè prop.	84.	49.	24.	14.	*Vel*	84.	24.	49.	14
Arithmet. prop.	84.	49	14.						
Harmonicè prop.	84.	24.	14.						

Rurſus ſit data proportio, quæ 3. *ad* 2. *Quoniam iterum eorum ſumma eſt impar, ſint eorum dupli* 6.4. *inter quos ſtatuatur medius in Arithmetica proportionalitate,* 4. *hoc modo,* 6. 5.4. *Ex his per primam regulam inuenio Harmonicè proportionales* 30.24.20. *Conſtituto autem medio Arithmeticè* 25. *inter* 30. *&* 20. *erunt eadem ratione quatuor numeri quæſiti.* 30.25.24.20. *cùm habeant omnes tres proportionalitates, vt hic apparet.*

Geometricè propert.	30	25	24	20	*Vel*	30	24	25	20
Arithmetic. propert	30.	25.	20.						
Harmon. propert.	30.	24.	20.						

EOSDEM 4. *numeros maxima Harmonia reperiemus, ſi pro extremis ſumamus quoſuis duos numeros datam proportionem habentes, pares, vel impares. Si enim inter hos ſtatuatur medius Arithmeticè: fiat autem, vt inuentus ad primum extremum, ita alter extremus ad aliud, erit hic inuentus Harmonica proportionalitate medius inter eoſdem extremos. Quando enim in* 4. *numeris Geometricè proportionalibus, quales ſunt* 4. *inuenti, vnus mediorum eſt medius in proportionalitate Arithmetica, alter mediorum medius eſt in Harmonica inter eoſdem extremos, vt diximus in* 7. *proprietate harum trium proportionalitatum. Quando igitur hi* 4. *numeri inuenti ſunt integri, factum erit, quod proponitur: ſi verò admiſſa ſint fractiones, reducemus eos ad integros, vt ad finem antecedentis regulæ* 7. *ſcripſimus. Vt ſi proportio data ſit dupla, ſtatuemus extremos,* 12. *&* 6. *Dimidium ſumma eorum* 9. *erit medius terminus inter eos Arithmeticè proportionalis, hoc modo,* 12. 9. 6. *Si igitur fiat, vt* 9 *ad* 6. *ita* 12. *ad aliud: Vel vt* 9. *ad* 12 *ita* 6. *ad aliud, inuenietur ſemper numerus* 8. *inter* 12. *&* 6. *in Harmonica proportionalitate medius. Quare ſic ſtabunt* 4. *numeri maxima Harmonia,* 12.9.8.6. *Poſtremò ſi in eadem proportione dupla extremorum ſumamus pro extremis,* 20. *&* 10. *inueniemus medium Arithmeticè,* 15. *& Harmonicè* $13\frac{1}{3}$ *in minimis numeris, hoc modo,* 20. 15. $13\frac{1}{3}$. 10. *Si ergo tertium numerum ad vnicam fractionem* $\frac{40}{3}$. *reuocemus, & eius numeratorem* 40. *denominatore relicto, tertium ſtatuamus, inuenientur alij, ſi inuentos per denominatorem* 3. *multiplicemus, vt hic vides:* 60. 45. 40. 30.

Digitized by Google

MINOREM autem Harmoniam ſic reperiemus. Si in 4 numeris debet reperiri ſola proportionalitas Geometrica cum Arithmetica, cape tres numeros continuè proportionales Geometricè, quorum extremi pares ambo ſint, vel impares. Si enim inter extremos ſtatuas medium in proportionalitate Arithmetica, habebis 4. numeros quæſitos. Vt ſi ſumantur hi tres numeri ſeſquialteri, 16. 24. 36. & inter extremos inueniatur medius Arithmeticè proportionalis, 26. erunt 4 quæſiti numeri, 16. 24. 26 36. quorum tres 16. 24. 36. Geometricè, & tres 16. 26. 36. Arithmeticè proportionales ſunt, ex conſtructione.

SI verò ſola Geometrica cum Harmonica deſideretur, cape quoque tres numeros quoſcunque continuè proportionales Geometricè. Si enim inter extremos inuenias medium in Harmonica proportionalitate, habebis 4 numeros, qui quæruntur. Vt ſi ſumantur iidem tres ſeſquialteri, 16. 24. 36. inuenietur inter extremos medius in Harmonica proportionalitate, 22 $\frac{2}{13}$. Sic ergo ſtabunt 4. numeri inuenti, 16. 22 $\frac{2}{13}$. 24. 36. qui reducentur ad hos integros, 208. 286. 312. 468. Si accepiſſes hos numeros tres duplos, 20. 10. 5. inueniſſes inter extremos medium Harmonicum 8. hoc modo, 20. 10, 8. 5.

SI denique optes ſolam Harmonicam cum Arithmetica proportionalitate, accipe tres quoslibet Harmonicè proportionales. Si namque inter medium, & alterutrum extremorum ſtatuas medium Arithmeticum, inuenti erunt quatuor numeri, quos quærimus. Vt ſi ſumantur hi tres 6. 8. 12. erit inter priores duos medius Arithmeticè proportionalis 7. Quare 4. inuenti numeri erunt hi, 6. 7. 8. 12. At inter poſteriores duos erit medius in Arithmetica proportionalitate, 10. Sic ergo ſtabunt 4. inuenti numeri, 6. 8. 10. 12. qui omnes (quod caſu quodam fortuito in hoc exemplo accidit) ſunt Arithmeticè proportionales, & non ſolùm tres 8. 10. 12. ex conſtructione: at ſoli tres accepti 6. 8. 12. habent proportionalitatem Harmonicam.

IX.

SI inueniendi ſint quotcunque numeri Arithmeticè proportionales continuè, inter quorum binos ac binos cadant ſinguli medii Harmonicè proportionales integri, efficietur id hac ratione. Sumantur tot termini Arithmeticè proportionales, quot quæruntur, & bini in proportione binorum proximorum minimi. Si enim accipiatur minimus numerus numeratus à ſummis binorum minimorum acceptorum, atque hic in ſingulos acceptos numeros Arithmeticè proportionales ducatur, procreabuntur numeri, qui quæruntur. Sint enim verbi gratia inueniendi quatuor. Cape quatuor quoſcunque numeros Arithmeticè proportionales, 3. 6. 9. 12. & 1. 2. minimos terminos proportionis 3 ad 6 & 2. 3. minimos proportionis 6. ad 9. & 3. 4. minimos in proportione 9. ad 12. eruntque tres ſummæ binorum minimorum 3. 5. 7. atque ab his minimus numeratus, 105. Si igitur hunc du-

cas

Digitized by Google

eas ſeorſum in ſingulos acceptos, 3. 6 9. 12. procreabis 4. numeros Arithmeticè proportionales, quos deſideras, 315. 630. 945. 1260. Nam inter primum & ſecundum in Harmonica proportionalitate medius eſt, 420. inter ſecundum & tertium, 756. Inter tertium & quartum, 1080. Vt hic cernis.

Arith. propor.	315		630		945		1260
Medij Harm.		420		756		1080	

ITAQVE ſi vis duos in data proportione duorum numerorum, inter quos cadat vnus integer medius Harmonicè, ſume duos minimos in data proportione, & eorum ſummam duc in duos datæ proportionis. Vt ſi data ſit proportio tripla inter 4. & 12. erunt minimi termini, 1. 3. quorum ſummam 4. ſi duxeris in 4. & 12. efficies 16. & 48. numeros quæſitos. Medium Harmonicum inter eos erit 24. Vt hic vides, 16. 24. 48. Si datæ proportionis numeri fuiſſent minimi 1. 3. duxiſſemus vtrumq; in eorum ſummam 4. factiq; eſſent hi duo numeri. 4. 12. inter quos cadit Harmonicè medius 6.

X.

SI autem volueris quotcunque terminos in continua proportione Geometrica data, inter quorum binos, ac binos, bini medij integri cadant, vnus in proportionalitate Arithmetica, & alter in Harmonica, aſſequeris id hoc artificio. Sume tot minimos numeros continuè proportionales Geometricè, quot deſiderantur, & ſingulos multiplica per ſummam duorum in eadem proportione minimorum: Et ſi quidem producti fuerint omnes pares, ipſi erunt, quos quærimus; ſin minus, eorum dupli dabunt quæſitos numeros. Sint enim inueniendi verbi gratia tres in proportione ſeſquialtera. Cape totidem minimos in data proportione, 4. 6. 9. & duos minimos in eadem, 2. 3. Horum ſummam 5. duc in ſingulos acceptos, & productos numeros, quoniam non omnes pares ſunt, dupla, habebiſque propoſitos numeros 40. 60. 90. Nam inter 40. 60. medium Harmonicum eſt, 48. Arithmeticum, 50. Et inter 60. 90. Harmonicum medium eſt, 72. Arithmeticum 75. Vt hic vides.

Geom. proportio.	40			60			90
Medij Harmo.		48			72		
Medij Arithm.			50			75	

HINC facilè reperies duos numeros in data proportione, inter quos intercipiantur duo medij, alter ſecundũ proportionalitatẽ Arithmeti-

Digitized by Google

eam, & ſecundum Harmonicam alter. Sumptis enim minimis terminis datæ proportionis, ſi eorum ſummam vel in duos illos minimos terminos, vel in duos quoſcumque alios numeros datam habentes proportionem duxeris, erunt numeri producti, ſi pares ſunt, quæſiti: ſi verò vterque non eſt par, erunt eorum dupli, quos quærimus. Vt ſi data ſit proportio ſeſquitertia, cuius minimi numeri ſunt 3. 4. eorumque ſumma, 7. Si ergo duces 7. in 3. & 4. vel in 12. & 16. datam quoque habentes proportionem, produces vel 21. 28. vel 84. & 112. Et quia priores duo non ſunt pares, erunt eorum dupli, 42. 56. ij, quos quærimus. Poſteriores autem duo, quia pares ſunt, erunt quæſiti. Tam enim inter illos, quàm inter hos cadunt duo medij, quos quærimus, vt hic manifeſtum eſt.

Numeri inuenti.	1 42 1 1 1 56 1 1 1 1 84 1 1 1 112
Medij Harmon.	1 48 1 1 1 Vel 1 1 96 1 1
Medij Arithm.	1 1 49 1 1 1 1 1 1 98 1

XI.

Si verò quis petat ſibi dari tres numeros in proportionalitate Harmonica, inter quorum binos bini cadant medij, alter in proportionalitate Arithmetica, & in Geometrica alter, exequemur id hac methodo. Inueniantur, per 9. regulam proportionalitatis Geometricæ, tres numeri Arithmeticè proportionales 2. 50. 98. inter quorum priores binos ſit medius Geometricè, 10. & inter binos poſteriores, 70. ſtatuanturq; ordine ſic 2. 10. 50. 70. 98. Minimus autem numerus ab his quinque numeratus ſit 2450. Quo diuiſo per eoſdem quinque numeros, Quotientes ſint, 1225. 245. 49. 35. 25. Si igitur omnes Quotientes ſint pares, vel impares, erunt primus, tertius, & quintus; vt 1225. 49. 25. ij numeri, qui quæruntur. Sunt enim Harmonicè proportionales, vt conſtat ex 5. regula, cùm ſint Quotientes producti ex diuiſione numeri 2450. quem numeri 2. 50. 98. Arithmeticè proportionales numerant, per eoſdem numeros 2. 50. 98. Inter binos autem cadunt Geometricè proportionales, 245. ſecundus Quotiens; & 35. tertius Quotiens. Habent enim 1225. 245. 49. eaſdem proportiones conuerſo ordine, quas continuè proportionales 2. 10. 50. habent, vt conſtat ex 7. regula proportionalitatis Geometricæ. Eodemq; modo 49. 35. 25. eaſdem habebunt proportiones, quas conuerſo ordine habent continuè proportionales 50. 70. 98. cùm tam illi, quàm hi, ſint Quotientes producti per diuiſionem eiuſdem numeri 2450. per 2. 10. 50. & per 50. 70. 98. Certum autem eſt, inter binos eoſdem 1225. 49. & inter 49. 25. cadere quoque ſingulos Arithmeticè proportionales, cùm omnes pares ponantur, vel impares. Quod ſi non omnes ſint pares, duplicandi erunt omnes 5.

Quotien-

Digitized by Google

Quotientes, vt pares numeri ſiant, qui idem omnino præſtabunt, quod quærimus. Habebunt enim eaſdem proportiones, quas eorum ſubdupli habent, ac proinde tam inter primum ac tertium ſecundus, quam inter tertium & quintum quartus medio loco erit Geometricè proportionalis. Cum ergo inter eoſdem cadant medij Arithmeticè, conſtat propoſitum. Exemplum ſuperius ob oculos hic propoſitũ eſſe vides.

Tres Har. prop. inuenti.	1225			49			25
Medij Arith.		637			37		
Medij Geometr.			245			35	

XII.

RVRSVS ſi quærantur tres numeri in Arithmetica proportionalitate, inter quorum binos cadant bini proportionales, Geometricè vnus, & alter Harmonicè, ſatisfaciemus quæſtioni hoc modo. Reperiantur iterum, per 9. regulam proportionalitatis Geometricæ, tres numeri Arithmeticè proportionales, 2. 50. 98. inter quorum binos ſinguli medij cadant in proportionalitate Geometrica; ſumanturque duo minimi 1. 25. in proportione priorum duorum: Item duo minimi 25. 49. in proportione duorum poſteriorum; & horum ſummæ 26. 74. numerent minimum numerum 692. in quem tres illi inuenti 2. 50. 98. ducantur. Producti enim numeri 1924. 48100. 94276. erunt, quos inquirimus. Cum namque eaſdem proportiones habeant, quas eorum ſubmultiplices, 2. 50. 98. fit vt quemadmodum inter binos horum ſinguli cadunt medij Geometricè, ita quoque inter binos illorum ſinguli intercipiantur medij in eadem proportionalitate Geometrica. Deinde quia ſumma minimorum numerorum 1. 25. & 25. 49. in proportionibus 2. ad 50. & 50. ad 98. (qui tres, 2. 50. 98. Arithmeticè ſunt proportionales) numerant minimum numerum 962. qui in eos tres, 2. 50. 98. ductus produxit 1924. 48100. 94276. cadent inter binos horum trium ſinguli medij Harmonicè proportionales, vt in 9. regula traditum eſt. Exemplum ergo cum medijs ſic ſtabit.

Arith. prop. nu.	1924			48100			94276
Medij Harm.		3700			63700		
Medij Geom.			9620			67340	

XIII.

EX his, quæ diximus, inuenire quis poterit tres numeros proportionales ſiue Arithmeticè, ſiue Geometricè, ſiue Harmonicè, inter quorum bi-

Digitized by Google

rum binos cadant terni medij, vnus Arithmetice, alter Geometricè, & reliquus Harmonice. Sint enim primum inueniendi tres Arithmeticæ proportionalitatis. Per antecedentem regulam 12. reperiantur tres numeri Arithmeticæ proportionalitatis, inter quorum binos cadant bini medij, vnus in Geometrica proportionalitate, & in Harmonica alter. Qui tres numeri ſi fuerint omnes pares, vel impares, cadent quoque inter binos ſinguli Arithmeticè proportionales, atque adeo quæſtioni ſatisfacient. Si verò non omnes pares ſint, aut impares, eorum dupli erunt, quos quærimus. Exemplum hic habes in tribus numeris antecedentis regulæ, qui omnes pares ſunt, vt hic apparet.

Arith. prop.	1924				48100				94276
Medij Har.		3700				63700			
Med. Geo.			9620				67340		
Med. Arith.				25012				71188	

DEINDE inueniendi ſint tres numeri in Geometrica proportionalitate, inter quorum binos cadant terni medij, in ſingulis proportionalitatibus ſinguli, ſitque proportio data, quam medij Geometricæ proportionalitatis efficere debent, nimirum ſeſquialtera. Cape quinque numeros minimos datæ proportionis continuè proportionales, 16. 24. 36. 54. 81. & duos minimos 4 9. in proportione primi 16. ad tertium 36. & tertij 36. ad quintum 81. Horum minimorum ſummam 13. duc in eundem primum 16. tertium 36. & quintum 81. Producti enim numeri 208. 468. 1053. duplicati, (quoniam ipſi non omnes pares ſunt, aut impares; alias non eſſent duplicandi) nimirum 416. 936. 2106. (vt inter binos cadere poſſint ſinguli medij Arithmeticè) ſunt ij quos quærimus. Nam inter binos cadunt bini medij, alter Harmonice, & Arithmetice alter, vt ex 10. regula patet: Et inter eoſdem cadunt medij Geometrice, nimirum dupli eorum, qui fiunt ex eadem ſumma 13. duorum minimorum in ſecundum 24. & tertium 54. ab initio acceptos: quemadmodum hic manifeſtum eſt.

Geom. prop.	416				936				2106
Med. Harm.		576				1296			
Med. Geom.			624				1404		
Med. Arith.				676				1521	

POSTREMO ſint inueniendi tres in Harmonica proportionalitate. Inuentis tribus in Harmonica proportionalitate, 1225. 49. 25. inter quorum binos cadant bini Medij, vnus Arithmetice & alter Geome-

Geometricè, vt in 11. regula docuimus, ſint proportionis priorum duorum minimi duo numeri 25. 1. & proportionis duorum poſteriorum minimi duo numeri 49. 25. quorum ſumma 26. 74. numerent minimum numerum 962. Hunc ſi in tres inuentos duxeris, gignes tres quæſitos 1178450. 47138. 24050. Nam inter binos cadent, bini medij, vnus Arithmetice, & alter Geometrice, quemadmodum inter eorum ſubmultiplices 1225. 49. 25. nimirum numeri, qui fiunt ex eodem 962. in medios ſupra inuentos. Item inter eoſdem binos cadent ſinguli medij Harmonice, vt ex 12. regula conſtat, cum producti ſint ex minimo numerato à ſummis minimorum terminorum, in omnes tres. Exemplum hic habes.

Har prop.	1178450				47138				24050
Med. Ar.		612794				35594			
Med. Geo.			235690				33670		
Med Har.				90650				31850	

XIV.

PARI ratione comperiemus duos numeros proportionem habentes duplicatam datæ proportionis, inter quos cadant tres medij, vnus in proportionalitate Arithmetica, & in Geometrica alius, & tertius in Harmonica. Sit enim data proportio 6. ad 3. & tres minimi in ea numeri, 4. 2. 1 eritq; ex defin. 10. huius lib. proportio 4. ad 1. duplicata proportionis 2. ad 1. vel 6. ad 3. datæ. Ducatur ſumma 5. ex 4. & 1. collecta in duos quoſuis numeros habentes eandem proportionẽ, quam 4. ad 1. hoc eſt, duplicatam datæ proportionis, vt in 12. & 3. Producti autem numeri 60. 15. duplicentur, ſi ambo non ſint pares, vel impares. Dupli enim 120. 30. ſunt quos quærimus. Et ſi vterque eſſet par, aut impar, ipſi eſſent quæſiti, & duplicatio non foret neceſſaria. Sic autem ſe habent tres medij inter 120. & 30. vt hic apparet.

Duo numeri inuenti.	120				30
Medius Arith.		75			
Medius Geometr.			60		
Medius Harmon.				48	

XV.

POSTREMO ſi lubeat numerum quemcunq; propoſitum diſtribuere in quotuis partes Harmonicam proportionalitatem ſeruantes, efficies id hac ratione. Cape per 5. regulam tot numeros Harmonice propor-

proportionales, in quas partes numerus eſt diſtribuendus. Si enim per eorum ſummam diuides numeros, qui ex dato numero in numeros acceptos fiunt, erunt Quotientes partes, quas quæris, eruntque acceptis numeris eodem ordine proportionales. Vel ſi per ſummam acceptorum numerorum partiaris datum numerum, & Quotientem in ſingulos numeros acceptos ducas, erunt numeri procreati, quos quæris. Vt ſi numerus 130. diſtribuendus ſit in tres partes Harmonice proportionales; ſi ſumantur tres numeri 6. 8. 12. ex 5. regula inuenti, & per eorum ſummam 26 diuidantur numeri 780. 1040. 1560. qui ex dato numero 130. in aſſumptos numeros 6. 8. 12. gignuntur, erunt Quotientes 30. 40. 60. partes, quas inquirimus. Vel ſi datum numerum 130. per 26. ſummam acceptorum numerorum diuidas, & Quotientem 5. ducas in ſingulos acceptos, 6. 8. 12. erunt procreati numeri 30. 40. 60. eadem partes, quas inquirimus. Conſtituunt enim datum numerum 130. ſuntque Harmonice proportionales, ſicuti aſſumpti numeri, 6. 8. 12. Eodem modo diuidetur numerus 10. in has tres partes $2\frac{4}{13}$. $3\frac{1}{13}$. $4\frac{8}{13}$. eodem modo proportionales. Eademque ratio eſt de pluribus partibus.

QVO PACTO EX PROPORTIONE æqualitatis omnes inæqualitatis proportiones rationales oriantur.

POSITIS tribus terminis æqualibus, ſiue vnitatibus, ſiue numeris, mirabile dictu eſt, quam facili & iucunda ratione, ex varia illorum inter ſe additione, omnes proportiones rationales inæqualitatis in tribus terminis gignantur, hoc ordine.

ÆQVALES termini, ſiue numeri, procreant numeros duplos: DVPLI triplos: TRIPLI quadruplos: QVADRVPLI quintuplos; & ſic in infinitum.

DEINDE ex multiplicibus terminis inuentis, ſi ordinem inuertant, gignentur omnes ſuperparticulares, hoc ſeruato ordine. DVPLI inuerſi producunt ſeſquialteros: TRIPLI inuerſi ſeſquitertios: QVADRVPLI inuerſi ſeſquiquartos: atque ita deinceps.

TERTIO ex terminis ſuperparticularibus inuentis, ſi inuertant quoque ordinem, producentur omnes ſuperpartientes, hac ſerie. SESQVIALTERI inuerſi exhibent ſuperbipartientes. SESQVITERTII inuerſi ſupertripartientes: SESQVIQVARTI inuerſi ſuperquadrupartientes, &c.

QVARTO ex iiſdem terminis ſuperparticularibus eo ordine, quo inuenti ſunt, naſcentur omnes multiplices ſuperparticulares, hoc ordine.

SESQVIALTERI dant duplos ſeſquialteros: DVPLI ſeſquialteri triplos ſeſquialteros: TRIPLI ſeſquialteri quadruplos ſeſquialteros, &c. SESQVITERTII item gignunt duplos ſeſquiter-

quitertios: DVPLI ſeſquitertij triplos ſeſquitertios: TRIPLI ſeſquitertij quadruplos ſeſquitertios, &c. SESQVIQVARTI rurſus efficiunt duplos ſeſquiquartos: DVPLI ſeſquiquarti triplos ſeſquiquartos: TRIPLI ſeſquiquarti quadruplos ſeſquiquartos, &c.

QVINTO ex terminis ſuperpartientibus inuentis elicientur omnes multiplices ſuperpartientes, hoc ordine.

SVPERBIPARTIENTES generat duplos ſuperbipartientes: DVPLI ſuperbipartientes triplos ſuperbipartientes: TRIPLI ſuperbipartientes quadruplos ſuperbipartientes, &c. SVPERTRIPARTIENTES quoq; pariunt duplos ſupertripartientes; DVPLI ſupertripartientes, triplos ſupertripartientes: TRIPLI ſupertripartientes, quadruplos ſupertripartientes, &c. SVPERQVADRVPARTIENTES item gignunt duplos ſuperquadrupartientes: DVPLI ſuperquadrupartientes, triplos ſuperquadrupartientes: TRIPLI ſuperquadrupartientes, quadruplos ſuperquadrupartientes: atque ſic de cæteris.

MODVS autem, quo omnes hæ proportiones ex tribus terminis æqualibus generantur eo ordine, quem expoſuimus, eſt vnicus, iſque facillimus, nimirum hic.

SVMMA collecta ex primo termino datæ proportionalitatis, ex qua alia generari debet, ſemel ſumpto, & ſecundo bis, & tertio ſemel exhibet primum terminum proportionalitatis Geometricæ conſtituendæ.

SECVNDVS terminus Geometricæ proportionalitatis conſtituendæ oritur ex ſecundo, & tertio termino datæ proportionalitatis, ex qua alia oriri debet, ſemel ſumpto.

TERTIVM terminum proportionalitatis Geometricæ conſtituendæ offert tertius terminus datæ proportionalitatis, ex qua alia erui debet, ſumptus ſemel.

ATQVE hoc præceptum triplex ſub oculos ponitur hoc appoſito typo, vbi liquido conſtat, qui termini datæ proportionalitatis ſumendi ſint vel ſemel, vel bis, vel omittendi, vt termini alterius proportionalitatis conſtituantur.

TYPVS PROCREATIONIS VNIVS proportionis Geometricæ ex alia Geometrica.

Ordo termin. datæ proportionalitatis.	Primus	Secundus	Tertius
Primus cõſtituitur, ſi dati term. ita ſumantur.	Semel.	Bis.	Semel.
Secũdus conſtituitur, ſi term. dati ita ſumãtur.		Semel.	Semel.
Tertius conſtituitur, ſi ita ſumãtur dati term.			Semel.

SEQVVN-

Digitized by Google

SEQVVNTVR iam exempla generationis omnium proportionum ex æqualitatis proportione. Proponimus autem duas æqualitatis proportiones, vnam in vnitatibus, alteram verò in binariis. Vbi hoc notatione dignum videtur, ex vnitatibus procreari ſemper minimos terminos cuiuſque proportionalitatis trium terminorum.

GENERATIO MVLTIPLICIVM.

Æqualitatis proportio.	1	1	1	2	2	2
Dupli ex æqualibus creati.	4	2	1	8	4	2
Tripli ex duplis.	9	3	1	18	6	2
Quadrupli ex triplis.	16	4	1	32	8	2
Quintupli ex quadruplis.	25	5	1	50	10	2

GENERATIO SVPERPARTICVLARIVM.

Dupli inuerſo ordine.	1	2	4	2	4	8
Seſquialt. ex duplis inuerſis	9	6	4	18	12	8
Tripli ordine conuerſo.	1	3	9	2	6	18
Seſquiter. ex triplis inuerſis.	16	12	9	32	24	18
Quadrupli ordine conuerſo.	1	4	16	2	8	32
Seſquiquar. ex quad. conuerſis.	25	20	16	50	40	32

GENERATIO SVPERPARTIENTIVM.

Seſquialteri inuerſi.	4	6	9	8	12	18
Superb. ex ſeſquial. inuerſis.	25	15	9	50	30	18
Seſquiter. ordine inuerſo.	9	12	16	18	24	32
Supertr. ex ſeſquit. inuerſis.	49	28	16	98	56	32
Seſquiquart. conuerſo ordine.	16	20	25	32	40	50
Superquadr. ex ſeſquip. cõuerſis.	81	45	25	162	90	60

GENERATIO MVLTIPLICIVM.
Superparticularium.

Seſquialteri directo ordine.	o	6	4	18	12	8
Dupli ſeſquialteri ex ſeſquialt.	25	10	4	50	20	8
Tripli ſeſquial. ex dupl. ſeſquial.	49	14	4	98	28	8
Quadrupl. ſeſquial. ex tripl. ſeſquial.	81	18	4	162	36	8

Seſqui-

Seſquitertij ordine recto.	16	12	9	32	24	18
Dupli ſeſquiter. ex ſeſquit.	49	21	9	98	42	18
Tripli ſeſquit. ex dup. ſeſquit.	100	30	9	200	60	18
Quadr. ſeſquit. ex trip. ſeſquit.	169	39	9	338	78	18
Seſquiquarti ordine recto.	25	20	16	50	40	32
Dupli ſeſquiquar. ex ſeſquiqua.	81	36	16	162	72	32
Tripl. ſeſquiq. ex dup. ſeſquiq.	169	52	16	338	104	32
Quadr. ſeſquiq. ex trip. ſeſquiq.	289	68	16	578	136	32

GENERATIO MVLTIPLICIVM Superpartientium.

Superbipart. ordine recto.	25	15	9	50	30	18
Dupli ſuperbip. ex ſuperbip.	64	24	9	128	48	18
Tripli ſuperbi. ex dup. ſuperbip.	121	33	9	242	66	18
Quadr. ſuperb. ex trip. ſuperbip.	196	42	9	392	84	18
Supertripart. directo ordine.	49	28	16	98	56	32
Dupli ſupertrip. ex ſupertrip.	121	44	16	242	88	32
Trip. ſupertri. ex dup. ſupertrip.	225	60	16	450	120	32
Quadr. ſupertri. ex trip. ſupertr.	361	76	16	722	152	32
Superquadrup. recto ordine.	81	45	25	162	90	50
Dupli ſuperquad. ex ſuperq.	196	70	25	392	140	50
Trip. ſuperq. ex dup. ſuperq.	361	95	25	722	190	50
Quad. ſuperq. ex trip. ſuperq.	576	120	25	1152	240	50

HIC enim perſpicuè cernis, quoslibet tres terminos ex tribus proximè antecedentibus procreatos eſſe ex præſcripto triplicis præcepti ſuperioris. Vt verbi gratia poſtremi hi tres, 576. 120. 25. ita producti ſunt ex tribus antecedentibus 361. 95 25. Primus 576. coacervatus eſt ex primo 361. ſemel, & ex ſecundo 95. bis, & ex tertio 25. ſemel. Secundus autem 120. conflatus eſt ex ſecundo 95. ſemel, & ex tertio 25. ſemel. Tertius denique 25. eſt tertius 25. ſemel ſumptus, vt hæc appoſita formula demonſtrat. Atque hoc eodem modo omnes alij geniti ſunt, initio facto à terminis æqualibus, 1. 1. 1. vel 2. 2. 2.

361		
95		
95	95	
25	25	25
576	120	25

QVO

QVO PACTO VICISSIM OMNIS proportio inæqualitatis ad æqualitatis proportionem reuocetur.

PROPOSITIS rurſus tribus terminis inæqualibus in quacunque proportione, reſtituetur viciſſim proportio æqualitatis, non minus iucunda, quam facili ratione, per variam ſubtractionem terminorum inæqualium, vnius ab altero. Ita autem res expedietur triplici hoc præcepto.

MINIMVS trium terminorum inæqualium datorum ſtatuatur vnum extremum proportionis, ad quam reductio fit.

MINIMO eodem ſubtracto ex medio, reliquus numerus conſtituatur in medio loco proportionis, ad quam fit reductio.

SVMMA collecta ex conſtituto iam extremo ſemel, & medio termino bis ſumpto, ſubtrahatur ex maximo datorum trium numerorum, & reliquus numerus alterum extremum nouæ proportionis fiat.

HAC ratione quæuis proportio trium terminorum inæqualium reuocatur ad aliam proportionem, conferendo ſemper maiores numeros cum minoribus; & hac rurſus eodem modo ad aliam, atque ita deinceps, donec tres termini æquales occurrant. Quod ſi tres dati termini habeant continuam proportionem duplam, reducentur ij prima ſtatim operatione ad æqualitatem. Id quod exempla, quæ ſequuntur, planum facient.

Quintupla proportio.	150	30	6
Quadrupla.	96	24	6
Tripla.	54	18	6
Dupla.	24	12	6
Æqualitatis proportio.	6	6	6

HOC enim exemplum monſtrat, quintuplam proportionem reuocatam eſſe ad quadruplam, quadruplam ad triplam, triplam ad duplam, & denique duplam ad æqualitatem. In hoc altero verò exemplo vides proportionem ſupertripartientem quartas reduci ad ſeſquitertiam, ſeſquitertiam ad triplam, triplam ad duplam, ac duplam denique ad æqualitatem.

Propo-

Proportio ſupertripartiens quartas.	49	28	16
Seſquitertia.	9	12	16
Tripla.	9	3	1
Dupla.	4	2	1
Proportio æqualitatis.	1	1	1

VIDES ergo vltimam proportionem inæqualitatis ſemper eſſe duplam, hanc verò ſtatim ad æqualitatem reduci.

EST autem animaduerſione dignum, ſi tres numeri dati fuerint in ſua proportione minimi, proportionem æqualitatis, ad quam fit reductio, conſiſtere in tribus vnitatibus: Si verò non fuerint minimi, proportionem illam æqualitatis conſiſtere in tribus numeris æqualibus, quorum quilibet tot vnitates continet, quotum locum occupant tres termini dati inter omnes tres terminos eiuſdem generis proportionis. Ita vides in poſteriori exemplo tres datos numeros 49. 28. 16. minimos eſſe in proportione ſupertripartiente quartas, atque reductionem factam eſſe ad hanc æqualitatem, 1. 1. 1. At in priori exemplo occupant tres numeri dati, 150. 30. 6. ſextum locum inter omnes tres numeros continua proportionis quintupla, propterea que æqualitas inuenta eſt inter hos tres ſenarios, 6. 6. 6. Minimi enim ſiue primi numeri quintupla proportionis ſunt, 25. 5. 1. Secundi, 50. 10. 2. Tertij, 75. 15. 3. Quarti, 100. 20. 4. Quinti 125. 25. 5. Sexti autem, 150. 30. 6. vt manifeſtum eſt. Idem experiri licebit in omnibus aliis proportionibus.

SED & hoc obſeruatione non indignum videtur, quamlibet proportionem primo loco ad eam reduci, ex qua ortum habuit. Vt in priori exemplo quintupla reducta eſt ad quadruplam, ex qua orta eſt: quadrupla ad triplam. Hæc enim illam genuit, & ſic de cæteris, vſque ad æqualitatem. In exemplo verò poſteriori, Supertripartiens reuocata eſt ad ſeſquitertiam ordine inuerſo. Conſtat autem, numeros ſeſquitertios conuerſo ordine gignere ſupertripartientes, vt ſupra diximus. Item ſeſquitertia hæc, conferendo maiores numeros cum minoribus, reducta eſt ad triplam ordine inuerſo, quemadmodum tripla inuerſa generat ſeſquitertiam. Deinde tripla, conferendo maiores item numeros cum minoribus, redacta eſt ad duplam, & hæc ad æqualitatem, &c.

NEQVE verò ſilentio prætereundum cenſeo, ex tribus terminis cuiuſcunque proportionalitatis Geometricæ, ſiue ea æqualitatis ſit, ſiue inæqualitatis, gigni poſſe quamlibet trium proportionalitatum, quas ſupra explicauimus, ſi ipſi termini variis modis inter ſe coagmententur. Proportionem enim trium terminorum Geometricam procreare aliam Geometricam trium terminorum, ſi primus terminus ſemel, ſecundus bis, & tertius ſemel pro primo termino ſumatur; pro ſecundo

 autem

autem ſecundus, & tertius ſemel, pro tertio deniq; ipſe tertius ſemel, perſpicuè conſtat ex iis, quæ paulo ante ſcripſimus de ortu omnium proportionum inæqualitatis ex æqualitatis proportione.

AT verò vt ex eadem Geometrica proportionalitate gignatur Arithmetica trium terminorum, ſeruabis hoc præceptum triplex.

SVMMAM ex primo, & ſecundo termino bis, & tertio ſemel collectam fac primum terminum Arithmeticæ proportionalitatis.

SVMMAM verò ex primo, ſecundo, & tertio ſemel confectam, ſtatue ſecundo loco.

TERTIVM denique terminum conſtitue tertium.

Cuius quidem productionis typum hic vides.

TYPVS PROCREATIONIS PROportionis Arithmeticæ ex Geometrica.

Ordo terminorum datæ proportionalitatis.	Primus	Secundus	Tertius.
Primus fit ex datis term. ita coaceruatis.	Bis.	Bis.	Semel.
Secundus vero fit.	Semel.	Semel.	Semel.
Tertius denique hoc modo.			Semel.

NIHIL porrò intereſt, vtrum minimum numerum proportionalitatis Geometricæ facias primum terminum, an verò maximum, vt ex ſequentibus exemplis apparebit.

GENERATIO ARITHMETICÆ PROportionalitatis ex Geometrica.

Geomet. prop.	1	1	1	4	4	4	9	6	4	4	6	9
Arith. propor.	5	3	1	20	12	4	34	19	4	29	19	9

CONSIDERATIONE autem digniſſimum eſt, differentiam conſtitutæ proportionalitatis Arithmeticæ ſemper æqualem eſſe ſummæ primorũ duorum terminorum Geometricæ proportionalitatis, per quam conſtituitur. Sic vides in primo exemplo differentiam eſſe 2. ſummam ex 1. 1. In ſecundo, 8. ſummam ſcilicet ex 4. 4. In tertio 15. quæ ſumma conficitur ex 9. 6. In quarto denique, 10. nimirum ſummam ex 4. 6. collectam, atque ita in aliis.

ITAQVE ſi Arithmetica proportionalitas conſtituatur ex proportione æqualitatis, erit differentia dupla vnius termini æqualis: vt perſpicuum eſt in prioribus duobus exemplis.

DENI-

DENIQVE Harmonicam proportionalitatem oriri quoque ex Geometrica, hoc alio precepto tripliciplanum fiet.

SVMMAM collectam ex primo bis, & ſecundo ter,& tertio ſemel ſumpto, ſtatue in primo loco proportionalitatis Harmonicæ.

SVMMAM vero confectam ex ſecundo bis,& tertio ſemel ſumpto,in ſecundo loco.

SVMMAM deniq; ſecundi & tertij, in tertio loco.

VBI etiam nihil intereſt, Vtrum minimus terminus dicatur primus, Vel maximus. Typum porrò huius generationis hic expreſſum Vides.

TYPVS PROCREATIONIS HARmonicæ proportionalitatis ex Geometrica.

Ordo terminorum proportionalitatis.	Primus	Secundus	Tertius
Primus fit ex ter. datis ſic in vnum collect.	Bis	Ter	Semel
Secundus vero ſic.		Bis	Semel
Tertius denique hoc modo.		Semel	Semel

GENERATIO PROPORTIONALItatis Harmonicæ ex Geometrica.

Geomet. propor.	1	1	1	4	4	4	9	6	4	4	6	9
Harmo. propor.	6	3	2	24	12	8	40	16	10	35	21	15

IAM Verò è contrario reducetur Harmonica proportionalitas quæcunque ad æqualitatem hoc pacto.

DETRAHE minimum terminum ex medio, & quod relinquitur, fac medium terminum proportionalitatis conſtituendæ.

HOC medio inuento ſublato ex minimo datæ proportionalitatis Harmonicæ, erit reliquus numerus, vnum extremorum proportionalitatis.

DENIQVE minimus datus ſemel, & medius inuentus bis in vnam ſummam collecti,& ex maximo dato ſubtracti, dabunt duplum alterius extremi. Semiſſis ergo huius erit ipſum alterum extremum.

Digitized by Google

HAC ratione reuocabitur Harmonica proportionalitas vel ad æqualitatem, vel ad proportionalitatem aliquam Geometricam, quæ ad æqualitatem redigetur, vt ſupra docuimus. Semper autem Harmonica proportionalitas propoſita oritur ex illa Geometrica, ſi ſuperius præceptum adhibeatur, ad quam per hoc præceptum reuocata eſt. Exempla hic vides.

Harm. propor.	6	3	2	24	12	8	40	16	.0	35	21	15
Geom. propor.	1	1	1	4	4	4	9	6	4	4	6	9

ALIA EXEMPLA.

Harmon. propor.	3	4	6	60	40	30	24	16	12
Geometr. propor.	2	1	$\frac{1}{2}$	5	10	20	2	4	8
Æqualitas.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5	5	5	2	2	2

AT proportionalitas Arithmetica reuocabitur ad æqualitatem, vel ad Geometricam proportionalitatem, per quam conſtituitur, hoc modo.

MINIMVM terminum fac vnum extremorum. Subducto deinde eodem minimo ex medio, erit reliquus numerus conflatus ex medio conſtituendæ proportionalitatis, & altero extremo. Igitur ſi hic numerus reliquus duplus eſt minimi, ſecto eo bifariam, erit dimidiata pars tam medius terminus, quam alterum extremorum; reductaque erit data proportionalitas Arithmetica ad æqualitatem, ex qua ortum traxit.

3	9	15
3	3	3

VT detur Arithmetica proportionalitas, 3. 9. 15. ſi in Geometrica conſtituenda facias vnum extremum 3. ex minimo proportionalitatis Arithmeticæ datæ, & hunc eundem numerum demas ex dato medio 9 ſupererunt 6 qui numerus duplus eſt minimi 3. Redigitur ergo data proportionalitas ad æqualitatem hanc 3. 3. 3. ex qua oritur ſecundum ſuperius præceptum.

SI verò reliquus ille numerus non eſt duplus minimi, ſecandus erit in duas partes, quæ cum minimo conſtituant proportionalitatem Geometricam continuam. Ad hanc enim illa reuocata erit.

34	19	4
9	6	4

VT ſi data ſit Arithmetica proportionalitas, 34. 19. 4. Facto in Geometrica extremo vno, 4. minimo datæ Arithmeticæ proportionalitatis, eoque ſubducto ex medio 19.

Digitized by Google

dio 19. relinquitur numerus 15. qui non eſt duplus minimi. Quare ſecto eo in 6. & 9. reducetur illa Arithmetica ad hanc Geometricam 9. 6, 4. ex qua rurſus ortum ducet, ex præſcripto ſuperioris præcepti.

SED quoniam reliquus ille numerus non poteſt ſemper diuidi in tales duas partes, quæ cum minimo conſtituant continuam proportionalitatem Geometricam, (quo pacto autem ea diuiſio facienda ſit, & quando fieri in numeris nequeat, docebimus ad propoſ. 17. lib. 6.) niſi numeri ſurdi, irrationaleſue adſciſcantur; reuocabimus quamcunque proportionalitatem Arithmeticam ſtatim ad æqualitatem, ex qua, ſi termini æquales cum differentia propoſita coacervuentur, ortum duxit; hoc pacto.

MINIMVS terminus datus fiat vnus ex duobus extremis. Differentia autem proportionalitatis ſubducta ex medio, reliquus numerus fiat medius: & eadem differentia duplicata, atque ex maximo termino ſublata, fiat reliquus numerus alter extremorum.

20	27	34
20	20	20

VT ſi data ſit Arithmetica proportionalitas, 20. 27. 34. cuius differentia eſt 7. ſi 20 fiat vnum extremorum, & differentia 7. demátur ex 27. & eadem duplicata ex 34. reliqui erunt alij duo termini æquales, 20. 20. Ex hac æqualitate, cognita differentia 7. quam termini Arithmeticæ proportionalitatis habere debent, conficietur ipſa proportionalitas Arithmetica, hac ratione.

VNVS terminorum æqualium fiat minus extremum. Huic addatur differentia data, vt fiat ſecundus terminus. Eidem deniq; minori extremo adiiciatur data differentia duplicata, vt efficiatur maius extremum.

VT in dato exemplo, minus extremum erit 30. cui ſi differentia 7. addatur, fiet medius terminus 27. Et ſi eadem differentia 7. duplicata adiiciatur eidem minimo extremo 20. conflabitur maius extremum 34. Eodem pacto data hac æqualitate 15. 15. 15. ſi ex ea conſtitui debeat proportionalitas Arithmetica, cuius differentia ſit 20. addatur hæc differentia ad 15. vnum terminorum æqualium, vt habeat ſecundum terminum 35. Quòd ſi eadem differentia duplicata, hoc eſt, numerus 40. ad eundem terminum æqualem adiiciatur, fiet tertius terminus, 55. Primus autem eſt 15. vnus terminorum æqualium, vt hic vides.

Differentia 20.

15	15	15
15	35	55

ATQVE pauca hæc prælibaſſe hoc loco ſufficiat ex infinitis, quæ de immenſa proportionum, proportionalitatumque vi ac natura, innumerabilibuſque proprietatibus dici poſſent. Plura enim & quidem ſcitu periucunda in pleniore noſtra Arithmetica, Deo annuente, explicabimus. Nunc ad Euclidem interpretandum reuertamur.

V.

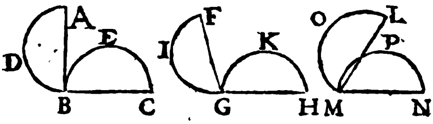
RATIONEM habere inter ſe magnitudines dicuntur, quæ poſſunt multiplicatæ ſe ſe mutuo ſuperare.

QVONIAM Euclides in tertia definitione habitudinem duarum magnitudinum eiuſdem generis, vocauerat rationem, quam nos cum aliis auctoribus proportionem dicimus; explicat nunc definitione hac 5. quidnam requirant duæ quantitates eiuſdem generis, vt proportionem dicantur habere. Neque enim omnes lineæ, neque etiam omnes anguli plani, quamuis ſint eiuſdem generis quantitatis, proportionem habent inter ſe, vt mox dicemus. Ait igitur, illas magnitudines dici proportionem habere inter ſe, quarum vtrauis multiplicata ita augetur, vt alteram tandem ſuperet, adeo vt ſi alterutra quantumuis multiplicata nunquam alteram excedat, nulla ratione proportionem habere dicantur. Vt diameter, & latus eiuſdem quadrati, dicentur habere proportionem; (licet irrationalem, quæ nullo poſſit numero exprimi) quia latus multiplicatum per 2. hoc eſt, bis ſumptum, excedit diametrum. Cum enim duo latera quadrati, ac diameter conſtituant triangulum Iſoſceles, a erunt duo latera quadrati diametro eiuſdem maiora. Ita quoque circumferentia circuli, & diameter eiuſdem, proportionem habent, (quamuis nondum ſit nobis explorata, atq; cognita) quia diameter multiplicata per 4. hoc eſt, ſumpta quater, circumferentiam ſuperat, cum omnis circumferentia circuli, vt ab Archimede demonſtratur, ter duntaxat comprehendat diametrum eiuſdem, & particulam adhuc paulo minorem ſeptima parte diametri. Eodem modo multa curuilinea cum rectilineis proportionem habebunt, quia & æqualitas & inæqualitas inter ea reperitur, cum & Hippocrates Chius Lunulam quandam, quæ figura eſt contenta duobus arcubus circulorum inſtar Lunæ nouæ, quando falcata eſſe cernitur; & Archimedes parabolam quadrarit; hoc eſt, ille cuidam lunulæ, hic verò parabolæ quadratum inuenerit æquale. Hinc enim fit, vt & quadratum detur maius ea lunula, ac parabola; Atque è contrario lunula & parabola maior eo quadrato. Huc accedit, quod Archimedes in lib. de Spiralibus demonſtrauit, lineam aliquam rectam eſſe circumferentiæ circuli æqualem, & aliam duplam, triplam aliam, &c. ac proinde & quadratum aliquod circulo eſſe æquale, vt in libello de dimenſione circuli demonſtrauit. De æqualitate porrò lineæ rectæ, & circularis; quadrati, & circuli, ad calcem lib. 6.

a 20. primi.

Digitized by Google

lib. 6. agemus. Adde, à Proclo quoque inter angulos rectilineos, ac curuilineos æqualitatem demonſtrari. Oſtendit enim lib. 3. in primum Euclidis, ad 12. Axioma, quod ipſi eſt 4. Poſtulatum, tam recto angulo, quam obtuſo, & acuto, exhiberi poſſe angulum curuilineum æqualem. Sit enim angulus rectus A B C, contentus rectis æqualibus A B, B C, circa quas ſemicirculi deſcribantur A D B, B E C. Quoniam igitur anguli ſemicirculorum A B D, C B E, ſunt æquales; addito communi angulo mixto A B E, fiet angulus totus curuilineus D B E, toti angulo recto A B C, æqualis. Similiter oſtendes, angulum curuilineum I G K, æqualem eſſe obtuſo F G H; nec non



curuilineum O M P, acuto L M N, dummodo hic ab angulis ſemicirculorum L M O, N M P, auferas communem angulum mixtum, qui continetur recta linea L M, & curua M P. Ex quibus conſtat, alterutrum angulorum multiplicatum poſſe alterum excedere; quare proportionem inter ſe habebunt. At vero linea finita ad lineam infinitam non habebit proportionem, quia finita quomodocunque multiplicata, infinitam nequit ſuperare. Sic neque linea cum ſuperficie, neque ſuperficies cum corpore, eandem ob cauſam, vllam habebit proportionem. Denique non cenſebitur habere proportionem angulus contactus cum angulo rectilineo, quia angulus contactus, quantumuis multiplicatus, minor adhuc ſemper exiſtit quouis angulo rectilineo, etiam minimo, vt propoſ. 16. lib. 3. demonſtrauimus. Itaque vt apertius Euclides explicaret, quanam magnitudines eiuſdem generis proportionem dicantur habere, hoc eſt, quas magnitudines eiuſdem generis in definitione 3. intellexerit, voluit hac definitione eas intelligi, quæ hanc conditionem habeant, vt alterutra multiplicata alteram poſſit ſuperare, alias verò non, etiamſi in eodem quantitatis genere videantur comprehendi, quales ſunt linea finita, & infinita, angulus rectilineus, & angulus contactus, &c. Hanc ob cauſam in pleriſque demonſtrationibus proportionum, iubet toties multiplicare vnam propoſitarum magnitudinum, quæ proportionem ponuntur habere inter ſe, donec alteram excedat. Quod etiam facit propoſ. 1. lib. 10. & in pleriſque aliis propoſitionibus. Taceant igitur, qui putant, per magnitudines eiuſdem generis in definitione Proportionis, quam Euclides Rationem dixit, intelligendas eſſe, quæ ſub eodem genere proximo, ſiue infimo continentur. Hac enim ratione non eſſet proportio inter angulos rectilineos, & curuilineos, aut inter figuras rectilineas, curuilineaſque, cum non ſub eodem contineantur genere proximo: quod falſum eſſe diximus. Sileant quoque, qui exiſtimant, intelligendas eſſe magnitudines

Digitized by Google

in eodem genere quantitatis, ſiue in eodem genere ſubalterno, vt Logici loquuntur; ita vt ſatis ſit, vt duæ quantitates dicantur habere proportionem, ſi ſint vel lineæ, vel ſuperficies, vel corpora, vel anguli, vel numeri. Ita enim proportio eſſet inter angulum rectilineum, & angulum contactus, cum in genere anguli contineantur: Item proportionem haberent inter ſe, linea finita, & linea infinita, cum in genere lineæ exiſtant: quorum vtrumque falſum eſſe, liquido ex hac definitione conſtat.

PERSPICVVM eſt ex his, quam ineptè, & quàm falſò, hanc definitionem expoſuerit Orontius. Ait enim Euclidem non definire, ſeu docere, quænam magnitudines proportionem dicantur habere, ſed qualem proportionem duæ quæcunq; propoſitæ quantitates habeant. Itaque, inquit, vult Euclides, ſi magnitudo A, ad magnitudinem B, referatur, & ambæ multiplicentur æqualiter, hoc eſt, ambarum ſumantur quæcunque æque multiplicia, nempe C, tam multiplex ipſius A, quam multiplex D, ipſius B; habere magnitudines A, & B, eam inter ſe proportionem, quam earum æque multiplicia C, & D. Non aduertit autem, hoc, quod ait, non eſſe definitionem, ſed Theorema decimumquintum huius 5. lib. vbi demonſtratur ab Euclide, Partes cum pariter multiplicibus in eadem proportione eſſe, hoc eſt, A, B, magnitudines eandem habere proportionem, quam earũ æque multiplicia C, & D. Non ergo ita eſt intelligenda hæc definitio, præſertim cum tam ignota ſit hæc proportio inter C, & D, quam illa inter A, & B; quandoquidem ſemper eadem eſt. Quare non rectè nos Euclides perduceret ad notitiam proportionis inter A, & B. Eſt ergo ſenſus huius definitionis ille, quem expoſuimus, vt liquido conſtat ex verbis Euclidis.



VI.

IN eadem ratione magnitudines dicuntur eſſe, prima ad ſecundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æque multiplicia, à ſecundæ & quartæ æque multiplicibus, qualiſcunque ſit hæc multiplicatio, vtrumque ab vtroque vel vna deficiunt, vel vna æqualia ſunt, vel vna excedunt; ſi ea ſumantur, quæ inter ſe reſpondent.

EXPLICAT hoc loco Euclides, quaſnam conditiones requirant, apud Geometras, magnitudines, vt eandem dicantur habere proportionem. Quod vt exequatur, cogitur confugere ad earum æquemultiplicia, vt complectatur omnes proportiones magnitudinum, tam rationales, quam irrationales. Sint igitur quatuor magnitudines A, prima; B, ſecunda; C, tertia; & D, quarta, ſumanturq; prima, &

tertia

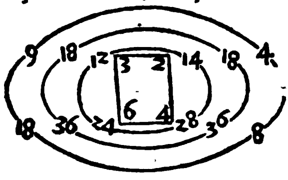
tertia æquè multiplicia quæcunque; E, quidem ipſius A; & F, ipſius C: Item ſumantur ſecunda, & quarta alia quæcunque æquè multiplicia; G, quidem ipſius B; & H, ipſius D, ſiue hæc duo poſteriora ſint ita multiplicia ſecundæ, & quartæ, ſicut priora duo multiplicia ſunt primæ, & tertiæ, ſiue non. Quòd ſi iam inter ſe conferantur ſumpta æquè multiplicia eo, quæ inter ſe reſpondent, vt multiplex primæ, & multiplex ſecundæ inter ſe, hoc eſt, E, & G; Item multiplex tertiæ, & multiplex quartæ inter ſe, hoc eſt, F, & H; deprehenſumq; fuerit perpetuò, ea inter ſe habere, vt ſi E, multiplex primæ magnitudinis A, minus fuerit, quàm G, multiplex ſecundæ magnitudinis B; etiam F, multiplex tertiæ magnitudinis C, minus ſit quàm H, multiplex quartæ magnitudinis D: Aut ſi E, æquale fuerit ipſi G; etiam F, æquale ſit ipſi H: Aut denique ſi E, maius fuerit quàm G; etiam F, maius ſit quàm H: (quod eſt vtrumque ab vtroque vel vnà deficere, vel vnà æqualia eſſe, vel vnà excedere) ita vt in nullo genere multiplicium contrarium poſſit reperiri, id eſt, vt nunquam E, minus ſit quàm G, quin & F, minus ſit quàm H; & vt nunquam E, æquale ſit ipſi G, quin & F, ipſi H, ſit æquale. Denique vt nunquam E, maius ſit quàm G, quin & F, maius ſit quàm H. Si, inquam, deprehenſum fuerit, æquè multiplicia quæuis accepta, perpetuò ſeſe ita habere, vt dictum eſt; dicetur eadem eſſe proportio primæ magnitudinis A, ad ſecundam magnitudinem B, quæ eſt proportio tertiæ magnitudinis C, ad quartam magnitudinem D. Quòd ſi deprehenderetur aliquando, etiam in ſolo vno genere multiplicium, multiplex D, deficere à multiplici G, non autem multiplex E, deficere à multiplici H; Aut E, æquale eſſe ipſi G, at F, non æquale ipſi H; Aut denique E, excedere ipſum G, at F, non excedere ipſum H, quamuis in infinitis alijs multiplicibus conditio prædicta reperiatur, nulla ratione dicentur quantitates propoſitæ eandem habere proportionem, ſed diuerſas, vt ex defin. 8. fiet perſpicuum.



ITAQVE vt demonſtratione aliqua, per hanc 6. definitionem, concludantur quatuor quantitates eandem habere proportionem, oſtendendum erit, (quod quidem diligenter ab Euclide & hoc 5. lib. & in alijs ſeruatur) quæcunque æquè multiplicia primæ, & tertiæ collata cum quibuſcunque æquè multiplicibus ſecundæ, & quartæ, habere ſemper conditionem prædictam defectus, æqualitatis, aut exceſſus; ita vt nunquam contrarium eius inueniri poſſit. Similiter ſi quatuor quantitates concedantur eandem habere proportionem, concedatur quoq; neceſſe eſt, quælibet æquè multiplicia primæ, & tertiæ collata cum quibuslibet æquè multiplicibus ſecundæ, & quartæ, habere eandem defectus, æqualitatis, aut exceſſus conditionem. Debent enim definitio & definitum reciprocari. Vt autem perſpiciatur, quonam pacto, propoſitis quatuor magnitudinibus eandem proportionem

Digitized by Google

habentibus: quædam æquè multiplicia primæ, & tertiæ magnitudinis, à quibuſdam æquè multiplicibus ſecundæ & quartæ magnitudinis, vtrumque ab vtroque vnà deficiant; alia verò vnà æqualia ſint; alia denique vnà excedant, ſi ea ſumantur, quæ inter ſe reſpondent; placet vnum exemplum proferre in numeris. Sint igitur quatuor numeri 3. 2. 6. 4. ſumanturq; primi & tertij æquè multiplices, nempe quadrupli 12. & 24. Item ſecundi & quarti ſumantur alij æquè multiplices, vt ſeptupli 14. & 28. Vides igitur tum 12. multiplicem primi deficere à 14. multiplice ſecundi, quam 24. multiplicem tertij à 28. multiplice quarti. Rurſus primi, & tertij ſumantur alij

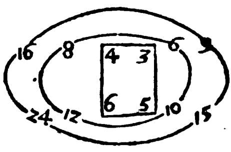


æquè multiplices, nimirũ ſextupli, 18. & 36. Item ſecundi, & quarti ſumantur alij æquè multiplices, vt noncupli 18. & 36. Vides ergo, tum 18. multiplicem primi æqualem eſſe 18. multiplici ſecundi, quam 36. multiplicem tertij, 36. multiplici quarti. Poſtremò primi, & tertij ſumantur alij æquè multiplices, nempe tripli 9. & 18. Item ſecundi, & quarti alij æquè multiplices, vt dupli 4. & 8. Vides igitur tum 9. multiplicem primi, excedere 4. multiplicem ſecundi, quam 18. multiplicem tertij, ſuperare 8. multiplicem quarti. Si igitur in omnibus æquè multiplicibus, in quacunque ſumantur multiplicatione, ſemper deprehendatur, vnum trium horum verum eſſe, dicetur eadem eſſe proportio 3. ad 2. quæ eſt 6 ad 4. alias non.

CAMPANVS verò atque Orontius, longè aliter definitionem hanc exponunt. Dicunt enim Euclidem velle, tum demum quatuor magnitudines eandem habere proportionem, cùm prima, & tertia æquè multiplicia, à ſecunda & quarta æquè multiplicibus, vtrumque ab vtroque, vel vnà deficiunt proportionaliter, hoc eſt, in eadem proportione, vel vnà æqualia ſunt, vel vnà excedunt proportionaliter, ſi ea ſumantur, quæ inter ſe reſpondent. Clarius, vt ait Campanus, quando earum æquè multiplicia proportionalia ſunt, id eſt, cùm eandem proportionem habet multiplex primæ ad multiplicem ſecundæ, quam multiplex tertiæ ad multiplex quartæ. Sed quis non videt, ſi ita intelligatur definitio, Euclidem idem per idem definire? Quod ſanè abſurdum eſt. Præterea ſi Euclides vult, eas magnitudines in eadem eſſe proportione, quarum æquè multiplicia (ſi ſumantur, & inter ſe conferantur eo ordine, quo dictum eſt) in eadem proportione exiſtunt; cur, obſecro, in 4. Theoremate huius libri demonſtrat, ſi fuerint quatuor magnitudines in eadem proportione, earum æquè multiplicia eo ordine, quem diximus, ſumpta, eandem quoque habere proportionem? Immò cùm illud Theorema per hanc definitionem oſtendatur, perſpicuum eſt, idem per idem demonſtrari, quod ridiculum

lum eſt, veluti eo loco admonebimus. Accedit etiam, ſi ita interpretemur definitionem, plurima Theoremata quinti huius lib. non poſſe demonſtrari, vt proprijs locis monebimus. Intelligenda eſt igitur definitio, vt expoſuimus; nimirum propoſitis quatuor magnitudinibus, ſi quotieſcunque multiplex primæ deficit a multiplici ſecundæ, vel æquale eſt, vel excedit; neceſſario etiam multiplex tertiæ tunc deficiat à multiplici quartæ, vel æquale ſit, vel excedat, quicunque ſit ille defectus, exceſſuſve, non conſiderando, an proportionalis ſit, an non; ita vt nunquam contingat, multiplicem primæ à multiplici ſecundæ deficere, multiplicem verò tertiæ non deficere à multiplici quartæ: aut multiplicem primæ æqualem eſſe multiplici ſecundæ, multiplicem verò tertiæ multiplici quartæ non æqualem: aut denique multiplicem primæ maiorem eſſe multiplice ſecundæ, at multiplicem tertiæ multiplici quartæ non maiorem. Propoſitis, inquam, quatuor magnitudinibus, quarum æque multiplicia ſumpta, vt dictum eſt, perpetuò eam conditionem in defectu, æqualitate, & exceſſu ſeruant, dicuntur quatuor illæ magnitudines eandem habere proportionem; quicquid ſit de earum æque multiplicium proportione, quæ nunc non conſideratur: ſed quarto poſtea Theoremate demonſtrabitur, eum defectum, exceſſumve eſſe proportionalem.

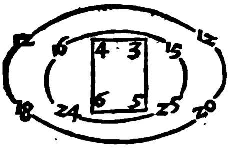
PORRO Campanus conatur oſtendere, definitionem hanc intelligi debere de proportionali defectu, & exceſſu. Nam ſi de quocunque intelligeretur, eſſent, ait, quatuor hi numeri 4. 3. 6. 5. in eadem proportione. Si enim primi & tertij, vtpote 4. & 6. ſumantur æque multiplices numeri, vt dupli, 8 & 12. Item ſecundi & quarti nempe 3. & 5. æque multiplices, dupli quoque, 6. & 10. excedet tam 8. multiplex primi, 6. multiplicem ſecundi, quam 12. multiplex tertij 10. multiplicem quarti. Idemque cernitur, ſi primi, & tertij ſumantur quadrupli 16. & 24. ſecundi verò, ac quarti capiantur tripli 9. & 15.



Si igitur ſufficit, vt æque multiplicia accepta vnà excedant ſeſe quomodocunque, & non requiritur, vt proportionaliter ſe mutuò ſuperent, erit eadem proportio 4. ad 3. quæ eſt 6. ad 5. quod falſum eſt, cùm proportio 4. ad 3. ſit ſeſquitertia, proportio verò 6. ad 5. ſeſquiquinta. Intelligendus igitur eſt defectus, aut exceſſus æque multiplicium, proportionalis: Ita enim fiet, non eſſe eandem proportionem 4. ad 3. quæ eſt 6. ad 5. quod eorum æque multiplices non ſeſe excedant proportionaliter, vt conſtat. Veruntamen dicendum eſt, Campanum mirum in modum hallucinatum fuiſſe. Quamuis enim numeri æque multiplices ab eo prolati ſeſe vnà excedant, tamen quàm plurimi alij reperientur, quorũ multiplex primi exce-

Digitized by Google

excedet quidem multiplicem ſecundi, vel æqualis erit; at multiplex tertij deficiet à multiplice quarti. Si enim in eius exemplo, primi & tertij ſumantur quadruplices 16. & 24. At ſecundi & quarti, quintuplices ſumantur, 15. & 25. excedet quidem 16. multiplex primi, 15. multiplicem ſecundi; At 24. multiplex tertij non excedet 25. multiplicem quarti, ſed deficiet. Quod ſi primi, & tertij ſumantur tripli 12. & 18. At ſecundi, & quarti ſumantur quadrupli, 12. & 20. erit 12. multiplex primi æqualis 12. multiplici ſecundi; At verò 18. multiplex tertij, æqualis non erit 20. multiplici quarti, ſed ab eo deficiet. Cùm igitur non deprehendantur quælibet æquè multiplicia dictorum numerorum ſic ſe habere, vt ſi multiplex primi excedit multiplex ſecundi, multiplex tertij excedat quoque neceſſariò multiplex quarti; quamuis id in nonnullis æquè multiplicibus ita eſſe contingat: non dicentur, iuxta hanc definitionem 6. dicti numeri eandem habere proportionem, vt adhuc clarius ex 8. definitione conſtabit.

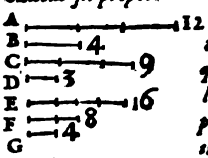


CÆTERVM definitio iſta complectitur etiam tres magnitudines eandem habentes proportionem, ſi modò ſecunda bis ponatur, vt quatuor habeantur. Exempli cauſa; Eadem dicetur proportio 9 ad 6. quæ 6. ad 4. quoniam æquè multiplicia quæcunque ſumpta ad 9. & 6. vel vnà deficiunt ab æquè multiplicibus ſumptis ad 6. & 4. vel æqualia ſunt, vel vnà excedunt, &c.

VII.

EANDEM autem habentes rationem magnitudines, Proportionales vocentur.

VT ſi magnitudinum A, B, C, D, eadem ſit proportio A, ad B, quæ C, ad D; dicentur eæ magnitudines proportionales. Eadem ratione, ſi eadem ſit proportio E, ad F, quæ F, ad G, dicentur magnitudines E, F, G, proportionales. Sunt autem quædam magnitudines proportionales continuè, inter quas reperitur proportionalitas continua, quales ſunt magnitudines E, F, G: Quædam verò proportionales ſunt nõ continuè, ſed diſcretè, cuiuſmodi ſunt magnitudines A, B, C, D. In his enim interruptio fit proportionum; in illis verò nequaquam, vt dictũ eſt in 4. definitione.



VIII.

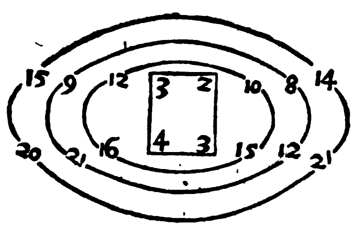
CVM verò æquè multiplicium multiplex primæ magnitudinis exceſſerit multiplicem ſecundæ; At multiplex

tiplex tertiæ non exceſſerit multiplicem quartæ; tunc prima ad ſecundam maiorem rationem habere dicetur, quam tertia ad quartam.

DECLARAT hic Euclides, quamnam conditionem habere debeant quatuor magnitudines, vt maiorem dicatur habere proportionem prima ad ſecundam, quam tertia ad quartam, dicens. Si ſumptæ ſint æquè multiplicia primæ & tertiæ, Item alia æquè multiplicia ſecundæ & quartæ; deprehenſumq; fuerit aliquando, (licet non ſemper) multiplex primæ maius eſſe multiplice ſecundæ, multiplex autem tertiæ non eſſe maius multiplice quartæ, ſed vel minus, vel æquale; dicetur maior eſſe proportio primæ magnitudinis ad ſecundam, quam tertiæ ad quartam; vt perſpicuum eſt in appoſito exemplo, in quo primæ magnitudinis A, & tertiæ C, ſumptæ ſunt triplicia E, & F; ſecundæ verò B, & quartæ D, quadruplicia G, & H. Et quoniam E, multiplex primæ maius quidem eſt quàm H, multiplex ſecundæ; At F, multiplex tertiæ maius non eſt quàm H, multiplex quartæ, immò minus; dicetur maior eſſe proportio A, primæ magnitudinis, ad B, ſecundam, quam C, tertiæ ad D, quartam.



NON eſt autem neceſſe, vt quatuor magnitudinum, prima ad ſecundam dicatur maiorem habere proportionem, quàm tertia ad quartam, æquè multiplicia ſecundum quamuis multiplicationem ſic ſe habere, vt multiplex quidem primæ excedat multiplex ſecundæ, at multiplex tertiæ non excedat multiplex quartæ; ſed ſatis eſt, vt ſecundum aliquam multiplicationem ita ſe habeant. Poteſt namque interdum fieri, vt tam multiplex primæ maius ſit multiplice ſecundæ, quàm multiplex tertiæ multiplice quartæ: Item vt & multiplex primæ minus ſit multiplice ſecundæ, & multiplex tertiæ multiplice quartæ: Tamen quia hoc non contingit in omni multiplicatione, ſed aliquando multiplex primæ ſuperat quidem multiplex ſecundæ, at multiplex tertiæ vel minus eſt, vel æquale multiplici quartæ: propterea maiorẽ dicetur habere proportionem prima magnitudo ad ſecundam, quàm tertia ad quartam, non autem eandem, vt perſpicuum eſt in appoſito exemplo.



ITAQVE vt quatuor magnitudines dicantur proportionales, neceſſe eſt, vt æquè multiplicia earum, iuxta quaſuis multiplicationes acceptæ,

vel

vel vnà deficiant, vel vnà æqualia ſint, vel vnà excedant, vt in 6. deſin. fuit expoſitum: Vt autem maiorem dicatur habere proportionem prima ad ſecundam, quam tertia ad quartam, ſatis eſt, vt ſecundum aliquam multiplicationem, multiplex prima excedat multiplex ſecunda, multiplex verò tertia non ſuperet multiplex quarta, quamuis iuxta innumeras alias multiplicationes, æque multiplicia prima, ac tertia vnà excedant æque multiplicia ſecunda, & quarta.

QVOD ſi quando è contrario multiplex prima deficiat à multiplici ſecunda, non autem multiplex tertia à multiplici quarta, dicetur prima magnitudo ad ſecundam minorem habere proportionem, quam tertia ad quartam: quamuis ſecundum plurimas alias multiplicationes, æque multiplicia prima & tertia vnà deficiant ab æque multiplicibus ſecunda, & quarta. Vt in eiſdem numeris propoſiti exempli, minor dicetur proportio 2. ad 3. quàm 3. ad 4. &c.

CVR EVCLIDES IN DEFIN. VI. ET VIII. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum æquè multiplicia definierit.

QVONIAM mirum alicui videri poſſit, cur Euclides tum demum quatuor magnitudines eandem dixerit habere proportionem, hoc eſt, ita eſſe primam ad ſecundam, vt eſt tertia ad quartam, cùm æque multiplicia prima ac tertia iuxta quamcunque multiplicationem, & æque multiplicia ſecunda ac quarta iuxta quamcunque etiam multiplicationem accepta ita ſe habent, vt quotieſcunque multiplex prima maius eſt quàm multiplex ſecunda, multiplex quoque tertia maius ſit quàm multiplex quarta; quotieſcunque verò multiplex prima æquale eſt multiplici ſecunda, multiplex etiam tertia æquale ſit multiplici quarta; quotieſcunque denique multiplex prima minus eſt quàm multiplex ſecunda, multiplex etiam tertia minus ſit quàm multiplex quarta: Item quare tum demum quatuor magnitudinum prima ad ſecundam maiorem eſſe proportionem voluerit, quàm tertia ad quartam, cùm aliqua æque multiplicia prima ac tertia, & alia æque multiplicia ſecunda ac quarta accepta ita ſe habent, vt multiplex prima ſit maius quàm multiplex ſecunda, at multiplex tertia maius non ſit, quàm multiplex quarta, ſed vel æquale, vel minus. Quoniam, inquam, mirum alicui videri hoc poſſit, quòd ex illo exceſſu, æqualitate, & defectu æque multiplicium eo ordine ſumptorum non ſtatim appareat ſimilitudo proportionum, diſſimilitudóve: aperiendum videtur hoc loco, quare ita magnitudines tum proportionales, tum non proportionales definire voluerit Euclides.

AD hanc difficultatem reſpondetur, Euclidem eas magnitudines voluiſſe appellare proportionales, quarum æque multiplicia ita ſe habent,

habent, vt dictum eſt, quia non habuit quid notius, per quod explicare potuiſſet magnitudines tam incommenſurabiles, quàm commenſurabiles eandem proportionem, vel non eandem habentes: neq; verò opus eſſe, vt ratio afferatur, cur res aliqua hoc aut illo modo definiatur, ſed ſatis eſſe, vt nunquam res definita aſſeratur alicui conuenire, niſi prius, definitionem traditam eidem conuenire, demonſtretur. Id quod in alijs etiam definitionibus cernitur. Nam quemadmodum Euclides defin. 10. lib. 1. angulum rectum appellauit eum, qui fit à linea ſuper aliam lineam ad angulos æquales cadente, ita vt nunquam ei concedendum ſit, angulum quempiam eſſe rectum, niſi prius oſtenderit, eum ab eiuſmodi linea effici. Item quemadmodum definitione vltima lib. 3. definiuit ſimilia circulorum ſegmenta eſſe, in quibus anguli exiſtentes ſunt æquales, ita vt tunc ſolùm ei concedendum ſit, ſegmenta eſſe ſimilia, cùm probauerit angulos in eis exiſtentes eſſe æquales: ſic etiam defin. 6. & 8. huius lib. vocauit quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales, quarum æque multiplicia eam conditionem habent, quam explicauit, ita vt nunquam ei credendum ſit, cùm quatuor magnitudines appellabit eandem habere proportionem, vel non eandem, niſi priùs demonſtrauerit, conditionem eam illis magnitudinibus conuenire. Sed quanquam reſponſio hæc vera ſit, ac propria, tamen quia ex illa definitione non videtur colligi poſſe, vere magnitudines, quarum æque multiplicia illam conditionem habent, eſſe proportionales, vel non proportionales; etiamſi eas ſolùm Euclides velit appellare proportionales, vel non proportionales: explicabimus paulò accuratiùs, Euclidem recte eo modo definiuiſſe magnitudines proportionales, atq; adeò ſine vlla dubitatione concedi poſſe à quouis, illas, quibus defin. 6. conuenit, vere eandem habere proportionem; illas verò, quibus definitio 8. conuenit, non eandem proportionem habere.

QVOD vt planius fiat, reuocandum ad memoriam eſt, duplicem eſſe proportionem; Rationalem, quæ inter quantitates incommenſurabiles exiſtit, atque adeò omnis in numeris reperiri poteſt. Et irrationalem, quæ inter quantitates incommenſurabiles exiſtit, & nullo modo in numeris poteſt reperiri. Si igitur Euclides de Rationalibus duntaxat proportionibus diſputationem inſtituiſſet, potuiſſet quatuor magnitudines proportionales definire eo modo, quo lib. 7. defin. 20. proportionales quatuor numeros definiuit, nimirum: Magnitudines proportionales ſunt, cum prima ſecundæ, & tertia quartæ, æque multiplex eſt, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certe (vt nos ad eam defin. addidimus) cum prima ſecundam, & tertia quartam, æqualiter continet, eandemq; inſuper illius partem, vel eaſdem partes. Non proportionales verò magnitudines ita definire potuiſſet: Magnitudines nō proportionales ſunt, hoc eſt, prima ad ſecundā habet maiorem proportionē, quam tertia ad quartā, cum prima ſecūda magis

magis multiplex eſt, vel maior pars, maioresue partes, quàm tertia quartæ: Vel certè cum prima ſecundam ſæpius continet, quam tertia quartam, ſiue eadem pars, aut partes vtrobique ſuperſint, ſiue non; Vel cum prima ſecundã toties continet, quoties tertia quartam, ſed prima maiorem inſuper partem, maioresve partes ſecundæ includit, quam tertia quartæ. Potuiſſet, inquam, Euclides ita definire magnitudines proportionales, ac non proportionales, ſi de ſolis rationalibus proportionibus ageret: quia omnes proportiones magnitudinum exhiberi poſſent in numeris, ac proinde definiri, vt numerorum proportiones eadem, vel diuerſa, vt diximus. Nam proportio numerorum (vt ex Campano, aliiſque ſcriptoribus, defin. 24. lib. 7. adiunximus) eſt habitudo quædam vnius numeri ad alterum, ſecundum quod illius eſt multiplex, vel pars, partesve: Vel certè ſecundum quod illum continet ſemel, aut aliquoties, & aliquam inſuper illius partem, vel partes. Quæ omnia perſpicua ſunt tum ex definitionibus quinque ſpecierum proportionis rationalis tam maioris inæqualitatis, quam minoris inæqualitatis, de quibus ſuprà egimus; tum ex iis, quæ in defin. 20. & 24. lib. 7. ſcripſimus.

QVONIAM verò Euclides, non ſolùm proportiones Rationales, ſed Irrationales etiam complecti voluit, non potuit eo modo quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales definire: propterea quòd in proportione irrationali maior magnitudo neque multiplex eſſe poteſt minoris, neque eam ſemel aut aliquoties, & inſuper aliquam eius partem aut partes continere: Minor item maioris neque pars eſſe poteſt, neque partes, quippe cùm magnitudines irrationalem habentes proportionem incommenſurabiles ſint, ita vt nullam partem aliquotam communem, quamuis minimam, poſſint habere. Quocirca coactus eſt ſeſe conuertere ad proportiones magnitudinum rationales, hoc eſt, ad proportiones numerorum, cùm omnis proportio rationalis, ſiue magnitudinum commenſurabilium ſit, vt proportio numeri ad numerum, vt lib. 10. propoſ. 5. demonſtratur: Coactus, inquam, eſt inueſtigare aliquid, quod certum ſit conuenire quibuslibet quatuor numeris ſiue magnitudinibus commenſurabilibus, eandem habentibus proportionem, vel non eandem: adeò vt, ſi idem illud conuenire demonſtretur quatuor magnitudinibus, etiam incommenſurabilibus iure optimo magnitudines illæ quatuor proportionales etiam dici poſſint, vel non proportionales: quandoquidem eandem habent proprietatem, quam quilibet quatuor numeri proportionales, vel non proportionales, immò quam quælibet quatuor magnitudines commenſurabiles eandem habentes proportionem, vel non eandem, neceſſariò habere demonſtratur. Neque enim aliunde cognoſcere, vel explicare aliter poſſumus magnitudines incommenſurabiles proportionales eſſe, aut non proportionales, niſi per aliquid, quod certum ſit conuenire, vt diximus, numeris quibuſcunque, vel magni-

Digitized by Google

magnitudinibus commenſurabilibus, eandem, vel non eandem habentibus proportionem, in quibus euidenter ſimilitudo, diſſimilitudóve proportionum cernitur. Quemadmodum quia quando in circulorum ſegmentis anguli æquales exiſtentes, ſunt commenſurabiles quatuor rectis, hoc eſt, quando ſunt eadẽ pars, vel eadem partes quatuor rectorum, ſunt quoque ipſa ſegmenta eadem pars, vel eadem partes circulorum, vt ad finem lib. 6. demonſtrabimus; vt meritò ſimilia appellentur, ac propterea & omnia ſegmenta alia, in quibus ſunt anguli æquales, etiamſi non ſint commenſurabiles quatuor rectis, dicantur quoque ſimilia: quandoquidem, quando anguli quatuor rectis commenſurabiles ſunt, verè illa ſegmenta ſimilia ſunt, hoc eſt, eadem partes circulorum, licet hoc in ſegmentis, quando anguli in eis exiſtentes quatuor rectis ſunt incommenſurabiles, non cernatur, quòd tunc ſegmenta neque eadem pars, neque eadem partes poſſint eſſe circulorum, ſed ipſis circulis omnino incommenſurabilia exiſtant. Neque enim aliud indicium habere poſſumus, ſegmenta ſimilia eſſe aut diſſimilia, niſi angulorum in eis exiſtentium æqualitatem, vel inæqualitatem, ex qua veram ſimilitudinem, aut diſſimilitudinem ſegmentorum circulis commenſurabilium colligimus. Quam ob rem ſicut nemo ſimilitudinem hanc ſegmentorum in dubium reuocat, quanquam hæc ſimilitudo in ſegmentis, quæ circulis incommenſurabilia ſunt, non ita euidenter appareat, vt in ſegmentis, quæ circulis ſunt commenſurabilia; ita non rectè fecerit, qui ſimilitudinem proportionum in magnitudinibus incommenſurabilibus in dubium reuocet, quando comperiet, illis conuenire, quod omnibus magnitudinibus proportionem eandem rationalem habentibus conuenire certum ſit, licet hæc proportionum ſimilitudo non tam euidens ſit in magnitudinibus incommenſurabilibus.

ITAQVE quoniam propoſitis quatuor numeris proportionalibus, ſumptiſque primi ac tertij æquè multiplicibus iuxta quamuis multiplicationem, item ſecundi ac quarti æquè multiplicibus ſecundum quamuis etiam multiplicationem, ſemper verum eſt, vt mox demonſtrabimus, ſi multiplex primi maior eſt multiplice ſecundi, multiplicem tertij maiorem quoque eſſe neceſſariò multiplice quarti; Et ſi ille æqualis eſt, hunc quoque eſſe æqualem; & ſi minor, minorem: Et contrà, quia propoſitis quatuor numeris, ſumptiſq; æquè multiplicibus primi ac tertij iuxta quamuis multiplicationem; item æquè multiplicibus ſecundi ac quarti iuxta quamuis etiam multiplicationem, ſi multiplice primi exiſtente maiore, quàm multiplex ſecundi, multiplex tertij maior quoque ſit, quàm multiplex quarti: Et ſi illo exiſtente æquali, hic quoq; æqualis ſit, & illo exiſtente minore, hic ſimiliter minor exiſtat, perpetuò verum eſt, quatuor numeros eſſe proportionales: Rurſus quia propoſitis quatuor numeris, quorum primus ad ſecundum maiorem proportionem habeat, quam tertius ad

quartum, ſumptiſque aquè multiplicibus primi ac tertij, item aquè multiplicibus ſecundi ac quarti, neceſſariò interdum accidit, vt multiplex primi maior ſit multiplice ſecundi, multiplex verò tertij non ſit maior multiplice quarti: Et contrà, quia quatuor propoſitis numeris, ſumptiſque aquè multiplicibus primi ac tertij, item aquè multiplicibus ſecundi ac quarti, ſi accidat nonnunquam, multiplicem primi maiorem eſſe multiplice ſecundi, at multiplicem tertij non maiorem multiplice quarti, ſine vlla dubitatione verum eſt, maiorem eſſe proportionem primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum. Quoniam, inquam, ita ſe res ſemper habet in numeris, atque adeò & in magnitudinibus commenſurabilibus, ita vt contrarium nunquam inueniatur, non immeritò dicentur quacunque quatuor magnitudines, etiam incommenſurabiles, eandem habere proportionem, cum ſumptis aquè multiplicibus prima ac tertia iuxta quamuis multiplicationem, item aquè multiplicibus ſecunda ac quarta ſecundum quamuis etiam multiplicationem, perpetuò deprehenditur, multiplicem tertia maiorem eſſe multiplice quarta, quotieſcunque multiplex prima maior eſt multiplice ſecunda; multiplicem verò tertia aqualem eſſe multiplici quarta, quando multiplex prima aqualis eſt multiplici ſecunda; multiplicem denique tertia minorem eſſe multiplice quarta, hoc ipſo, quòd multiplex prima minor eſt multiplice ſecunda. Eadem ratione iure optimo dicentur quatuor quacunq; magnitudines tam commenſurabiles, quàm incommenſurabiles, non habere eandem proportionem, ſed maiorem eſſe proportionem prima ad ſecundam, quàm tertia ad quartam, cum ſumptis aquè multiplicibus, vt dictum eſt, interdum contingit, multiplicem prima eſſe maiorem multiplice ſecunda, multiplicem verò tertia non maiorem multiplice quarta: quandoquidem prior conditio in omnibus numeris proportionalibus, poſterior autem in non proportionalibus perpetuò reperitur, vt iamiam demonſtrabimus; nullumque aliud indicium habere poſſumus, quo magnitudines incommenſurabiles cognoſcantur eſſe proportionales, vel non proportionales: præſertim cùm magnitudines incommenſurabiles alijs magnitudinibus, qua hoc modo proportionales eſſe demonſtrantur, ſæpenumero alia via oſtendantur eandem habere proportionem, quam numerus ad numerum, vt nullo modo dubitandum ſit, quin omnes magnitudines, etiam incommenſurabiles, quarum aquè multiplices ita ſe habent, vt in 6. defin dictum eſt, ſint proportionales, &c. Niſi enim hoc verum eſſet, ſequeretur haud dubiè ex illa proportionalitate aliquando abſurdũ aliquod manifeſtum: quod tamen hactenus non accidit, ſed potiùs ea, qua ex magnitudinibus in eo ſenſu proportionalibus demonſtrantur, veriſſima eſſe plerunque alia via, vt diximus, oſtenduntur; vt poſtea etiam demonſtrabimus. Qua cùm ita ſint, liquidò conſtare exiſtimo, cur Euclides in duabus illis defin. adhibuerit (& quidem rectè) magnitudines

duarum propoſitarum æquè multiplices magnitudines. Sed iam id, quod polliciti ſumus, Geometricè demonſtremus, adſcitis nonnullis propoſitionibus lib. 7. quæ nullo modo ex 6. & 8. defin. aut ex demonſtrationibus huius lib. 5. pendent, & commodiſſimè ante lib. 5. poſſint demonſtrari; atque adeò hic aſſumi, vt iam demonſtrata. Hoc autem efficiemus quatuor propoſitionibus, quæ ſequuntur.

I.

PROPOSITIS quatuor numeris proportionalibus, ſumptiſque primi ac tertij æquè multiplicibus iuxta quamuis multiplicationem, item ſecundi & quarti æque multiplicibus iuxta quamcunque etiam multiplicationem; ſi multiplex primi maior ſit multiplice ſecundi, erit quoque multiplex tertij maior multiplice quarti; & ſi multiplex primi æqualis ſit multiplici ſecundi, erit & multiplex tertij æqualis multiplici quarti; ſi denique multiplex primi ſit multiplice ſecundi minor, erit & multiplex tertij multiplice quarti minor.

HABEAT numerus primus A, ad ſecundum B, eandem proportionem, quam tertius C, ad quartum D; ſumanturque primi A, & tertij C, æquè multiplices E, F: Item ſecundi B, & quarti D, æquè multiplices G, H, qualiſcunque hæc multiplicatio ſit. Dico ſi E, multiplex primi A, maior eſt quàm G, multiplex ſecundi B, maiorem quoque eſſe F, multiplicem tertij C, quàm H, multiplicem quarti D. Et ſi E, æqualis ſit ipſi G, æqualem quoque eſſe F, ipſi H. Si denique E, minor ſit quàm G, minorem quoque eſſe F, quàm H. Quoniam enim eſt, vt A, ad B, ita C, ad D; a erit permutando etiam, vt A, ad C, ita B, ad D: b Vt autem A, ad C, ita eſt E, ad F; quòd idem numerus ipſos A, C, multiplicans produxerit ipſos E, F, quippe cùm E, & F, ipſorum A, & C, ſumpti ſint æquè multiplices. Et eadē de cauſa, vt B, ad D, ita eſt G, ad H.

E, 9.	A, 3.	C, 6.	F, 18.
G, 4.	B. 2.	D, 4.	H, 8.

E, 18.	A, 3.	C, 6.	F, 36.
G, 18.	B, 2.	D, 4.	H, 36.

E, 12.	A, 3	C, 6	F, 24
G, 14.	B, 2.	D, 4.	H, 28

a 13. ſeptimi.
b 17. ſeptimi.

Igitur ex lemmate propoſ. 14. lib. 7. erit quoq; vt E, ad F, ita G, ad H, c Et permutādo, vt E, ad G, ita F, ad H. Quocirca ſi E, maior eſt quàm G, erit quoq; F, maior quàm H, vt in primo exemplo. Si verò F, æqualis c 13. ſeptimi.

 eſt ipſi

Digitized by Google

eſt ipſi G, erit quoque F, ipſi H, æqualis, vt in ſecundo exemplo: Si deniq; E, minor eſt quam G, erit quoq; F, minor quam H, vt in tertio exemplo. Quod erat demonſtrandum.

IL

PROPOSITIS quatuor numeris non proportionalibus, ita vt maior ſit proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum, ſi ſumantur æquè multiplices primi ac tertij, item æquè multiplices ſecundi ac quarti, fieri poteſt, vt multiplex primi maior ſit, quàm multiplex ſecundi, multiplex autem tertij non maior, quàm multiplex quarti.

HABEAT primus numerus A, ad ſecundum B, maiorem proportionem, quàm tertius C, ad quartum D. Dico fieri poſſe, vt ſumptis æquè multiplicibus primi A, & tertij C, item æquè multiplicibus ſecundi B, & quarti D, multiplex ipſius A primi ſit maior quàm multiplex ipſius B, ſecundi, at multiplex ipſius C, tertij maior non ſit, quàm multiplex ipſius D, quarti. Multiplicantes enim ſe mutuo numeri B, D, faciant E. Et quoniā D, metitur E, ex pronunc. 7. lib. 7. & E, metitur genitum ex C, in E, ex eodem pronunciato; metietur quoque D, eundem genitum ex C, in E, ex pronunc. 11. lib 7. Metiatur D genitum ex C, in E, per F; fietq; propterea ex D, in F, numerus, quem D, per F, metitur, ex pronū. 9. lib 7. hoc eſt, numerus idem, qui fit ex C, in E. Quia igitur idem numerus gignitur ex D, primo in F, quartum, qui ex C, ſecundo fit in E, tertium,

K, 56	H, 7.	O, 22.	I, 28.
F, 8.	G, 1.	A, 3	C, 4
	E, 6.	B, 2.	D, 3.
M, 54	N, 6.	P, 20.	L, 30.
K, 160	H, 440.	O, 60	I, 20.
F, 8.	G, 22.	A, 3.	C, 1.
	E, 80	B, 8.	D, 10.
M, 160.	N, 80.	P, 24.	L, 39.

a 19. ſeptimi. *a erit vt D, primus ad C, ſecundum, ita E, tertius ad F, quartum: Et conuertendo, vt C, ad D, ita F, ad E.*

RVRSVS quia B, metitur E, ex pronunc. 7 lib. 7. & E, metitur procreatum ex A, in E, ex eodem pronunciato; metietur quoq; B eundem procreatum ex A, in E, ex pronunc. 11. lib 7. Metiatur B procreatum ex A in E, per F G, fietq; idcirco ex B, in F G, numerus, quem B, metitur per F G, ex pronunc. 9. lib. 7. hoc eſt, numerus idem, qui fit ex A, in E. Quia igitur idem numerus ex B, primo in F G, quartum, &

b 19. ſeptimi. *ex A, ſecundo in E, tertium gignitur, b erit vt B, primus ad A, ſecundum, ita E, tertius ad F G, quartum: Et conuertendo, vt A, ad B, ita*

Digitized by Google

ita F G, ad E. Quoniam ergo eſt, vt F G, ad E, ita A, ad B; Eſt autem proportio A, ad B, poſita maior, quam C, ad D; erit quoque proportio F G, ad E, maior quàm C, ad D: Oſtenſum autem eſt, eſſe vt C, ad D, ita F, ad E. Igitur proportio F G, ad E, maior quoque erit proportione F, ad E, ac proinde numerus F G, maior erit numero F: quæ omnia ex iis, quæ in defin. 20. lib. 7. ſcripſimus, perſpicuè conſequuntur. Superet igitur F G, ipſum F, numero G.

SVMANTVR *iam ipſorum F, G, C, æquè multiplices K, H, I, ea lege, vt H, ſit quidem maior quàm E, at I, non minor quàm D, eritq; ex ſcholio propoſ. 5. lib. 7. totus K H, ita multiplex totius F G, vt eſt multiplex K, ipſius F, vel I, ipſius C. Sumantur rurſus ipſorum D, E, æquè multiplices L, M N, ea lege, vt L, ſit multiplex ipſius D, proximè maior quàm I; hoc eſt, tales æquè multiplices, vt ſubtracto numero D, ex L, reliquus numerus maior non ſit, quàm I, ſed vel æqualis, vt in ſecundo exemplo, vel minor, vt in primo exemplo contingit. Et quoniam oſtenſum eſt ita eſſe D, ad C, vt E, ad F; & ita eſt C, ad I, vt F, ad K, ex conſtructione, quòd I, K, ſumpti ſint ipſorum C, F, æquè multiplices; a erit quoque ex æquo, vt D, ad I, ita E, ad K.*

K, 56.	H, 7.		O, 21	I, 28.
F, 8.	G, 1.		A, 3.	C, 4.
	E, 6.		B, 2.	D, 3.
M, 54	N, 6.		P, 20.	L, 30.
K, 160	H, 440.		O, 60	I, 20.
F, 8.	G, 22.		A, 3.	C, 1.
	E, 80		B, 8	D, 10.
M, 160.	N, 80		P, 24	L, 39.

a 14. ſeptim.

PRÆTEREA *quoniam oſtenſum eſt eſſe D, ad C, vt E, ad F; erit permutando quoque, D, ad E, vt C, ad F. Vt autem D, ad E, ita eſt L, ad M N; quòd idem numerus ipſos D, E, multiplicans fecerit L, M N, quippe cùm L, M N, ſumpti ſint ipſorum D, E, æquè multiplices: Et eadem de cauſa, vt C, ad F, ita eſt I, ad K. Igitur ex lemmate propoſ. 14. lib. 7. erit quoque, vt L, ad M N, ita I, ad K, & permutando, vt L, ad I, ita M N, ad K.*

QVIA *ergo eſt, vt totus L, ad I, ita totus M N, ad K: Et vt D, ex L, ablatus ad eundem I, ita E, ex M N, ablatus ad eundem K; erit quoque ex theor. 6. ſcholii propoſ. 22. lib. 7. vt reliquus ex L, ad I, ita reliquus ex M N, ad K: Eſt autem reliquus ex L, non maior, quàm I, ſed vel minor, vt in priori exemplo, vel æqualis, vt in poſteriori; propterea quòd reliquus ex L, cùm D, facit ipſum L, multiplicē ipſius D, proximè maiorem ipſo I, ex conſtructione. Igitur & reliquus ex M N, maior non erit quàm K; atque idcirco ſi ex M N, detrahatur N, ipſi E, æqualis, erit reliquus M, vel minor ipſo K, vt in priori exemplo, vel æqualis, vt in poſteriori. Cùm ergo H, multiplex ipſius*

Gg 3 G, ſit

G, ſit maior quàm E, vel N, ex conſtructione; erit totus K H, toto M N maior.

DENIQVE ſumpto O, ita multiplici ipſius A, vt K H, multiplex eſt ipſius F G, vel I, ipſius C: Item P, ita multiplici ipſius B, vt M N, multiplex eſt ipſius E, vel L, ipſius D: quoniam oſtenſum eſt, ita eſſe F G, ad E, vt A, ad B, ſumptiq; ſunt ipſorum F G, & A, primi ac tertij, æquè multiplices K H, & O; item ipſorum E, & B, ſecundi ac quarti æquè multiplices M N, & P, ſequitur ex antecedente propoſ. ſi K H, maior eſt quàm M N, ipſum quoq; O, maiorem eſſe quàm P. Cùm ergo K H, oſtenſus ſit maior quàm M N, erit quoq; O, maior quàm P. Quocirca cùm O, I, ſint æquè multiplices ipſorum A, C, primi ac tertij; & P, L, æquè multiplices ipſorum B, D, ſecundi ac quarti, demonſtratumq; ſit, maiorem eſſe O, quàm P, ſit autem I, minor quàm L, ex conſtructione; fieri poteſt, vt exiſtente maiore proportione primi A, ad ſecundum B, quàm tertij C, ad D, quartum, ſumptiſque æquè multiplicibus, vt dictum eſt, multiplex primi, nimirum O, maior ſit quàm P, multiplex ſecundi, multiplex autem tertij, nimirum I, maior non ſit quàm L, multiplex quarti. Quod demonſtrandum erat.

QVOD ſi minor ſit proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum, ſumanturq; æquè multiplices primi ac tertij, item æquè multiplices ſecundi ac quarti, fieri quoque poteſt, vt nonnunquam multiplex primi ſit minor multiplice ſecundi, multiplex verò tertij non ſit multiplice quarti minor.

IN eodem enim exemplo, minor eſt proportio C, primi ad D, ſecundum, quàm A, tertij ad B, quartum, demonſtratumq; eſt, I, multiplicem primi C, minorem eſſe, quàm L, multiplicem ſecundi D, at O, multiplicē tertij A, maiorem eſſe quàm P, multiplicem quarti B.

III.

PROPOSITIS quatuor numeris, ſumptiſque æque multiplicibus primi ac tertij iuxta quamuis multiplicationem, item æque multiplicibus ſecundi ac quarti iuxta quamuis etiam multiplicationem, ſi multiplice primi exiſtente maiore, quàm multiplex ſecundi, multiplex tertij maior quoque ſit neceſſariò, quàm multiplex quarti: & illo exiſtente æquali, hic quoque ſemper ſit æqualis; illo denique exiſtente minore, hic quoq; perpetuò minor ſit: erit eadem proportio primi ad ſecundum, quæ tertij ad quartum.

SINT quatuor numeri A, B, C, D, ſumanturq; primi A, & tertij C, æquè multiplices qualeſcunq; E, F. Itē ſecundi B, & quarti D, æquè mul-

Digitized by Google

multiplices G, H, qualiſcunq; etiã hac ſit multiplicatio. Dico ſi E, F, multiplices primi ac tertij ſemper ſint vel maiores, quàm G, H, multiplices ſecundi & quarti, vel æquales, vel minores, ita eſſe A, primum ad B, ſecundum, vt C, tertium ad D, quartum. Si namq; foret maior proportio A, ad B, vel minor, quàm C, ad D, fieri poſſet, veluti in antecedente propoſ. demonſtratum eſt, vt E, multiplex primi eſſet aliquando maior, aut minor, quàm G, multiplex ſecundi, at F, multiplex tertij non maior, aut minor quàm H, multiplex quarti. Quod eſt contra hypotheſin. Eſt ergo A, ad B, vt C, ad D. Quod erat oſtendendum.

E, 9.	A, 3.	C, 6.	F, 18.
G, 4.	B, 2.	D, 4.	H, 8.
E, 18.	A, 3.	C, 6.	F, 36.
G, 18.	B, 2.	D, 4.	H, 36.
E, 12.	A, 3.	C, 6.	F, 24.
G, 14.	B, 2	D, 4.	H, 28.

IV.

PROPOSITIS quatuor numeris, ſumptiſque primi ac tertij æque multiplicibus, item ſecundi & quarti æque multiplicibus; ſi quando contingat, multiplicem primi maiorem eſſe multiplice ſecundi, multiplicem verò tertij non maiorem multiplice quarti: Maior erit proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum.

SINT quatuor numeri A, B, C, D, ſumptiſque ipſorum A, & C, primi ac tertij æquè multiplicibus E, & F, item ipſorum B, & D, ſecundi ac quarti æquè multiplicibus G, & H, ſit E, multiplex primi A, maior quàm G, multiplex ſecundi B, at F, multiplex tertij C, non maior quàm H, multiplex quarti D. Dico maiorem eſſe proportionem primi A, ad B, ſecundum, quàm C, tertij ad D, quartum. Quoniam enim maior eſt E, quàm G, at F, non maior quàm H, erit maior proportio E, ad G, quàm F, ad H, cùm illa ſit proportio maioris inæqualitatis: hæc verò vel æqualitatis, vel minoris inæqualitatis. Igitur ex theor. 10. propoſ. 22. lib. 7. erit quoque permutando maior proportio E, ad F, quàm G, ad H. a Eſt autem, vt E, ad F, ita A, ad C, quod idem numerus ipſos A, C, multiplicans procreauerit E, & F; quippe cùm E, F, æquè multiplices ſint ipſorum A, C; Eademq; de cauſa eſt, vt G, ad H, ita B, ad D. Maior igitur erit quoque proportio A, ad C, quàm B, ad D: Et permutando, ex theor. 10. propoſ. 22. lib. 7. maior erit etiam proportio A, ad B, quàm C, ad D. Quod oſtendendum erat.

a 17. ſeptimi.

E, 21.	A, 3.	C, 4.	F, 28.
G, 20.	B, 2.	D, 3.	H, 30.

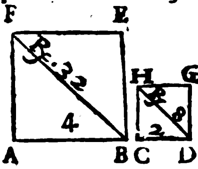
Digitized by Google

QVOD ſi multiplex primi ſit minor multiplice ſecundi, ſed multiplex tertij non ſit minor multiplice quarti; minor erit proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum.

EADEM enim omnino demonſtratio eſt, ſi pro maiore proportione dicatur vbique minor proportio, nulla alia re mutata. Vt in hoc exemplo apparet, vbi quatuor numeri ſunt A, B, C, D, & E, multiplex primi A, minor eſt quàm G, multiplex ſecundi B, ſed F, multiplex tertij C, minor non eſt, quàm H, multiplex quarti, &c.

E,28.	A,4.	C,3.	F,21.
G,30.	B,3.	D,2.	H,20.

SED demonſtremus iam, in magnitudinibus, quæ alijs incommenſurabiles ſunt, & quæ ex defin. 6. proportionales ſunt, eam plerunque reperiri proportionem, quæ in numeris exhiberi poſſit: adeò vt verè proportionales ſint magnitudines, quibus definitio 6. conuenit, quandoquidem ex magnitudinibus proportionalibus in eo ſenſu ſumptis verum conſequitur, & nihil abſurdi inde inferri poteſt. Hoc enim paulò antè demonſtraturos nos etiam recepimus. Sit ergo recta A B, verbi gratia, recta C D, dupla, & ſuper ipſas rectas deſcribantur quadrata A B E F, C D G H; cum diametris B F, D H. Et quia ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. tam quadratum diametri B F, quadrati lateris A B, hoc eſt, quadrati A B E F, quàm quadratum diametri D H, quadrati lateris C D, hoc eſt, quadrati C D G H, duplum eſt; ſi ponatur latus A B, 4. & latus C D, 2. erit quadratũ A B E F, 16. & quadratum diametri B F, eius duplum, 32. ac proinde diameter ipſa B F, erit radix quadrata numeri 32, quæ numeris exprimi nequit, cùm ea maior ſit quàm 5. minor autem quàm 6. nulluſq; numerus inter 5. & 6. medius, hoc eſt, compoſitus ex 5. & fractione aliqua vnitatis, in ſe ductus poſſit numerum integrum 32. producere, vt ex Lemmate ſequenti perſpicuum fiet. Quadratum autem C D G H, erit 4. & quadratum diametri D H, eius duplum, 8. ac proinde diameter ipſa D H, erit radix quadrata numeri 8. quæ numeris etiam exprimi nequit, cùm ea maior ſit quàm 2. minor autem, quàm 3 &c. ita vt proportio tam A B, ad B F, quàm CD, ad D H, ſit irrationalis, diameterq; propterea B F, lateri A B, & diameter D H, lateri C D, incommenſurabilis. Vides igitur, id quod Euclides propoſ. vltima lib. 10. demonſtrauit ex ijs, quæ lib. 6. de magnitudinibus proportionalibus per defin. 6. huius 5. lib. demonſtrata ſunt, Diametrum nimirum quadrati lateri eiuſdem quadrati eſſe incommenſurabilem, eſſe re ipſa veriſſimum, quippe cùm idem nos alia via ſine proportionibus hoc loco oſtenderimus.



RVRSVS quoniam diametri B F, D H, diuidunt angulos rectos qua-

quadratorum biſariam, vt in ſcholio propoſ. 34. lib. 1. & in coroll. 2. propoſ. 4. lib. 2. oſtendimus, erunt anguli A B F, A F B, C D H, C H D, ſemirecti, ideoque inter ſe æquales. Cum igitur & recti anguli A, C, ſint æquales, æquiangula erunt triangula A B F, C D H. Quare a erit, vt A B, ad B F, ita C D, ad D H; Et permutando, vt A B, ad C D, ita B F, ad D H. Eſt autem poſita recta A B, recta C D, dupla. Igitur & B F, ipſius D H, dupla erit. Itaque cum ex defin. 6. huius lib. eo deducti ſimus, vt credamus diametrum B F, diametri D H, eſſe duplam, quamuis vtraque diameter ad ſuum latus habeat proportionem irrationalem, (Nam propoſ. 4. lib. 6. ex qua oſtendimus, ita eſſe A B, ad B F, vt C D, ad D H, pendet ex propoſ. 2. & hæc ex 1. eiuſdem lib. 6. Prima autem propoſ. lib. 6. vim ſuam accipit ex defin. 6. huius 5. lib. Item permutata proportio, qua hic etiam vſi ſumus, ſine eadem defin. 6. demonſtrari non poteſt in magnitudinibus incommenſurabilibus, vt ex propoſ. 16. lib. 5. conſtat.) videamus, an aliunde cognoſcere poſſimus, diametrum B F, diametri D H, verè duplam eſſe, vt ex defin. 6. concluſum eſt, hoc ipſo, quòd latus A B, lateris C D, duplum ponitur, etiamſi proportio tam lateris A B, ad diametrum B F, quàm lateris C D, ad diametrum D H, irrationalis ſit. Hoc autem ſine proportionibus facile ita cognoſcemus. Quoniam latus A B, lateris C D, duplum eſt, erit ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadratum A E, quadrati C G, quadruplum. Poſito ergo quadrato A E, 4. erit quadratum C G, 1. Et quia tam quadratum diametri B F, quadrati A E, quàm quadratum diametri D H, quadrati C G, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. duplum eſt; erit quadratum diametri B F, 8. & quadratum diametri D H, 2. atque idcirco illud huius quadruplum erit. Quocirca ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. recta B F, recta D H, dupla erit. Vides ergo rurſus, ſi procedamus per ea, quæ ex defin. 6. huius lib. de magnitudinibus proportionalibus demonſtrata ſunt, nos perueniſſe ad concluſionem veram, nimirum diametros duorum quadratorum habere proportionem inter ſe duplam, ſi latus vnius ſit lateris alterius duplum: vt dubium non ſit, quin magnitudines verè proportionales ſint, quarum æque multiplicia eam conditionem habent, quam definitio 6. præſcribit. Porrò ex regulis quoque numerorum irrationalium, quæ in Algebra traduntur, conſtat diametrum B F, hoc eſt, R. 32. habere duplam proportionem ad diametrum D H, id eſt, ad R. 8. Nam ſiue R. 32. diuidatur per R. 8. Quotiens fit R. 4. hoc eſt, numerus 2. qui proportionem diametri B F, ad diametrum D H, denominat; ſiue R. 8. multiplicetur per 2. producitur R. 32. Atq; hoc modo omnia, quæ de magnitudinum incommenſurabilium proportionibus demonſtrantur ex defin. 6. huius lib. explicari poterunt per regulas numerorum irrationalium. Quæ res argumento rurſum eſt, magnitudines, quibus definitio 6. huius lib. conuenit, verè eſſe proportionales; quandoquidem calculus numerorum irrationalium cum demonſtrationibus, quæ ex ea

a 4. ſex.

 defin.

Digitized by Google

defin. pendent, perpetuo conſentire comperitur, vt iis, qui in Algebræ præceptis verſati ſunt, notiſſimum eſt.

LEMMA.

QVOD autem nullus numerus compoſitus ex 5. & fractione aliqua vnitatis, quamuis vnitas in infinitum ſecetur, gignere poßit integrum numerum 32. hoc modo facile demonſtrabimus. Sit enim numerus 5. cum quacunque fractione $\frac{3}{7}$. hoc modo $5\frac{3}{7}$. reuoceturque, vt in Arithmetica tradidimus, ad hanc vnicam fractionem $\frac{38}{7}$. Certum autem eſt, denominatorem 7. non metiri numeratorem 38. Alioquin diuiſis 38. per 7. fieret Quotiens numerus integer ſine fractione, quod eſt contra hypotheſin. Multiplicetur iam fractio $\frac{38}{7}$. in ſe, (quod fiet, vt in Arithmetica diximus, demonſtrabimusque ad finem lib. 9. ſi tam numerator 38. in ſe, quam denominator 7. in ſe ducatur) gignaturque fractio $\frac{1444}{49}$. ita vt numerator huius 1444. ſit quadratus numeratoris illius 38. & denominator 49. quadratus denominatoris 7. Et quia latus 7. non metitur latus 38. vt
a 16. octaui. *oſtendimus, a non metietur quoque quadratus 49. quadratum 1444. Quare diuiſo quadrato 1444. per quadratum 49. Quotiens non erit numerus integer, ſed ei adhærebit fractio aliqua. Alias quadratus 49. metiretur quadratum 1444. cuius contrarium demonſtrauimus. Atque eadem ratione demonſtrabitur, quemcunque numerum integrum cum fractione qualibet in ſeipſum ductum gignere numerum integrum cum fractione. Quod ſi fractio, cuius numerator denominatore minor ſit, in ſe ducatur, producetur ſemper fractio, cuius numerator etiam minor eſt denominatore. Nam cum numerator fractionis productæ ſit numerus quadratus numeratoris datæ fractionis, denominator autem quadratus numerus denominatoris, ſit autem datæ fractionis numerator minor denominatore, erit quoque illius quadratus numerus quadrato huius minor. Ita ex $\frac{2}{3}$. in ſe gignitur fractus numerus $\frac{4}{9}$. cuius numerator denominatore minor eſt. Itaque quacunque fractio in ſe multiplicata gignit numerum non integrum, niſi quando numerator datæ fractionis à denominatore numeratur, ſed ea fractio numerus integer potius eſt: qualis eſt fractio $\frac{200}{25}$. quæ 4. integras vnitates conſtituit.*

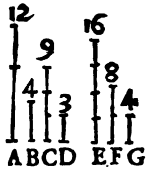
PRO-

Digitized by Google

IX.

PROPORTIO autem in tribus terminis pauciſſimis conſiſtit.

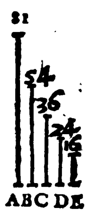
QVONIAM omnis Analogia ſeu proportionalitas, quam interpres, vt dictum eſt, proportionem nominat, ſimilitudo eſt duarum, vel plurium proportionum; omnis autem proportio habet & antecedentem terminum, & conſequentem, neceſſe eſt, in omni proportionalitate reperiri, vt minimum, duos terminos antecedentes, ac duos conſequentes. Quare ſi proportionalitas fuerit non continua, requirentur ſaltem quatuor termini, ſiue magnitudines; At vero ſi fuerit continua, erunt cum minimum tres termini; quoniam terminus medius bis ſumitur, cum ſit conſequens terminus vnius proportionis, & antecedens alterius: Atque hic eſt minimus numerus terminorum proportionalitatis. Nam in duobus terminis quibuſcunque ſolum proportio, non autem proportionalitas reperitur.



X.

CVM autem tres magnitudines proportionales fuerint; Prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundam: At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundam: Et ſemper deinceps, vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

VELVTI ſi ſint magnitudines A, B, C, D, E, continuè proportionales, ita vt ea ſit proportio A, ad B, quæ B, ad C; & C, ad D; & D, ad E: proportio A, magnitudinis primæ ad C, magnitudinem tertiam, dicitur duplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem ſecundam: quoniam inter A, & C, duæ proportiones reponuntur, quæ æquales ſunt proportioni A, ad B; nimirum proportio A, ad B, & B, ad C, vt propterea proportio A, ad C, intercipiat quodammodo proportionem A, ad B, duplicatam, id eſt, bis ordine poſitam. At proportio A, magnitudinis primæ ad D, magnitudinem quartam, dicitur triplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem ſecundam: quia inter A, & D, reperiuntur tres proportiones, quæ æquales ſunt proportioni A, ad B; nimirum proportio A, ad B; B, ad C, & C, ad D, atque idcirco proportio A, ad D, includit quodam-



Digitized by Google

quodammodo proportionem A, ad B, triplicatam, id eſt, ter ordine poſitam: Sic quoque proportio A, ad E, dicitur quadruplicata proportionis A, ad B: propterea quod quatuor proportiones interſeciuntur inter A, & E, quæ æquales ſunt proportioni A, ad B, &c.

QVOD ſi è contrario ea ſit proportio E, ad D, quæ D, ad C; & C, ad B; & B, ad A; dicetur proportio E, ad C, duplicata proportionis E, ad D; At vero proportio E, ad B, dicetur triplicata proportionis E, ad D; ſic quoque proportio E, ad A, dicetur quadruplicata proportionis E, ad D, &c.

INTERPRETES nonnulli colligunt ex hac definitione, ſi proponantur plures quantitates continuè proportionales, proportionem primæ quantitatis ad tertiam, eſſe duplam proportionis primæ quantitatis ad ſecundam, eo quod Euclides illam vocet duplicatam proportionem huius. Eodem modo volunt, proportionem primæ quantitatis ad quartam, eſſe triplam proportionis, quam habet prima quantitas ad ſecundam, &c. Quod tamen nulla eſt ratione concedendum. Neque enim Euclides hoc ſignificare voluit, ſed docuit tantummodo, proportionem primæ quantitatis ad tertiã, appellari duplicatam eius proportionis, quam habet prima quantitas ad ſecundam; propterea quod inter primam quantitatem, ac tertiam reperitur quodammodo proportio primæ quantitatis ad ſecundam duplicata; quippe cum inter primam quantitatem, ac tertiam interponantur duæ proportiones æquales ei proportioni, quam habet prima quantitas ad ſecundam, & ſic de cæteris, vt diximus. Non autem intelligit, illam duplam eſſe huius, ne Theorema proponeret, quod merito quiſpiam concedere recuſaret. Quis enim affirmabit, in his numeris continuè proportionalibus 25. 5. 1. proportionem 25. ad 1. duplam eſſe proportionis 25. ad 5. cum potius eam quis dixerit eſſe quincuplam? At verò, illam dici huius duplicatam ad ſenſum expoſitum, nemo inficiabitur, eo quod bis ſit poſita, & continuè, proportio 25. ad 5. Deinde quo modo erit proportio 1. ad 25. dupla proportionis 1. ad 5. cum illa minor ſit, hæc autem maior? Nam per propoſ. 8. huius lib. quantitas 1. ad quantitatem 5. maiorem proportionem habet, quam ad quantitatem 25. propterea quod 25. maior eſt, quam 5. Dicetur tamen illa huius duplicata, ob cauſam iam explicatam, licet ſit eius quinta pars. Quare etſi proportio 25. ad 1. dicitur duplicata proportionis quincuplæ, tamen decupla proportio eſt eiuſdem dupla. Quemadmodum etiam proportio octupla dupla eſt proportionis quadruplæ, cum tamen quadrupla duplicata, ſit ſedecupla, vt hic patet 16. 4. 1. Denique in tribus magnitudinibus æqualibus, vel in tribus æqualibus numeris, 4. 4. 4. atque adeo continuè proportionalibus, qui fieri poteſt, vt proportio primi ad tertium dupla ſit proportionis primi ad ſecundum, cum ſit omnino eadem? duplicata tamen dicetur illa huius, propterea quod hæc ordine bis poſita eſt continuè inter primum numerum & tertium.

SED

Digitized by Google

SED auctores, qui proportionem primæ quantitatis ad tertiam volunt eſſe duplam proportionis, quam prima quantitas habet ad ſecundam, (inter quos auctores eſt etiam Federicus Commandinus hoc loco: quod valde miror, cum alioquin Mathematicus ſit præſtantiſſimus) dicunt in hac defin. requiri terminos inæquales, primamque debere eſſe maiorem; ita vt definitio hæc intelligenda ſit neceſſario de proportione continua maioris inæqualitatis, Quare mirum non eſt, vt aiunt, neque proportionem 1. ad 25 proportionis 1. ad 5. neque proportionem 4. ad 4. proportionis 4. ad 4. duplam eſſe. Verum hæc expoſitio non ſolum vera non eſt, ſed Euclidi prorſus eſt contraria: quippe qui aſſumat pleriſque in locis, triplicatam proportionem reperiri in proportione minoris inæqualitatis. Locus clariſſimus eſt, vt alios omittam, in propoſ. 11. lib. 12. vbi demonſtrat, ſimiles conos, & cylindros in triplicata ratione eſſe diametrorum, quæ in baſibus. Nam ſi referatur maior conus, vel cylindrus ad maiorem; neceſſario in ſecunda parte eius demonſtrationis, aſſumit Euclides demonſtratum eſſe propoſ. 8. eiuſdem lib. 12. pyramides ſimiles, etiamſi minor ad maiorem referatur, in triplicata eſſe homologorum laterum ratione; vt eo in loco annotauimus. Huc accedit, propoſitiones illas, in quibus figuræ aliquæ demonſtrantur habere rationem laterum homologorum duplicatam, vel triplicatam, cuiuſmodi eſt: 9. & 20. lib. 6. & 11 12. 18. 19. lib. 8. & 33. lib. 11. & 12. 18. lib. 12. non fore vniuerſales, ſi ſolum de proportione maioris inæqualitatis eſſent intelligendæ. Explicanda ergo eſt hæc definitio, vt nos expoſuimus.

ITAQVE hoc loco Euclides explicat tantum, quidnam intelligendum ſit nomine proportionis duplicatæ, triplicatæ, &c. vt demonſtrationes ſequentium librorum percipiantur, rebuſque poſſint materialibus accommodari. Non autem determinat, quænam proportio ſit alterius dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. Exempli gratia, quoniam ex propoſitione 20. lib. 6. conſtat, proportionem quadrati ad quadratum duplicatam eſſe proportionis, quam habet latus prioris quadrati ad latus poſterioris, colligendum erit ſi continuetur proportio laterum in tribus terminis, proportionem quadrati ad quadratum, eſſe eam, quæ eſt primi termini ad tertium; ita vt ſi prioris quadrati latus fuerit trium palmorum, poſterioris autem vnius palmi, prius quadratum ad poſterius, habeat proportionem quam 9. ad 1. ita vt illud nouies hoc complectatur. Nam proportio 9. ad 1. quæ eſt noncupla, dicitur iuxta hanc definitionem, duplicata proportionis triplæ, qualis eſt 9. ad 3. vel 3. ad 1. vt in his numeris 9. 3. 1. perſpicuum eſt. Non autem inferendum erit, proportionem quadrati ad quadratum, duplo eſſe maiorem proportione lateris ad latus. Sic etiam quadratum poſterius ad prius proportionem habebit, quam 1. ad 9. ita vt illud ſit huius nona pars, propterea quod proportio 1. ad 9. dicitur duplicata proportionis 1. ad 3. vt in eiſdem his numeris 1. 3. 9. manifeſtum eſt.

Simili

Digitized by Google

Simili ratione, quoniam lib. 12. propoſ. vltima, demonſtratur ſphæras inter ſe rationem habere ſuarum diametrorum triplicatam, colligendum erit, ſphæram illam, cuius diameter continet tres palmos, ad ſphæram cuius diameter eſt vnius palmi tantum, proportionem habere quam 27. ad 1. Hæc enim triplicata dicitur triplæ proportionis, vt hic apparet, 27. 9. 3. 1. &c. Sic etiam propoſitis duabus ſphæris, quarum diametri proportionem habent decuplam, habebunt ſphæræ ipſæ proportionem millecuplam, cum hæc ſit decuplæ triplicata, vt hic patet, 1000. 100. 10. 1. Quis autem dixerit vnquam, millecuplam proportionem eſſe triplo tantummodo maiorem proportione decupla, & non potius trigecuplam decuplæ eſſe triplam?

CÆTERVM propoſita quacunque proportione rationali, ſi eius denominator in ſe ipſum multiplicetur, exurget denominator proportionis, quæ duplicata dicitur propoſitæ proportionis. Vt quia ex multiplicatione 4. denominatore ſcilicet proportionis quadruplæ, in ſe, producuntur 16. ideo proportio ſedecupla dicetur duplicata quadruplæ proportionis, vt hic cernitur 16. 4. 1. Item hic 48. 12. 3. E contrario, cum ex multiplicatione $\frac{1}{4}$. denominatore videlicet proportionis ſubquadruplæ, in ſe, producatur $\frac{1}{16}$. dicetur proportio ſubſedecupla, duplicata proportionis ſubquadruplæ. Quod ſi denominator rurſus in illud productum multiplicetur, procreabitur denominator proportionis triplicatæ; vt in priori exemplo, ex multiplicatione 4. in 16. producuntur 64. denominator proportionis, quæ quadruplæ dicitur triplicata, vt hic vides, 64. 16. 4. 1. Item hic 192. 48. 12. 4. Rurſus ſi in poſterius hoc productum multiplicetur idem denominator, inuenietur denominator proportionis quadruplicatæ, atque ita de cæteris. Itaque proportionis duplicatæ denominator producitur ex denominatore propoſitæ proportionis bis poſito, atque ita multiplicato. Vt numerus denominans proportionem duplicatam proportionis triplæ, producitur ex 3. denominatore triplæ proportionis bis poſito, in hunc modum 3. 3. ac ſic multiplicato: Nam ter tria faciunt 9. denominatorem noncuplæ proportionis, quæ duplicata dicitur triplæ, vt hic cerni poteſt 9. 3. 1. Item hic 18. 6. 2. At verò denominator proportionis triplicatæ gignitur ex propoſitæ proportionis denominatore ter poſito, & ſic multiplicato. Vt in dato exemplo, denominator triplicatæ proportionis, nempe 27. procreatur ex 3. ter poſito ſic 3. 3. 3. atque ita multiplicato, dicendo ter tria ter, &c. Ita proportio quadruplicata exorietur ex denominatore quater poſito: Quintuplicata ex eodem quinquies poſito, atque ita multiplicato, &c. Itaque duplicatio, triplicatio, quadruplicatio, &c. proportionis cuiuslibet, de qua in hac defin. agitur, nihil aliud eſt, quam multiplicatio denominatorum proportionum intermediarum inter ſe. Ex hac enim multiplicatione procreatur denominator proportionis, quam extremi termini inter ſe habent, quæ propterea illius proportionis, cuius denominator multiplicatus eſt, duplicata dicitur, vel triplicata,

plicata,

Digitized by Google

plicata, vel quadruplicata, &c. prout videlicet denominator bis poſitus eſt, vel ter, vel quater, &c. atque ſic multiplicatus fuit, vt expoſuimus. Verbi gratia, propoſitis hiſce quatuor numeris continuè proportionalibus in proportione quadrupla, primus 192. ad quartum 3. proportionem habet denominatam à 64. quæ proportio dicitur triplicata proportionis quadruplæ: quia denominator 64. proportionis extremorum 192. & 3. producitur ex denominatore 4. proportionis quadruplæ ter poſito, ob tres proportiones quadruplas inter extremos interiectas, atque ita multiplicato, dicendo, quater quatuor ſunt 16. & quater 16. ſunt 64. Sic etiam inuerſis iiſdem numeris, vt ſint continuè proportionales in proportione ſubquadrupla, primus 3. ad quartum 192. proportionem habet denominatam à $\frac{1}{64}$. quæ proportio dicitur triplicata proportionis ſubquadruplæ: quia denominator $\frac{1}{64}$. proportionis primi numeri 3. ad quartum 192. producitur ex denominatore $\frac{1}{4}$. proportionis ſubquadruplæ ter poſito, & ſic multiplicato, ob tres proportiones ſubquadruplas inter extremos interpoſitas. Nam ex $\frac{1}{4}$. in $\frac{1}{4}$. fit $\frac{1}{16}$. & ex $\frac{1}{16}$. in $\frac{1}{4}$. fit $\frac{1}{64}$. Nihil obſtat ergo, quo minus proportio 3. ad 192. à $\frac{1}{64}$. denominata dici poſſit triplicata proportionis ſubquadruplæ 3. ad 12. quanquam illa minor ſit, quàm hæc: quia videlicet denominator $\frac{1}{64}$. productus eſt ex denominatore $\frac{1}{4}$. ter poſito, & ſic multiplicato, vt diximus. Non tamen proportio 3. ad 192. à $\frac{1}{64}$. denominata dici poteſt tripla maior proportione ſubquadrupla 3. ad 12. quia denominator $\frac{1}{4}$. triplicatus non facit denominatorem $\frac{1}{64}$. ſed $\frac{3}{4}$. atque ita proportio ſubſeſquitertia dicetur tripla proportionis ſubquadruplæ: ſicut etiam non proportio à 64. denominata, ſed proportio duodecupla, eſt proportionis quadruplæ tripla; propterea quod denominator 4. triplicatus non producit denominatorem 64. ſed 12. Porro continuatis quotcunque numeris proportionalibus, ſiue maiores cum minoribus, ſiue minores cum maioribus conferantur, denominatorem proportionis primi ad vltimum gigni ex denominatoribus intermediarum proportionum inter ſe multiplicatis, demonſtrabimus ad defin. 5. lib. 6. Proportionem autem aliquam tum demum eſſe alterius duplam, vel triplam, &c. cum illius denominator huius denominatoris duplus eſt, vel triplus, &c. ita vt proportio decupla ſit dupla quintuplæ, & ſextupla ſit tripla duplæ, &c. oſtendemus ad finem lib. 9. tractatumque eſt hoc argumentum copioſe à Rodulpho Volumnio in Diſputatione de proportione proportionum. Nunc ſatis ſit, hoc ipſum communi hominum iudicio ex ſenſibilibus rebus confirmare. Si igitur Agens aliquod

Denominatores	4	4	4	
Num. propor.	192	48	12	3

Denominatores	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
Num. propor.	3	12	48	192

aliquod ad Patiens proportionem habeat verbi gratia decuplam, ita vt Agens ſit 10. *& Patiens* 1. *quis tam mente captus erit, qui non ſtatim intelligat, ſi idem Agens augeatur, vt fiat* 20. *Patiens autem maneat* 1. *Agens tunc duplo maiorem habere potentiam reſpectu eiuſdem Patientis, quàm prius? Quare proportio vigecupla, cuius denominator* 20. *duplus eſt denominatoris* 10. *dupla eſt proportionis decupla, non autem proportio centupla, vt auctores contraria ſententia volunt: ſed tamen hac proportio centupla dicetur duplicata proportionis decupla propter multiplicationem denominatoris* 10. *in ſe, & propter duas proportiones decuplas, qua inter numeros centuplam proportionem habentes interiiciuntur, vt hic apparet,* 100. 10. 1. *Sic etiam ſi è contrario, Agens aliquod ad Patiens habeat proportionem verbi gratia ſubdecuplam, ita vt Agens ſit* 1. *& Patiens* 10. *quis tam hebes fuerit, ac rudis, qui non intelligat, Agens, quod ſit* 2. *duplo eſſe potentius reſpectu eiuſdem Patientis* 10. *quàm Agens* 1? *Cum ergo Agens* 2. *ad Patiens* 10 *habeat proportionem ſubquintuplam, cuius denominator* $\frac{1}{5}$. *vel* $\frac{2}{10}$. *conflatur ex denominatore* $\frac{1}{10}$. *bis ſumpto, erit profectò proportio ſubquintupla proportionis ſubdecupla dupla, non autem illa, qua ſubcentupla eſt, vt prædicti auctores volunt, cum hac longe minor ſit, quam ſubdecupla. Dicetur tamen proportio ſubcentupla proportionis ſubdecupla duplicata, propter cauſam ſæpius explicatam, vt hic patet,* 1. 10. 100.

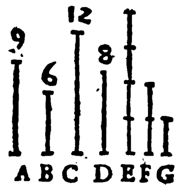
EX his, qua diximus, non obſcure colligi poteſt, proportionem duarum quantitatum, quibus nullum interponitur medium, ſapere naturam quodammodo linea, cum ex nulla alia proportione producatur. Proportionem verò, cuius quantitates intercipiunt vnicum medium in continua proportionalitate, habere conditionem ſuperficiei quadrata, quoniã gignitur ex duabus proportionibus aqualibus; quemadmodum & quadratum ex duabus lineis aqualibus conficitur. Denique proportionem, cuius quantitatibus duo media in continua proportionalitate interiiciuntur, obtinere naturam ſolidi, atque adeo cubi, cum oriatur ex tribus aqualibus proportionibus, quemadmodum etiam cubus ex tribus lineis aqualibus conſurgit. Verum de his plura inuenies apud Arithmeticos, qui Algebra regulam expoſuerunt.

XI.

HOMOLOGÆ, ſeu ſimiles ratione magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, conſequentes verò conſequentibus.

DEFINIVIT ſupra proportionalitatem, proportionum eſſe ſimilitudinem. Docet iam, non ſolum in proportionalitate quauis proportiones dici ſimiles; Verum etiam terminos ipſos, ſeu quantitates, ſimiles dici, homologaue; dicens, antecedentes magnitudines appellari ho-

lari homologas, ſeu ſimiles proportione inter ſe, nec non conſequentes inter ſe, vt intelligeremus in quam plurimis demonſtrationibus, quænam latera figurarum inter ſe comparata, antecedentia debeant eſſe proportionum, & quænam conſequentia, vt in 6. lib. perſpicuum fiet. Si igitur eſt proportio A, ad B, quæ C, ad D; dicetur quantitas A, ſimilis quantitati C; & B, ſimilis ipſi D. Propter ſimilitudinem enim proportionum, neceſſe eſt, vtramque magnitudinem antecedentem vel æqualem eſſe vtrique conſequenti, vel eodem modo maiorem, aut minorem: Alias non haberet vtraque antecedens ad vtramque conſequentem proportionem eandem. Exemplum habes in magnitudinibus propoſitis, in quibus antecedentes maiores ſunt eodem modo conſequentibus, vtpote dimidio maiores. Aliud exemplum vides in magnitudinibus E, F, G, continuè proportionalibus, vbi tam E, & F, homologæ ſunt, quam F, & G, vt conſtat. Atque hanc ob cauſam Euclides in defin. 6. & 8. iuſſit accipi æque multiplicia primæ & tertiæ magnitudinum, hoc eſt, antecedentium: Item alia æque multiplicia ſecundæ, & quartæ magnitudinum, nimirum conſequentium. Hæ enim ſimiles ſunt in magnitudinibus proportionalibus, vt ex hac definitione conſtat: in magnitudinibus vero non proportionalibus diſſimiles.



ORONTIVS, & nonnulli alij interpretes, longe aliter definitionem hanc exponunt. Putant enim Euclidem docere, in magnitudinibus proportionalibus variè inter ſe conferri poſſe & antecedentes magnitudines, & conſequentes; veluti in ſequentibus definitionibus patebit. Verum ſi verba definitionis diligentius ponderentur, & vſus eiuſdem in 6. lib. conſideretur, noſtram expoſitionem huic anteferendam eſſe, nemo dubitabit.

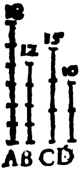
XII.

ALTERNA ratio, eſt ſumptio antecedentis ad antecedentem, & conſequentis ad conſequentem.

EXPLICAT hic quoſdam modos argumentandi in proportionibus, quorum frequentiſſimus eſt vſus apud Geometras. Hi autem ſunt numero ſex. Primus dicitur proportio alterna, ſiue permutata: Secundus, inuerſa, ſeu proportio è contrario: Tertius, compoſitio rationis, ſeu coniuncta proportionalitas: Quartus, diuiſio rationis, vel disiuncta proportionalitas; Quintus, conuerſio rationis, ſiue euerſa proportionalitas: Sextus denique vocatur proportio ex æqualitate, ſeu æqua proportio. Alterna igitur ſeu permutata proportio, inquit, eſt, cum propoſitis quatuor magnitudinibus proportionalibus, infertur eandem eſſe proportionem antecedentis prioris proportionis ad antece-

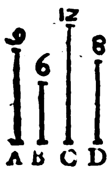
Digitized by Google

dentem poſterioris, quam habet conſequens illius ad conſequentem huius. Vt ſi ponamus proportionem A, ad B, quam C, ad D, & propterea concludamus, eandem eſſe proportionem A, ad C, quæ eſt B, ad D, dicemur argumentari à permutata proportione. Græci ſcriptores in hac argumentatione vtuntur hoc fere modo loquendi: Vt eſt A, ad B, ita C, ad D; Igitur permutando, ſeu viciſſim, erit quoque A, ad C, vt B, ad D. Firmam autem eſſe huiuſmodi illationem, demonſtrabitur propoſ. 16. lib. huius. Cæterum in hoc modo argumentandi, neceſſe eſt, omnes quatuor magnitudines eſſe eiuſdem generis, vt inter binas vt vt aſſumptas proportio eſſe poſſit. Non enim rectè infertur. Vt linea A, ad lineam B, ita numerus C, ad numerum D, ergo permutando, vt linea A, ad numerum C, ita linea B, ad numerum D; cum nulla ſit proportio lineæ ad numerum, aut contra, vt perſpicuum eſt ex defin. 5. In aliis autem modis argumentandi, qui ſequuntur; poſſunt eſſe priores magnitudines in vno genere magnitudinis, & poſteriores in alio genere magnitudinis, vt ex demonſtrationibus huius lib. 5. conſtabit.



XIII.

INVERSA ratio, eſt ſumptio conſequentis, ceu antecedentis, ad antecedentem, velut ad conſequentem.



VT ſi ex eo, quòd eſt A, ad B, vt C, ad D, inferamus, ita eſſe B, ad A, vt D, ad C, hoc eſt, conſequentes ad antecedentes referamus; dicemur argumentari ab inuerſa proportione. In hac argumentatione ſic fere loquuntur auctores. Vt eſt A, ad B, ita C, ad D; Igitur conuertendo, vel è contrario, erit quoque B, ad A, vt D, ad C; Quem quidem modum argumentandi certum eſſe, oſtendetur in coroll. propoſ. 4. huius lib. Porro duæ priores magnitudines poſſunt eſſe vnius generis, & poſteriores alterius. Rectè namque licebit inferre: Vt ſe habet linea A, ad lineam B, ita ſe habet triangulum, ſeu numerus C, ad triangulum, ſeu numerum D; Igitur inuertendo vt linea B, ad lineam A, ita triangulum, ſeu numerus D, ad triangulum, ſeu numerum C, vt ex coroll. propoſ. 4. conſtabit.

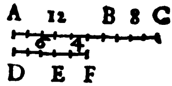
XIV.

COMPOSITIO rationis, eſt ſumptio antecedentis cum conſequente, ceu vnius, ad ipſam conſequentem.

SIT proportio A B, ad B C, quæ D E, ad E F; Si igitur ex hoc colligatur,

Digitized by Google

ligatur, eam quoque eſſe proportionem totius A C, nempe antecedentis cum conſequente, ad B C, conſequentem, quam habet tota D F, antecedens nimirum cum conſequente, ad E F, conſequentem; dicetur huiuſcemodi argumentatio compoſitio rationis, eo quod ex antecedente, & conſequente componatur aliud nouum antecedens. Hunc autem modum dicendi apud Græcos ſcriptores reperies



in hac argumentatione; Vt A B, ad B C, ita D E, ad E F, componendo ergo erit & A C, ad B C, vt D F, ad E F. Demonſtrabitur hic modus argumentandi hoc lib. propoſ. 18.

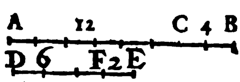
HVIC modo argumentandi per compoſitionem rationis addi poſſunt alij duo. Primus dici poteſt, Compoſitio rationis conuerſa; quando nimirum ſumitur antecedens, & conſequens, veluti vna, quæ cum antecedente conferatur. Vt ſi eſt, vt A B, ad B C, ita D E, ad E F, inferimuſque; Ergo vt A C, ex antecedente, & conſequente conflata, ad antecedentem A B, ita eſt D F, ex antecedente & conſequente compoſita, ad antecedentem D E. Quam argumentationem eſſe validam, demonſtrabimus, ad propoſ. 18. huius lib. In qua quidem hoc modo dicendi vti poterimus. Ergo per compoſitionem rationis conuerſam.

ALTER modus dici poteſt, Compoſitio rationis contraria; quando nimirum refertur eadem magnitudo antecedens ad antecedentem, & conſequentem, ceu ad vnam. Vt ſi eſt, vt A B, ad B C, ita D E, ad E F, inferimuſque per compoſitionem rationis contrariam; Igitur erit vt A B, antecedens ad totam A C, ex antecedente, & conſequente compoſitam, ita D E, antecedens ad D F, ex antecedente, & conſequente compoſitam. Atque hanc argumentandi formulam valere, ad propoſ. 18. huius lib. oſtendemus.

XV.

DIVISIO rationis, eſt ſumptio exceſſus, quo conſequentem ſuperat antecedens, ad ipſam cõſequentem.

VT ſi dicatur, quæ proportio eſt totius A B, ad C B, ea eſt totius D E, ad F E; Igitur erit & A C, exceſſus, quo antecedens conſequentem ſuperat, ad C B, conſequentem, vt D F, exceſſus, quo conſequentem excedit antecedens, ad F E, conſequentem. In diuiſione autem hac rationis ita loquuntur auctores; ergo diuidendo, &c. Hæc porrò illatio oſtendetur propoſ. 17. huius lib.



POSSVNT etiam huic argumentandi modo adiungi alij duo. Primum Diuiſionem rationis conuerſam dicere poſſumus; quando nimirum conſequens ad exceſſum, quo conſequentem ſuperat antece-

dens, refertur. Vt ſi eſt, vt A B, ad C B, ita D E, ad F E, concludimuſque per diuiſionem rationis conuerſam; Ergo erit, vt C B, conſequens ad A C, exceſſum, quo antecedens conſequentem ſuperat, ita F E, conſequens ad D F, exceſſum, quo antecedens ſuperat conſequentem. Valere autem hanc argumentationem, oſtendemus ad 17. propoſ. huius lib.

PERSPICVVM autem eſt, vt vtraque harum argumentationum per Diuiſionem rationis locum habeat, nimirum & illa Euclidis, & noſtra, antecedentem debere eſſe maiorem conſequente. Alias Diuiſio fieri non poſſet.

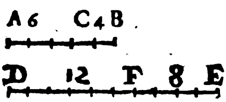
ALTER modus appellari poteſt Diuiſio rationis contraria; quãdo videlicet confertur antecedens cum exceſſu, quo conſequens antecedentem ſuperat. Vt cum dicimus. Ita ſe habet A C, ad A B, vt D F, ad D E. Igitur erit quoque per diuiſionem rationis contrariam vt A C, antecedens ad C B, exceſſum, quo conſequens antecedentem ſuperat, ita D F, antecedens ad F E, exceſſum, quo antecedentem ſuperat conſequens. Qui modus argumentandi demonſtrabitur etiam a nobis ad propoſ. 17. huius lib.

PORRO manifeſtum eſt, in hac Diuiſione rationis contraria conſequentem debere eſſe maiorem antecedente, vt ſumi poſſit exceſſus, quo conſequens antecedentem ſuperat.

XVI.

CONVERSIO rationis, eſt ſumptio antecedentis ad exceſſum, quo ſuperat antecedens ipſam conſequentem.

QVOD ſi colligamus hoc modo. Sicut eſt tota magnitudo A B, ad C B, ita tota D E, ad F E; Igitur ita etiam erit eadem A B, ad A C, exceſſum, quo conſequentem ſuperat antecedens, vt D E, ad D F; Dicemur per cõuerſionem rationis argumentari. Vnde ſic fere loquuntur ſcriptores. Igitur per conuerſionem rationis; &c. Confirmabitur autẽ hic argumentandi modus in corol. propoſ. 19. huius lib.



LIQVIDO etiam conſtat, in hoc modo argumentandi per conuerſionem rationis antecedentem debere conſequentem ſuperare, vt exceſſus, quo antecedens conſequentem ſuperat, ſumi poſſit.

XVII.

EX æqualitate ratio eſt, ſi plures duabus ſint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ ſumantur, & in eadem ratione: cum vt in primis magnitudinibus prima ad vltimam, ſic & in ſecundis magnitudinibus prima ad vltimam ſeſe habuerit.

VEL

Digitized by Google

VEL aliter. Sumptio extremorum, per ſubductionem mediorum.

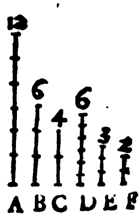
SINT plures magnitudines duabus A, B, C, & totidem D, E, F, ſintque bina ac bina in eadem proportione, hoc eſt, A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Si igitur inferatur, propterea eam eſſe proportionem A, ad C, prima ad vltimam in primis magnitudinibus, quæ eſt D, ad F, primæ magnitudinis ad vltimam in ſecundis magnitudinibus; dicetur huiuſmodi argumentandi formula deſumpta ex æquo ſiue ex æqualitate, in qua ſcilicet extremæ magnitudines, ſub ductis mediis, colliguntur habere vnam, eandemque inter ſe proportionem, vt in altera definitione exprimitur. Quoniam vero duobus modis ex æqualitate licet argumentari in proportionibus, vno quidem, quando ſumimus binas ac binas magnitudines in eadem proportione, ordinate procedendo, altero verò, cum ordo inuertitur; explicat Euclides duabus ſequentibus definitionibus, quid ſit Ordinata proportio, & quid proportio Perturbata.



XVIII.

ORDINATA proportio eſt, cum fuerit, quemadmodum antecedens ad conſequentem, ita antecedens ad conſequentem: fuerit etiam, vt conſequens ad aliud quidpiam, ita conſequens ad aliud quidpiam.

VT quando fuerit A, ad B, vt D, ad E; Rurſus vt B, conſequens ad aliud quidpiam, vt ad C, ita E, conſequens ad F, aliud quidpiam; dicetur talis proportio, Ordinata: quia idem ordo tam in primis tribus magnitudinibus, quàm in ſecundis ſeruatur; cum vtrobique conferatur primum primæ cum ſecunda; deinde ſecunda cum tertia. Quando ergo in modo argumentandi ex æqualitate ſeruatur Ordinata proportio, demonſtratur propoſ. 22. huius lib. eam argumentationem eſſe bonam.



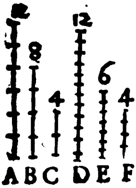
XIX.

PERTVRBATA autem proportio eſt, cum tribus poſitis magnitudinibus, & aliis, quæ ſint his multitudine pares, vt in primis quidem magnitudinibus ſe habet antecedens ad conſequentem, ita in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequentem: Vt autem

Digitized by Google

in primis magnitudinibus conſequens ad aliud quidpiam, ſic in ſecundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.

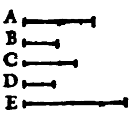
SI autem ſit, quemadmodum A, ad B, ita F, ad F; Deinde vt in primis magnitudinibus B, conſequens ad C, aliud quidpiam, ita in ſecundis magnitudinibus aliud quidpiam D, ad E, antecedentem magnitudinem, nuncupabitur huiuſcemodi proportio, Perturbata: quòd non ſeruetur idem ordo in proportionibus magnitudinum; quippe cum in primis magnitudinibus conferatur prima cum ſecunda, at in ſecundis ſecunda cum tertia; deinde in primis ſecunda cum tertia, at in ſecundis prima cum ſecunda. Quando igitur in modo argumentandi ex æqualitate ſeruatur Perturbata proportio, demonſtratur, eam argumentationem eſſe bonam, propoſ 23. huius lib. Porrò tam perturbata proportio, quam ordinata, ſemper infert ex æqualitate eandem extremorum proportionem, etiam ſi plures magnitudines ponantur, quam tres, vt ex propoſ. 22. & 23. huius lib perſpicuum fiet.



VTVNTVR Euclidis interpretes hoc libro, & in aliis, vbi de proportionibus magnitudinum agitur, axiomate quodam, quod vt hic ſubiiceremus, non inutile fore iudicauimus. Illud autem eiuſmodi eſt.

QVAM proportionem habet magnitudo aliqua ad aliam, eandem habebit quæuis magnitudo propoſita ad aliquam aliam; & eandem habebit quæpiam alia magnitudo ad quamuis magnitudinem propoſitam.

VT, quam proportionem habet A, ad B, eandem habebit magnitudo propoſita C, ad aliquam aliam, nempe ad D. Item eandem habebit quæpiam alia E, ad propoſitam C. Quamuis enim ignoremus interdum, quænam ſit quarta illa magnitudo, dubitandum tamen non eſt, eam eſſe poſſe in rerum natura, cum id contradictionem non implicet, vt Philoſophi loquuntur, neque abſurdi aliquid ex eo conſequatur.



1\. THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI ſint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, ſingulæ ſingularum, æque multiplices; quam multiplex eſt vnius vna magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.

SINT quotcunque magnitudines AB, CD, totidem magnitudinum

tudinum E, F, æque multiplices. Dico magnitudi[illegible]A B, C D, ſimul, tam eſſe multiplices magnitudinum E, F, ſimul, quam eſt multiplex A B, ipſius E, vel C D, ipſius F. Cum enim A B, C D, ſint æque multiplices ipſarum E, & F, ſi A B, diuidatur in magnitudines A G, G H, H B, ipſi E, æquales, & C D, quoque in magnitudines C I, I K, K D, ipſi F, æquales; (Diuidi autem poterit quælibet in partes omnino æquales, cum A B, C D, ſint ipſarum E, F, æque multiplices, atque ideo toties E, in A B,



perfectè contineatur, quoties F, in C D, vt ex ijs, quæ in defin. 2. huius lib. ſcripſimus, conſtat) erunt magnitudines A G, G H, H B, tot numero, quot ſunt magnitudines C I, I K, K D. Quoniam vero A G, & E, æquales inter ſe ſunt, ſi ipſis addantur æquales C I, & F, a erunt A G, C I, ſimul, æquales ipſis E, & F, ſimul. Eodem modo erunt G H, & I K, ſimul æquales ipſis E, & F, ſimul; Nec non H B, & K D, eiſdem E, & F. Quoties igitur E, in A B, vel F, in C D, continetur, toties & E, F, ſimul, in A B, C D, ſimul comprehenduntur: Ideoque, quam multiplex eſt A B, ipſius E, tam ſunt multiplices A B, C D, ſimul, ipſarum E, & F, ſimul, vt conſtat ex ijs, quæ in defin. 2. huius lib. ſcripſimus. Quare ſi ſint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, &c. Quod erat demonſtrandum. a 2. pronun.

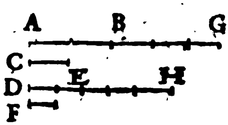
SCHOLIVM.

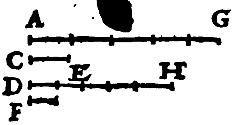
HOC idem demonſtrabitur vniuerſe propoſ. 12. in omni genere proportionis, tam rationalis, quàm irrationalis. Neceſſarium autem fuit, idipſum prius hoc loco in proportione multiplici demonſtrare, quia ex eo alia propoſitiones demonſtrandæ ſunt, antequam propoſitio 12. poſſit demonſtrari.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

SI prima ſecundæ æque fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta ſecundæ æque multiplex, atque ſexta quartæ; erit & compoſita prima cum quinta, ſecundæ æque multiplex, atque tertia cum ſexta, quartæ.

SIT magnitudo prima A B, tam multiplex ſecundæ C, quam eſt multiplex D E, tertia, quartæ F; Rurſus tam ſit multiplex B G, quinta ipſius C, ſecundæ, quam multiplex eſt E H, ſexta ipſius F, quartæ. Dico A B, primam cum B G, quinta compoſi-

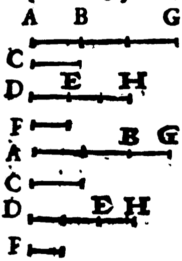




tam, tam multiplicem eſſe ſecundæ C, quam multiplex eſt, D E, tertia compoſita cum ſexta E H, ipſius F, quartæ. Cum enim A B, ſint æque multiplices ipſarum C, F, erunt in A B, tot magnitudines ipſi C, æquales, quot ſunt in D E, æquales ipſi F. Eadem ratione erunt & in B G, tot æquales ipſi C, quot ſunt in E H, æquales ipſi F. Si igitur æqualibus multitudinibus A B, D E, addantur æquales multitudines B G, E H, erunt totæ multitudines A G, D H, æquales. Quare toties comprehenditur C, in A G, quoties F, in D H: Ideoque tam multiplex eſt A B, (prima compoſita cum quinta) ipſius C, ſecundæ, quam multiplex eſt D H, (tertia compoſita cum ſexta) ipſius F, quartæ. Si prima itaque ſecundæ fuerit multiplex, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

QVOD ſi prima magnitudo, & tertia, æquales fuerint ſecundæ, & quartæ; Quinta vero & ſexta, æque multiplices ſecundæ, & quartæ. Vel prima, & tertia æque multiplices fuerint ſecundæ, & quartæ; At quinta & ſexta, æquales ſecundæ, & quartæ: Erit eadem ratione, tota A G, (prima & quinta) tam multiplex ſecundæ C, quam multiplex eſt tota D H, (tertia ac ſexta) ipſius F, quartæ. Semper enim A G, multitudo magnitudinum æqualium ipſi C, oſtendetur æqualis eſſe ipſi D H, multitudini magnitudinum ipſi F, æqualiũ, vt perſpicuum eſt in appoſitis figuris.



Si vero tam prima & tertia, quam quinta, & ſexta æquales ponantur ſecundæ, & quartæ, luce clarius eſt, primam & quintam ſimul, atque tertiam & ſextam ſimul, æque multiplices eſſe, nimirum duplices, ſecundæ & quartæ magnitudinum.

HOC quoque ab Euclide concludetur, in omni genere proportionis vniuerſe propoſ. 24. ſed operæ pretium fuit, idipſum prius in proportione multiplici demonſtrare, vt ea, quæ ſequuntur, demonſtrari poſſint.

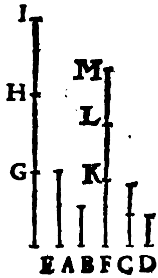
iij.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI ſit prima ſecundæ æque multiplex, atque tertia quartæ; ſumantur autem æque multiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æquo, ſumptarum vtraque vtriuſque æque multiplex, altera quidem ſecundæ, altera autem quartæ.

SIT prima magnitudo A, tam multiplex ſecundæ B, quam multiplex

tiplex eſt G, tertia quartæ D; ſumanturque E, F, æquè multiplices primæ & tertiæ A, & C. Dico ex æquo tam multiplicem eſſe E, ipſius B, ſecundæ, quam eſt F, ipſius D, quartæ. Nam cùm E, & F, ſint æquè multiplices ipſarum A, & C; ſi diſtribuantur E, & F, in magnitudines ipſis A, & C, æquales, vt in E G, G H, H I, & F K, K L, L M, erunt tot partes in E, æquales ipſi A, quot ſunt in F, æquales ipſi C. Quoniam verò E G, F K, æquales ſunt ipſis A, & C; ſunt autem A, & C, æquè multiplices ipſarum B, & D, ex hypotheſi; Erunt & E G, F K, earundem B, & D, æquè multiplices. Pari ratione erunt G H, K L. Item H I, L M, æquè multiplices earundem B, & D; Quoniam igitur E G, prima magnitudo, tam eſt multiplex ſecundæ B, quàm eſt multiplex F K, tertia quartæ D; Item G H, quinta tam multiplex eſt eiuſdem ſecundæ B, quàm multiplex eſt K L, ſexta eiuſdem quartæ D. *a* Erit & E H, compoſita ex prima & quinta, tam multiplex ſecũdæ B, quàm eſt multiplex F L, compoſita ex tertia & ſexta, quartæ D. Rurſus cùm ſit E H, prima tam multiplex ſecundæ B, quàm multiplex eſt F L, tertia quartæ D, vt proximè demonſtratum eſt; ſit autem & H I, quinta tam multiplex ſecundæ B, quàm eſt L M, ſexta multiplex quartæ D; *b* Erit & E I, compoſita ex prima & quinta, tam multiplex ſecundæ B, quàm eſt F M, compoſita ex tertia ac ſexta, multiplex quartæ D. Eademque eſt ratio, ſi plures fuerint partes in E, & F. Si ſit ergo prima ſecundæ æquè multiplex, atque tertia quartæ, &c. Quod oſtendendum erat.



a 2. *quinti.*

b 2. *quinti.*

SCHOLIVM.

OSTENDETVR hoc theorema, propoſ. 22. non ſolùm in magnitudinibus æquè multiplicibus, ſed etiam in omnibus, quæ bina ſumpta eandem habent proportionem, ſiue rationalem, ſiue irrationalem, ſed neceſſarium fuit ipſum prius hic in proportione multiplici demonſtrare, vt inſequens propoſ. 4. demonſtrari poſſit.

THEOR. 4. PROPOS. 4. iiij.

SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æquè multiplices primæ & tertiæ, ad æquè multiplices ſecundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, ſi prout inter ſe reſpondent, ita ſumptæ fuerint.

SIT proportio A, ad B, quæ C, ad D, ſumanturque primæ A, & tertiæ C, æquè multiplices E, & F; Item ſecundæ B, & quartæ D, æque multiplices G, & H, iuxta quamuis multiplicationem:

Digitized by Google

ſiue E, F, ita multiplices ſint ipſarum A, C, ſicut G, H, ipſarum B, D, ſiue non. His poſitis, conſtat ex defin. 6. huius lib. ſi E, deficit à G, etiam F, deficere ab H: Et ſi E,



23. quinti.

æqualis eſt ipſi G, etiam F, æqualem eſſe ipſi H: Et denique ſi E, excedit G, etiam F, excedere H. Alioquin non eſſet, per defin. 6. eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, ſi earum æquè multiplicia non ſemper ita ſe haberent. Dico tam, multiplicia primæ ac tertiæ non ſolùm vnà deficere à multiplicibus ſecundæ ac quartæ, aut vnà æqualia eſſe, aut vnà excedere, vt diximus, ſed eandem quoque inter ſe proportionem habere, nimirum ita eſſe E, multiplicem primæ A, ad G, multiplicem ſecundæ B, vt F, multiplicem tertiæ C, ad H, multiplicem quartæ D. Hoc eſt, ſi rurſus E, ſtatuatur prima magnitudo; G, ſecunda; F, tertia, & H, quarta; ſumanturque ipſarum E, F, æquè multiplicia qualiacunque; Item ipſarum G, H, quæcunque etiam æquè multiplicia; Multiplicia ipſarum E, F, à multiplicibus ipſarum G, H, vel vnà deficere, vel vnà æqualia eſſe, vel vnà excedere, vt vult definitio 6. Idem namque eſt, quatuor magnitudines eandem habere proportionem, & earum æquè multiplicia ſumpta diximus, vel vnà deficere, vel vnà æqualia eſſe, vel vnà excedere. Capiantur enim rurſus I, K, ipſarum E, F, æquè multiplices; Item L, M, æquè multiplices ipſarum G, H. Quoniam igitur tam multiplex eſt E, prima ipſius A, ſecundæ, quam F, tertia ipſius C, quartæ; ſumptæ ſunt autem & I, K, æquè multiplices ipſarum E, F, primæ ac tertiæ: *b* Erunt quoque ex æquo I, K, æquè multiplices ipſarum A, C, ſecundæ & quartæ. Eadem ratione erunt L, M, ipſarum B, D, æquè multiplices. Et quia ponitur proportio A, primæ ad B, ſecundam, quæ C, tertiæ ad D, quartam, oſtenſæque ſunt I, K, æquè multiplices primæ & tertiæ A, C. Item L, M, æquè multiplices ſecundæ & quartæ B, D, *c* ſit, vt ſi I, multiplex primæ deficit ab L, multiplici ſecundæ, etiam K, multiplex tertiæ neceſſario deficiat ab M, multiplici quartæ: & ſi I, æqualis eſt ipſi L, etiam K, ipſi M, ſit neceſſariò æqualis: & denique ſi I, excedit ipſum L, etiam K, excedat neceſſariò ipſum M: Idemque oſtendetur in quibuſcunque æquè multiplicibus magnitudinum E, & F, nec non magnitudinum G, & H: quia ſemper hæc æquè multiplicia, quæcunque ſint, *d* æquè multiplicia quoque erunt magnitudinum A, C, & B, D. Itaque cùm I, & K, ſint æquè multiplices primæ E, & tertiæ F; Item L, & M, æquè multiplices ſecundæ G, & quartæ H; oſtenſumque ſit, ſi I, multiplex primæ minor fuerit, quàm L, multiplex ſecundæ, multipli-

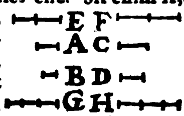
Margin notes: b 3. quinti. — c 6. defi. quinti. — d 3. quinti.

çem

cem tertiæ K, minorem quoque eſſe, quàm M, multiplicem quartæ, &c. atque hoc contingere in quacunque multiplicatione: *a* Erit, vt E, prima ad G, ſecundam, ita F, tertia ad H, quartam. Si prima igitur ad ſecundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonſtrandum. *a 6. def. quinti.*

COROLLARIVM.

HINC facilè demonſtrabitur Inuerſa ratio, quam Euclides defin. 13. explicauit, hoc eſt, ſi quatuor magnitudines fuerint proportionales, eaſdem & contra, ſeu inuerſa ratione proportionales eſſe. Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico eſſe conuertendo, vt B, ad A, ita D, ad C. Sumptis enim E, F, æquè multiplicibus ipſarum A, C, primæ ac tertiæ; Item G, H, æquè multiplicibus ipſarum B, D, ſecundæ & quartæ: quoniam ex eo, quod A, prima ad B, ſecundam ſe habet, vt C, tertia ad D, quartam, *b* neceſſariò ſequitur, ſi E, multiplex primæ minor fuerit quàm, G, multiplex ſecundæ, vel æqualis, vel maior, etiam F, multiplicem tertiæ minorem eſſe, vel æqualem, vel maiorem, quàm H, multiplicem quartæ; Perſpicuum eſt, ſi è contrario G, maior fuerit quàm E, vel æqualis, vel maior, etiam H, maiorem fore, vel æqualem, vel maiorem, quàm F, ſecundum quamcunque multiplicationem ſint ſumpta hæc æquè multiplicia. Nam ſi vtraque E, F, minor eſt, quàm vtraque G, H, erit contra vtraque G, H, maior quàm vtraque E, F, & ſi vtraque E, F, æqualis eſt vtrique G H, erit è contrario, vtraque G, H; vtrique E, F, quoque æqualis: Et denique ſi vtraque E, F, maior eſt, quàm vtraque G, H, erit vice verſa, vtraque G, H, minor, quàm vtraque E, F, Itaque quoniam primæ B, & tertiæ D, ſumpta ſunt, æquè multiplicia G, H; Item ſecundæ A, & quartæ C, æquè multiplicia E, F, oſtenſumque eſt, G. H, vel vnà excedere E, F, vel vnà æqualia eſſe, vel vna deficere, ſecundum quamcunque multiplicationem ea multiplicia ſumantur; *c* erit vt B, prima ad A, ſecundam, ita D, tertia ad C, quartam. Quod erat demonſtrandum. *b 6. def. quinti.* *c 6. def. quinti.*



SCHOLIVM.

HÆC propoſitio cum ſuo corollario vera eſt, ſiue duæ magnitudines A, B, ſint eiuſdem generis cum duabus magnitudinibus C, D, ſiue non, vt ex demonſtratione liquet.

ORONTIVS quartum hoc Theorema ſic conatur demonſtrare. Poſtquam ex 3. propoſitione huius libri oſtendit I, K, eſſe æquè multiplices magnitudinum A, C; item L, M, eſſe æquè multiplices magnitudinum B, D, infert ſtatim per conuerſum 6. definitionis, iuxta ſuam expoſitionem, ita eſſe I, ad L, vt K, ad M. Quare per eandem definitionem, inquit, erit quoque E, ad G, vt F, ad H. Quæ quidem demonſtratio admodum eſt vitioſa, tum quia ſecundum hunc ſenſum demonſtratur idem per idem, nimirum datis quatuor magnitudinibus

propor-

Digitized by Google

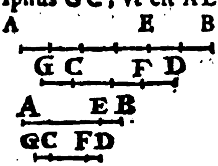


proportionalibus, æque multiplices prima ac tertia ad æquè multiplices ſecunda & quarta eandem habere proportionem, ex eo, quod ex 6. defin vt ipſe explicauit, æquè multiplices prima ac tertia ad æquè multiplices ſecunda & quarta eandem habent proportionem; quod eſt abſurdum: tum etiam, quia eodem modo ſtatim à principio licuiſſet illi inferre, ſic eſſe, per 6 defin. E, ad G, vt F, ad H, ſine acceptione nouarum magnitudinũ æquè multiplicium. Non enim eſt maior ratio in illis, quàm in his. Reÿcienda eſt ergo huiuſcemodi demonſtratio, vnà cum expoſitione 6 definitionis, vt ſupra diximus. At iuxta noſtram interpretationem eiuſdem definitionis conſtat ſolùm, ſi I, minor eſt, quàm L, vel æqualis, vel maior, etiam K, minorem eſſe, vel æqualem, vel maiorem, quàm M; quemadmodum & idem conſtat in æquè multiplicibus E, F, G, H, & in quibuſcunque alÿs, ſi ſumantur, prout inter ſe reſpondent. Vnde ex 6. defin. rectè colligitur, ita eſſe E, primã ad G, ſecundam, vt eſt F, tertia ad H, quartam, quandoquidem illis 6. definitio conuenit.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI magnitudo magnitudinis æquè fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius.

ITA multiplex ſit tota A B, totius C D, vt eſt multiplex A E, ablata ablatæ C F, ſiue A E, C F, ablatæ ſint totis A B, C D, commenſurabiles, vt in prima figura, ſiue incommenſurabiles, vt in ſecunda figura. Item ſiue A E, C F, compoſitæ ſint ex eiſdem partibus, ex quibus totæ A B, C D, componuntur, vt in priori figura, ſiue non ex eiſdem, vt in poſteriori figura. Dico reliquam E B, ita eſſe multiplicem reliquæ F D, vt eſt tota A B, totius C D. Ponatur enim E B, ita multiplex cuiuſpiam magnitudinis, videlicet ipſius G C, vt eſt A E, multiplex ipſius C F, vel tota A B, totius



C D. Quoniam igitur A E, E B, æquè ſunt multiplices ipſarum C F, G C; a erit tota A B, totius G F, ita multiplex, vt A E, ipſius C F, hoc eſt, omnes omniũ, vt vna vnius: Sed tam multiplex etiam ponitur A B, ipſius C D, quàm eſt multiplex A E, ipſius C F. Igitur A B, tam eſt multiplex ipſius G F, quàm multiplex eſt ipſius C D; b atque idcirco æquales ſunt G F, C D. Ablata igitur communi C F, æquales erunt G C, F D. Tam multiplex igitur erit E B, ipſius F D, quàm multiplex eſt ipſius

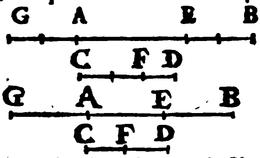
a 1. quinti.

b 6. pronun.

Digitized by Google

ipſius G C. Sed ita multiplex poſita fuit E B, ipſius G C, vt A E, ipſius C F, hoc eſt, vt tota A B, totius C D. Quare tam multiplex eſt reliqua E B, reliquæ F D, quàm eſt tota A B, totius C D: quod eſt propoſitum.

ALITER. Sit ita multiplex tota A B, totius C D, vt ablata A E, ablatæ C F. Dico reliquam E B, reliquæ F D, eſſe ſic multiplicem, vt eſt tota totius. Poſita enim G A, ita multiplici ipſius F D, vt eſt A E, ipſius C F, vel vt tota A B, totius C D: quoniam A E, G A, æquè multiplices ſunt ipſarum C E, F D; *a* erit tota G E, ſic multiplex totius C D, vt A E, ipſius C F: Sed ita quoque multiplex eſt A B, eiuſdem C D, vt A E, ipſius C F, ex hypotheſi. Aequè multiplices ſunt igitur G E, A B, ipſius C D; *b* atque adeò inter ſe æquales. Quare, dempta communi A E, æquales erunt G A, E B: Ideoque æquè multiplices ipſius F D; cùm G A, ſit multiplex poſita ipſius F D. Atqui ita eſt multiplex poſita G A, ipſius F D, vt A B, ipſius C D. Igitur & E B, reliqua ſic erit multiplex ipſius F D, reliquæ, vt A B, tota totius C D; quod eſt propoſitum. Si magnitudo itaque magnitudinis æquè fuerit multiplex, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 21. *quinti.*
b 6. *pronun.*

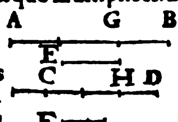
SCHOLIVM.

VNIVERSE idipſum demonſtrabitur propoſ. 19. in magnitudinibus cuiuſcunque proportionis, & non tantùm multiplicis, vt hic eſt factum.

THEOR. 6. PROPOS. 6. vj.

SI duæ magnitudines duarum magnitudinum ſint æquè multiplices, & detractæ quædam ſint earundem æquè multiplices: & reliquæ eiſdem aut æquales ſunt, aut æquè ipſarum multiplices.

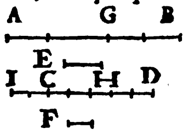
SINT magnitudines A B, C D, æquè multiplices ipſarum E, F; & detractæ A G, C H, earundem E, F, æquè multiplices. Dico reliquas G B, H D, aut eſſe æquales eiſdem E, F, aut certè earundem æque multiplices. Cùm enim A B, ſit multiplex ipſius E, & ablata quoque A G, eiuſdem E, multiplex; erit reliqua G B, vel æqualis ipſi E, vel eius multiplex; alias inæqualis, vel non multiplex magnitudo addita multiplici, componeret multiplicem, quod eſt abſurdum. Sit igitur primum G B, æqualis ipſi E. Dico etiam H D, ipſi F, eſſe æqualem. Ponatur enim C F, æqualis ipſi F. Et quia prima A G, tam eſt multiplex ſecundæ E, quàm C H, tertia multiplex eſt quar-



tæ F;

tæ F; & quinta G B, æqualis eſt ſecundæ E, ſicut & C I, ſexta æqualis eſt quartæ F; *a* erit A B, prima cum quinta, ita multiplex ſecundæ E, vt H I, tertia cum ſexta, multiplex eſt quartæ F: Atqui C D, ipſius F, erat quoque tam multiplex, quàm A B, multiplex eſt ipſius E. Aequè multiplices igitur ſunt H I, C D, ipſius F. *b* Ideoque æquales inter ſe. Quare, dempta C H, communi, remanebunt C I, H D, æquales. Cùm igitur C I, poſita ſit æqualis ipſi F, erit quoque H D, eidem F, æqualis. Quod eſt propoſitum.

a 2. *quinti.* b 6. *pronun.*



SIT deinde G B, multiplex ipſius E. Dico ita quoque eſſe multiplicem H D, ipſius F. Poſita namq; C I, ita multiplici ipſius F, vt eſt multiplex G B, ipſius E; *c* erit, vt priùs A B, ita multiplex ipſius E, vt H I, multiplex eſt ipſius F. *d* Quare iterum æquales erunt H I, C D; atq; adeò dempta communi C H, & reliquæ C I, H D, æquales erunt: Sed C I, eſt ita multiplex ipſius F, vt G B, ipſius E, multiplex eſt, ex hypotheſi. Igitur & H D, tam multiplex erit ipſius F, quàm G B, ipſius E, multiplex eſt. quod eſt propoſitum. Si duæ itaque magnitudines duarum magnitudinum ſint æquè multiplices, &c. Quod oſtendendum erat.

c 2. *quinti.* d 6. *pronun.*

SCHOLIVM.

HOC quoque oſtendemus vniuerſè propoſ. 24. in omni genere proportionis.

BREVIVS totam propoſ. ita demonſtrabimus. Quoniam A B, C D, ſunt ipſarum E, F, æquè multiplices; erunt in A B, tot magnitudines æquales ipſi E, quot ſunt magnitudines in C D, æquales ipſi F. Rurſus quia A G, C H, earundem E, F, æquè multiplices ſunt; erunt quoque in A G, tot magnitudines ipſi E, æquales, quot ſunt magnitudines in C H, ipſi F, æquales. Si igitur ex æqualibus multitudinibus A B, C D, demantur multitudines æquales A G, C H; remanebunt multitudines G B, H D, æquales. Quare toties continebitur E, in G B, quoties F, continetur in H D: ac proinde ſi G B, æqualis ſit ipſi E, erit quoque H D, ipſi F, æqualis: Si autem G B, multiplex ſit ipſius E; erit ita multiplex H D, ipſius F, vt G B, multiplex eſt ipſius E: quandoquidem toties E, in G B, continetur, quoties F, in H D, exiſtit, vt oſtenſum eſt.

vij. THEOR. 7. PROPOS. 7.

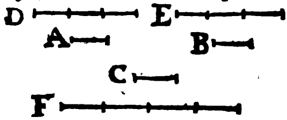
ÆQVALES ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales.

SINT duæ magnitudines A, B, æquales inter ſe, & tertia quæuis C. Dico A, & B, habere eandem proportionem ad C. Item C, viciſſim ad A, & B, eandem quoque proportionem habere.

Digitized by Google

bere. Sumantur D, E, æquè multiplices ipſarum æqualium A, B; a erunt q; D, E, æquales inter ſe. Capiatur rurſus F, vtcunq; multiplex ipſius C. Quoniam igitur D, E, æquales ſunt, fit vt vtraque vel minor ſit, quàm F, vel æqualis, vel maior, iuxta quamcunque multiplicationem ea multiplicia ſumantur. Quare cùm D, E, æquè multiplices primæ A, & B, tertiæ, minores ſint ipſa F, multiplice ſecundæ & quartæ C, (eſt enim C, inſtar duarum magnitudinum, &c.) vel æquales, vel maiores; b erit ea proportio primæ A, ad C, ſecundam, quæ tertiæ B, ad C, quartam.

a 6 pronun.



b 6. def. quinti.

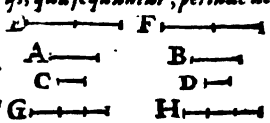
EODEM pacto oſtendemus F, vel minorem eſſe vtraque D, E, vel vtrique æqualem, vel maiorem. Igitur cùm F, multiplex primæ & tertiæ C, vnà deficiat à D, & E, æquæ multiplicibus ſecundæ A, & quartæ B; vel vnà æqualis ſit, vel maior; c Erit quoque ea proportio primæ C, ad ſecundam A, quæ tertiæ C, ad quartam B; quod eſt propoſitum. Poſſet breuiùs ſecunda hæc pars oſtendi per coroll. 4. propoſ. ex inuerſa ratione. Cùm enim oſtenſum iam ſit, eſſe A, ad C, vt B, ad C, erit conuertendo C, ad A, vt C, ad B. Aequales ergo ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales. quod erat demonſtrandum.

c 6. def. quinti.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM eſt, nihil poſſe in hac propoſ. colligi ex defin. 6. iuxta expoſitionem Campani ac Orontij. Neque enim per demonſtrationem conſtat, vtramque multiplicem D, & E, eandem habere proportionem ad multiplicem F, ſed ſolùm, cùm illa ſint æquales, vtramque eſſe vel minorem, vel æqualem, vel maiorem multiplici F. Idemque cernitur in omnibus ferè propoſitionibus, quæ per 6. definitionem propoſitum colligunt: Vt meritò illa expoſitio reiecta ſit à nobis.

EODEM ferè modo oſtendemus, æquales magnitudines ad alias inter ſe æquales, eandem habere rationem, ſi loco multiplicis F, ſumantur duæ æquè multiplices: quod Euclides, ob facilitatem omiſit, vtitur tamen eo nonnunquam in ijs, quæ ſequuntur, perinde ac ſi in hac propoſ. 7. eſſet demonſtratum.



Sint enim tam A, & B, inter ſe æquales, quàm C, & D, inter ſe. Dico eſſe A, ad C, vt B, ad D. Sumptis enim E, & F, æquè multiplicibus ipſarum A, & B, primæ & tertiæ. Item G, & H, æquè multiplicibus ipſarum C, & D, ſecundæ & quartæ; d erunt tam E, & non.

d 6. pronun.

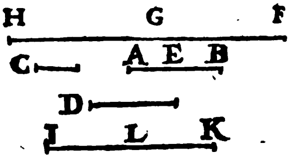
E, & F, inter ſe æquales, quàm G, & H, inter ſe. Quare ſi E, multiplex prima deficit à G, multiplice ſecunda, etiam F, multiplex tertia, ab H, multiplice quarta deficiet; & ſi æqualis, æqualis; & ſi ſuperat, ſuperabit. a *Eadem ergo eſt proportio A, prima ad C, ſecundam; quæ B, tertia ad D, quartam. Quod eſt propoſitum.*

a 6. defin. quinti.

viij.

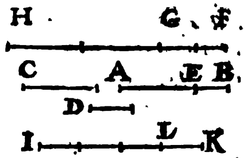
THEOR: 8. PROPOS. 8.

INÆQVALIVM magnitudinum maior ad eandem, maiorem rationem habet, quàm minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam ad maiorem.



SINT magnitudines inæquales, A B, maior, & C, minor, Tertia autem quælibet D. Dico proportionem A B, ad D, maiorem eſſe proportione C, ad D. At è conuerſo, maiorem eſſe proportionem D, ad C, quam D, ad A B. Intelligatur enim in A B, magnitudine maiore, magnitudo A E, æqualis minori C, vt ſit reliqua E B. Vtraque deinde E B, A E, æqualiter multiplicetur, hac lege, vt G F, multiplex ipſius E B, maior quidem ſit, quàm D; At H G, multiplex ipſius A E, non ſit minor eadem D, ſed vel maior, vel æqualis. In priori figura neceſſe fuit ſumere G F, H G, triplas ipſarum E B, A E; quia dupla ipſius A E, eſſet minor, quàm D. Loco triplarum potuiſſent accipi quæcunque aliæ æquè multiplices maiores. In poſteriori autem figura ſatis eſt, ſumere ipſarum E B, A E, duplas G F, H G; quia vtraque G F, H G, maior eſt quàm D. Poſſent tamen pro duplis ſumi quæcunque aliæ maiores æquè multiplices. Quoniam igitur duæ F G, G H, æquè multiplices ſunt duarum B E, E A; erit & tota F H, ita multiplex totius A B, vt H G, ipſius A E, hoc eſt, ipſius C, cùm æquales ſint poſitæ C, & A E. Capiatur quoque ipſius D, multiplex I K, quæ proximè maior ſit, quàm H G, nempe dupla, vt in priori figura. Quod ſi dupla maior non fuerit quàm H G, ſumatur tripla, vel quadrupla, &c. In poſteriori figura accepta eſt I K, ipſius D, quadrupla, quia tam dupla, quàm tripla minor eſt, quàm H G, at quadrupla iam maior eſt. Abſciſſa ergo L K, quæ æqualis ſit ipſi D, non erit I L, maior, quàm H G, (aliàs I K, non eſſet multiplex ipſius D, proximè maior quàm H G; ſed & I L, maior quoq; eſſet quàm H G. Quod ſi I K, dupla ſit ipſius D, perſpicuum eſt, I L, non eſſe maiorem, quàm H G, cùm H G, poſita ſit non minor quàm D, hoc eſt, quàm I L,) & idcirco H G, erit vel æqualis ipſi I L, vel maior. Et quia F G, maior eſt poſita quàm D; L K, vero æqualis eidem D; erit quoque F G, maior quàm L K. Cùm ergo

H G, non



HG, non minor ſit quàm IL, vt demonſtratum eſt, ſed vel æqualis, vel maior; erit tota FH, maior quàm IK. Itaque cùm FH, HG, ſint æquè multiplices primæ AB, & tertiæ C; atque IK, multiplex ipſius D, quæ inſtar eſt ſecundæ & quartæ: ſit autem FH, multiplex primæ, maior quàm IK, multiplex ſecundæ; At HG, multiplex tertiæ, non ſit maior quàm IK, multiplex quartæ, immò minor, ex hypotheſi; (ſumpta enim eſt IK, multiplex ipſius D, maior quàm HG,) erit maior proportio AB, primæ ad D, ſecundam, quam C, tertiæ ad D, quartam.

QVONIAM verò è contrario IK, multiplex primæ D, (ponatur enim nunc D, prima ac tertia; At C, ſecunda & AB, quarta) maior eſt quàm HG, multiplex ſecundæ C; At IK, multiplex tertiæ D, maior non eſt, quàm FH, multiplex quartæ AB, immò minor, cùm FH, maior ſit, quàm IK, vt oſtenſum eſt; erit maior proportio D, primæ ad C, ſecundam, quam D, tertiæ ad AB, quartam: quod eſt propoſitum. Inæqualium igitur magnitudinum maior ad eandem, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

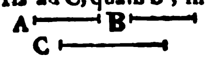
RECTE autem animaduertit Petrus Nonius in ſua Algebra de Proportione agens, per hanc propoſ. 9. probari non poſſe, angulum rectum maiorem habere proportionem, ad quemuis alium angulum, quàm angulum ſemicirculi ad eundem illum angulum, quanquam rectus angulus maior ſit angulo ſemicirculi: quia exceſſus anguli recti ſupra angulum ſemicirculi, qui eſt angulus contingentiæ, quantumuis multiplicatus ſuperare nequit tertium illum angulum, quod tamen in huius propoſ. demonſtratione requiritur. Nam FG, multiplex exceſſus EB, ſuperare debet tertiam magnitudinem D, vt patuit. Neque hoc mirum cuipiam videatur. Nam angulus rectus ad angulum ſemicirculi non dicitur propriè habere proportionem, cùm eum excedat angulo contactus, qui eiuſdem naturæ non eſt cum vtroque angulo, quòd ita multiplicari non poſſit, vt alterutrum illorum tandem excedat. Quemadmodum enim, ſi ad lineam vnius palmi addi poſſet punctum, vt fieret linea vno puncto lineam vnius palmi excedens, non diceretur propriè linea illa compoſita maior, quàm linea vnius palmi, propterea quòd exceſſus eſt indiuiſibilis, & alterius naturæ; Item quemadmodum ſi ad figuram planam quamcunque apponeretur linea vnius palmi, non diceretur hæc magnitudo ex diuerſis magnitudinibus conflata ad figuram illam planam habere propriè proportionem maioris inæqualitatis: quòd exceſſus non ſit eiuſdem naturæ cum plana illa figura; Ita quoque non habet angulus

rectus propriè ad angulum ſemicirculi proportionem maioris inæqualitatis; quippe cùm angulo ſemicirculi adiectus ſit angulus contactus, vt efficiatur angulus rectus; atque adeò rectus angulus angulum ſemicirculi excedat quantitate diuerſa natura, vt dictum eſt. Itaque non ſolùm eæ magnitudines proportionem propriè non habent, quarum alterutra multiplicata alteram ſuperare nequit, vt ad defin. 5. huius lib. diximus: ſed neque eæ propriè dicentur habere proportionem, vt idem Petrus Nonius annotauit, quarum exceſſus diuerſam ab eis naturam habet, cuiuſmodi ſunt angulus rectus, & angulus ſemicirculi. Adeò vt tunc ſolùm propriè magnitudines dicantur habere proportionem inter ſe, quando & alterutra multiplicata alteram ſuperare poteſt, & exceſſus earum multiplicatus ſuperare quoque poteſt vtramque. Fateor rem hanc eſſe perobſcuram, & quæ vix rectè intelligi poſſit: Verum hoc prouenit ex indiuiſibilitate anguli contactus per lineam rectam. Huius generis ſunt alia nonnulla in rebus Geometricis, quæ veriſſima quidem ſunt propter demonſtrationem euidentem, ſed alia ex parte talem inducunt difficultatem, vt ab ea non facilè intellectus ſe expediat. Verbi gratia, Veriſſimum eſt, ſphæram tangere planum in puncto, vt à Theodoſio demonſtratur propoſ. 3. lib. 1. Sed qua ratione fiat, vt hinc non ſequatur, ſi globus continuè moueatur ſuper planum, lineam rectam deſcribi compoſitam ex punctis, nemo ad hunc vſque diem ſic explicauit, vt omni ex parte difficultas ſit ſublata.

ix. THEOR. 9. PROPOS. 9.

QVÆ ad eandem, eandem habent rationem, æquales ſunt inter ſe: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoq; ſunt inter ſe æquales.

HABEANT primum A, & B, eandem rationem ad C; Dico A, & B, eſſe inter ſe æquales. Sit enim, ſi fieri poteſt, altera, nempe A, maior, & B, minor. *a* Erit igitur maior proportio A, maioris ad C, quàm B, minoris ad eandem C; quod eſt contra hypotheſin. Non ergo inæquales ſunt A, & B, ſed æquales. Habeat deinde C, eandem proportionem ad A, & B; Dico rurſus A, & B, eſſe æquales. Nam ſi altera, nempe A, eſſet maior, & B, minor; *b* haberet C, ad B, minorem, maiorem proportionem, quàm ad A, maiorem: quod eſt contra hypotheſin. Non igitur maior erit A, quàm B, ſed æqualis. Quæ igitur ad eandem, eandem habent rationem, &c. Quod demonſtrandum erat.



a 8. *quinti.*

b 8. *quinti.*

SCHOLIVM.

CONVERTIT hæc propoſitio 9. vtramque partem theorematis 7. vt manifeſtum eſt.

THEOR.

THEOR. 10. PROPOS. 10. x.

AD eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior eſt: Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor eſt.

HABEAT primum A, ad C, maiorem proportionem, quàm B, ad eandem C. Dico A, maiorem eſſe, quàm B: Si enim A, foret ipſi B, æqualis, *a* haberent A, & B, eandem proportionem ad C: Si autem A, minor eſſet, quàm B, *b* haberet B, maior ad C, proportionem maioré, quàm A, minor ad eandem C, quod eſt contra hypotheſin. Nõ eſt igitur A, æqualis vel minor quàm B, ſed maior. Habeat ſecundò C, ad B, maiorem proportionem, quàm ad A. Dico B, minorem eſſe quàm A. Non enim æqualis erit B, ipſi A; *c* alioquin haberet C, eandem proportionem ad A, & B; quod eſt contra hypotheſin. Neque verò B, maior erit quàm A, *d* aliàs haberet C, ad minorem A, maiorem proportionem quàm ad B, maiorem: quod magis eſt contra hypotheſin. Minor igitur eſt B, quàm A, quod eſt propoſitum. Ad eandem igitur magnitudinem rationem habentium, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 7. quinti.
b 8. quinti.
c 7. quinti.
d 8. quinti.

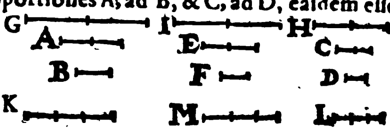
SCHOLIVM.

HÆC quoq; propoſitio conuertit vtramque partem theorematis 8. vt perſpicuum eſt.

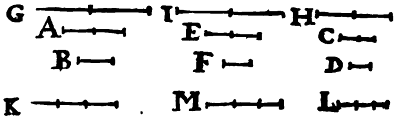
THEOR. 11. PROPOS. 11. xj.

QVÆ eidem ſunt eædem rationes, & inter ſe ſunt eædem.

SINT proportiones A, ad B, & C, ad D, eædem proportioni E, ad F. Dico & proportiones A, ad B, & C, ad D, eaſdem eſſe inter ſe, ſecundum definitionem 6. hoc eſt, ſumptis æquè multiplicibus ipſarum A, C; K item æquè multiplicibus ipſarum B, D; ſemper contingere, vt multiplices ipſarum A, C, à multiplicibus ipſarum B, D, vel vnà deficiant, vel vnà æquales ſint, vel vnà excedant. Sumantur enim ad omnes antecedentes A, C, E, æquè multiplices quæcunque G, H, I, & ad omnes conſequentes B, D, F, aliæ quæcunque æquè multiplices K, L, M. Quoniam igitur ponitur eſſe A, prima ad B, ſecundam, vt E, tertia ad F, quartam; *e* fit, vt ſi G, multiplex primæ deficit à K, multiplice ſecundæ, deficiat quoque I, multiplex tertiæ ab



e 6. def. quinti.



M, multiplice quartæ; Et ſi G, æqualis eſt ipſi K, vel maior, æqualis quoque ſit I, ipſi M, vel maior: a Sed

a 6. deſi. quinti. (vt eodem modo oſtendetur) ſi I, minor eſt, quàm M, vel æqualis, vel maior eſt quoque H, minor quàm L, vel æqualis, vel maior: propterea quòd ponitur eſſe E, prima ad F, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam. Quare ſi G, multiplex primæ A, deficit à K, multiplice ſecundæ B, deficiet quoque H, multiplex tertiæ C, ab L, multiplice quartæ D. Et ſi G, æqualis eſt, vel maior quàm K, etiam H, æqualis erit, vel maior quàm L. Idemque oſtendetur accidere in quibuſcunque alijs æquè multiplicibus. b Quapropter

b 6 def. quinti. erit A, prima ad B, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam. Quæ igitur eidem ſunt eædem rationes, & inter ſe ſunt eædem. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

EADEM ratione, Quæ eiſdem ſunt eadem rationes; & inter ſe ſunt eadem. Vt ſi ſit, vt A, ad B, ita C, ad D, ſit autem E, ad F, vt A, ad B, & G, ad H, vt C, ad D: erit quoque L, ad F, vt G, ad H. Quia enim proportiones E, ad F, & C, ad D, eadem ſunt proportioni A, ad B, c erit vt E, ad F, ita C, ad D. Rurſus quia proportiones E, ad F, & G, ad H, eadem ſunt proportioni C, ad D, d erit quoq; vt E, ad F, ita G, ad H.

A, 3. B, 2: C, 6. D, 4.
E. 9. F, 6: G, 12. H, 8.

c 11. quinti. d 11. quinti.

RVRSVS, ſi ſint proportiones A, ad B; C, ad D; & E, ad F, eadem inter ſe: ſit autem vt A, ad B, ita G, ad H; & vt C, ad D, ita I, ad K; & vt E, ad F, ita L, ad M: erunt quoque proportiones G, ad H: I, ad K; & L, ad M, eadem inter ſe. Nam vt proximè in quatuor proportionibus oſtenſum eſt, vt G, ad H, ita eſt I, ad K; propterea quòd hæ proportiones ſimiles ſunt proportionibus A, ad B, & C, ad D. Eodem modo erit, vt I, ad K, ita L, ad M; cùm proportiones I, ad K, & L, ad M, eadem ſint proportionibus C, ad D, & E, ad F, quæ æquales ſunt. Item erit, vt G, ad H, ita L, ad M; cùm hæ proportiones eadem ſint proportionibus A, ad B, & E, ad F, quæ æquales ponuntur. Eadem ratio eſt de pluribus.

A, 3. B, 2: C, 6. D, 4: E, 9. F, 6.
G, 12. H, 8. K, 12. L, 30. M, 20.

xij.

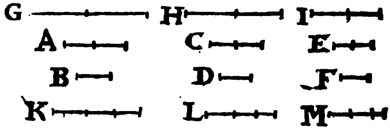
THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI ſint magnitudines quotcunque proportionales: quemadmodum ſe habuerit vna antecedentium ad vnam

Digitized by Google

nam conſequentium, ita ſe habebunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

QVOD in propoſ. 1. de proportione multiplici demonſtrauit, oſtendit hic de omni genere proportionis, etiam irrationalis. Sint ergo quotcunque magnitudines A, B; C, D; E, F, proportionales, hoc eſt, ſit A, ad B, vt C, ad D, & E, ad F. Dico vt eſt vna antecedentiũ ad vnam conſequentium, nimirum A, ad B, ita eſſe omnes antecedentes ſimul A, C, E, ad omnes conſequentes ſimul B, D, F. Sumptis enim G, H, I, æquè multiplicibus antecedentium; & K, L, M, æquè multiplicibus conſequentium, *a* erunt omnes G, H, I, ſimul omnium A, C, E, ſimul ita multiplices, vt vna vnius, nempe vt G, ipſius A; & omnes, K, L, M, ſimul omnium B, D, F, ſimul ita multiplices, vt vna vnius, nimirum vt K, ipſius B. Quoniam verò ponitur eſſe A, primæ ad B, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam, & vt alia E, tertia ad aliam F, quartam; *b* fit vt ſi G, multiplex primæ deficit à K, multiplice ſecundæ, deficiat quoque H, multiplex tertiæ ab L, multiplice quartæ, & I, ab M: Et ſi G, æqualis eſt ipſi K, vel maior, æqualis quoque ſit H, ipſi L, & I, ipſi M, vel maior. Ac proinde ſi G, minor eſt, vel æqualis, vel maior quàm K, & omnes G, H, I, ſimul omnibus K, L, M, ſimul minores ſint, vel æquales vel maiores. *c* Quocirca vt eſt A, prima ad B, ſecundam, ita erit A, C, E, tertia ad B, D, F, quartam. Si ſint itaque magnitudines quotcunque proportionales, &c. Quod demonſtrandum erat.



a 1. quinti.

b 6. def. quinti.

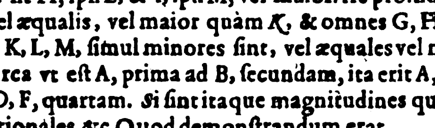
c 6. def. quinti.

xiij.

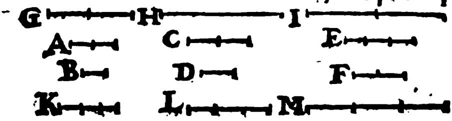
THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia verò ad quartam maiorem rationem habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecundam maiorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam.

SIT prima A, ad B, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam: ſit autẽ proportio C, tertię ad D, quartam maior, quàm E, quintæ ad F, ſextam. Dico & proportionem A, primæ ad B, ſecundam eſſe maiorem quàm E, quintæ ad F, ſextam, ſe-



ſecundum definitionem 8. hoc eſt, ſumptis æquè multiplicibus



ipſarum A,F; item æquè multiplicib. ipſarum B,F, contingere poſſe, vt multiplex ipſius A, excedat multiplicem ipſius B, at multiplex ipſius E, multiplicem ipſius F, non excedat. Sumptis enim G, H, I, æquè multiplicibus antecedentium; Et K, L, M, æquo multiplicibus conſequentium, cùm ſit A, prima ad B, ſecun-
a 6 def. quinti. dam, vt C, tertia ad D, quartam; *a* ſit vt ſi G, multiplex primæ exceſſerit K, multiplicem ſecundæ, excedat quoque H, multiplex tertiæ ipſam L, multiplicem quartæ, &c. At quando H, excedit
b 8. def. quinti. ipſam L, *b* non neceſſariò I, excedit ipſam M, ſed æqualis aliquando erit, vel minor; quòd maior ponatur proportio C, primæ ad D, ſecundam, quàm E, tertiæ ad F, quartam. Igitur ſi G,
c 8. def. quinti. excedit K, non neceſſariò I, excedit M. *c* Maior eſt ergo proportio A, primæ ad B, ſecundam, quàm E, tertiæ ad F, quartã. Quam ob rem ſi prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

QVOD ſi proportio C, tertia ad D, quartam minor fuerit, quàm E, quinta ad F, ſextam; erit quoque proportio A, prima ad B ſecundam minor quàm E, quinta ad F, ſextam. Si enim proportio C, ad D, minor eſt quàm E, ad F, hoc eſt, proportio E, prima ad F, ſecundam
d 8. def. quinti. *maior quàm C, tertia ad D, quartam; d ſit vt ſi I, excedit ipſam M, non neceſſariò H, excedat ipſam L, ſed aliquando deficiat, vel ei æqua-*
e 6. def. quinti. *lis ſit. e Sed ſi H, deficit ab L, vel æqualis eſt, etiam G, deficiet à K, vel ei erit æqualis, eò quòd ponatur C, prima ad D, ſecundam, vt A, tertia ad B, quartam. Quare ſi I, excedit ipſam M, non neceſſariò G,*
f 8. def. quinti. *excedet ipſam K, f atque idcirco maior erit proportio E, prima ad F, ſecundam, quam tertia ad B, quartam, hoc eſt, proportio A, ad B, minor erit quàm E, ad F. Quod eſt propoſitum.*

EODEM modo. Si prima ad ſecundam, maiorem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam; tertia autem ad quartam, maiorem habuerit, quàm quinta ad ſextam: Prima quoq; multò magis ad ſecundam, maiorem rationem habebit, quàm quinta ad ſextam.

QVOD ſi prima ad ſecundam, minorem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam, tertia autem ad quartam, minorem habuerit, quàm quintæ ad ſextam: Prima quoq; multò magis ad ſecundam, minorem rationem habebit, quàm quinta ad ſextam.

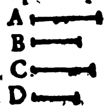
xiiij. THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam

Digitized by Google

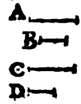
quam tertia ad quartam; Prima verò quàm tertia maior fuerit, erit & ſecunda maior quàm quarta. Quod ſi prima fuerit æqualis tertiæ, erit & ſecunda æqualis quartæ: Si verò minor, & minor erit.

SIT enim A, prima ad B, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam. Dico ſi A, maior fuerit quàm C, fore quoque B, maiorem quàm D. Quod ſi A, æqualis fuerit ipſi C, æqualem quoque eſſe B, ipſi D: Si deniq; A, minor fuerit quàm C, minorem quoq; eſſe B, ipſa D. Sit primum A, maior quàm C, *a* eritq; propterea proportio A, maioris ad B, maior quàm C, minoris ad eandem B. Quoniam igitur eſt C, prima ad D, ſecũdam, vt A, tertia ad B, quartam; Proportio autẽ A, tertiæ ad B, quartã, maior eſt, vt oſtendimus, quàm C, quintæ ad B, ſextam: *b* Maior quoq; erit proportio C, primæ ad D, ſecundam, quàm C, quintæ ad B, ſextam. *c* Minor eſt ergo D, quàm B; Ideoq; B, maior erit quàm D. Quod eſt propoſitum.



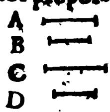
a 8. quinti. b 13. quinti. c 10. quinti.

SIT deinde A, æqualis ipſi C, *d* eritq; idcirco A, ad B, vt C, ad B. Quoniam igitur proportiones C, ad D, & C, ad B, eædem ſunt proportioni A, ad B, *e* erunt quoq; inter ſe eædem proportiones C, ad D, & C, ad B; *f* Ideoq; æquales erunt B, & D. Quod eſt propoſitũ.



d 7. quinti. e 11. quinti. f 9. quinti.

SIT tertiò A, minor quàm C, *g* eritq; ob hoc maior proportio C, maioris ad B, quàm A, minoris ad B, eandem. Quoniam igitur eſt C, prima ad D, ſecundam, vt A, tertia ad B, quartam; eſt autem proportio A, tertiæ ad B, quartam minor, quam C, quintæ ad B, ſextam: *h* Minor quoq; erit proportio C, primæ ad D, ſecundam, quàm C, quintæ ad B, ſextam; *i* Ideoq; B, minor erit, quàm D, quod eſt propoſitum. Si prima igitur ad ſecundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonſtrandum.



g 8. quinti. h 13. quinti. i 10. quinti.

SCHOLIVM.

QVOD ſi ſecunda maior ſit, vel æqualis, vel minor, quàm quarta: erit quoque eadem ratione prima maior, vel æqualis, vel minor, quàm tertia. Sit enim primum B, maior, quàm D, vt in prima figura. Dico & A, maiorem eſſe, quàm C. Cum enim B, maior ſit, quàm D; k *erit maior proportio C, ad D, quàm C, ad B. Quia igitur eſt, vt prima A, ad ſecundam B, ita tertia C, ad quartam D. Proportio autem C, tertiæ ad D, quartam oſtenſa eſt maior, quàm C, quinta ad B, ſextam;* l *erit quoque proportio A, primæ ad B, ſecundam maior, quàm C, quinta ad B, ſextam:* m *ac proinde A, maior erit, quàm C. quod eſt propoſitum.*

k 8. quinti. l 13. quinti. m 10. quinti.

DEINDE ſit B, æqualis ipſi D, vt in ſecunda figura. Dico & A,

ipſi C, eſſe æqualem. Cùm enim B, ipſi D, ſit æqualis; erit C, ad B,
a 11. quinti. vt C, ad D: Eſt autem quoque A, ad B, vt C, ad D. a Igitur erit quoq; ita A, ad B, vt C, ad B; b propterea A, ipſi C, æqualis erit.
b 9. quinti. quod eſt propoſitum.

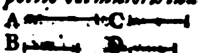
TERTIO ſit B, minor quàm D, vt in tertia figura. Dico & A, minorem eſſe, quàm C. Cùm enim B, minor ſit quàm D, c erit maior
c 8. quinti. proportio C, ad D, quàm C, ad B. Quia igitur eſt, vt A, prima ad B, ſecundam, ita C, tertia ad D, quartam: Proportio autem C, tertia ad
d 13. quinti. D, quartam oſtenſa eſt minor, quàm C, quinta ad B, ſextam, d erit quoq; proportio A, primæ ad B, ſecundam minor, quàm C, quintæ ad
e 10. quinti. B, ſextam. e Igitur maior erit C, quàm A, ac proinde A, minor erit, quàm C. quod eſt propoſitum.

BREVIVS. Si B, maior eſt quàm D, & A, dicatur non maior,
f 14. quinti. quàm C, ſed vel minor, vel æqualis, f erit quoque B, minor, quàm D, vel æqualis; quod eſt contra hypotheſin. Eademque ratio eſt in alijs caſibus.

VEL ſic. Si eſt A, ad B, vt C, ad D; erit conuertendo B, ad A, vt
g 14. quinti. D, ad C. Ergo ſi B, maior eſt, vel minor, vel æqualis ipſi D; g erit quoque A, maior, vel minor, vel æqualis ipſi C.

NON demonſtrauit autem Euclides, ſi prima maior eſt, vel æqualis, vel minor, quàm ſecunda, tertiam quoque maiorem eſſe vel æqualem, vel minorem, quàm quartam; (quo tamen argumentandi modo plerique Geometrarum tum veterum, tum recentiorum vtuntur) quia id perſpicuum eſt ob ſimilitudinem proportionum. Hinc enim fit, ſi vtraque eſt proportio maioris inæqualitatis, vtramq; antecedentem magnitudinem, id eſt, primam ac tertiam, maiorem eſſe vtraque magnitudine conſequente, hoc eſt, ſecunda ac quarta: Si verò vtraque proportio eſt æqualitatis, vtramq; magnitudinem antecedentem vtriq; conſequenti æqualem eſſe. Si deniq; vtraq; proportio eſt minoris inæqualitatis, vtramq; antecedentem magnitudinem vtraq; conſequente eſſe minorem.

VERBI gratia, ſi eſt vt A, ad B, ita C, ad D; erit vtraque proportio vel maioris inæqualitatis, vel æqualitatis, vel minoris inæqualitatis.



Quocirca ſi A, prima maior eſt quàm B, ſecunda, erit & C, tertia maior quàm D, quarta; Et ſi æqualis, æqualis; Et ſi minor, minor. Quod eſt propoſitum. Quod tamen Geometricè oſtendemus cum Federico Commandino, licet id non ſit neceſſarium, ad propoſ. 16. huius lib.

XV. THEOR. 15. PROPOS. 15.

PARTES cum pariter multiplicibus in eadem ſunt ratione, ſi prout ſibi mutuò reſpondent, ita ſumantur.

SINT partium A, & B, æquè multiplices C D, & E F. Dico ita eſſe

eſſe C D, ad E F, vt A, ad B. Cum enim C D, & E F, ſint æque multiplices ipſarum A, & B, continebitur A, toties in C D, quoties B, in E F. Diuidatur ergo C D, in partes C H, G H, H D, æquales ipſi A, & E F, in partes E I, I K, K F, æquales ipſi B, *a* eritque C G, ad *a 7. quinti.*
E I, vt A, ad B, quod C G, & A, æquales inter ſe ſint, nec non E I, & B. Eadem ratione erit G H, ad I K, & H D,

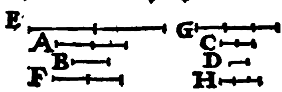


ad K F, vt A, ad B, *b* ideoque C G, G H, H D, ad E I, I K, K F, eandem habebunt proportionem. Quocirca vt C G, ad E I, hoc eſt, vt *b 8. quinti.*
A, ad B, *c* ita erit C D, ad E F, nempe omnes C G, G H, H D, ſimul *c 12. quinti.*
ad omnes E I, I K, K F, ſimul, quod eſt propoſitum. Partes itaque cum pariter multiplicibus, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 16. PROPOS. 16. *xvj.*

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, & viciſſim proportionales erunt.

HIC demonſtratur Alterna, ſiue Permutata proportio, ſeu ratio, quæ defin. 12. explicata eſt. Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico viciſſim, ſeu permutando, eſſe quoque A, ad C, vt B, ad D. Sumantur enim ipſarum A, B, primæ ac ſecundæ, æque multiplices E F; Item ipſarum C, D, tertiæ & quartæ, æque multiplices G, H;
d eritque E, ad F, vt A, ad B, cum E, & F, ſint pariter multiplices *d 15. quinti.*
partium A, & B. Eadem ratione erit G, ad H, vt C, ad D. Cum igitur proportiones E, ad F, & C, ad D, ſint eædem proportioni A, ad B; erunt & ipſæ *e* inter ſe eædem. Rurſus quia proportiones *e 11. quinti.*
E, ad F, & G, ad H, eædem ſunt proportioni C, ad D; *f* erunt & *f 11. quinti.*



ipſæ eædem inter ſe; hoc eſt, vt eſt E, prima ad F, ſecundam, ita erit G, tertia ad H, quartam. *g* Quare ſi E, prima maior eſt quam G, *g 14. quinti.*
tertia, vel æqualis, vel minor, erit quoq; F, ſecunda maior quam H, quarta, vel æqualis, vel minor, in quacunque multiplicatione accepta ſint æque multiplicia E, F, & æque multiplicia G, H.
h Eſt igitur A, prima ad C, ſecundam, vt B, tertia ad D, quartam *h 6. defin. quinti.*
(cum E, & F, ſint æque multiplices primæ A, ac tertiæ B; At G, & H, æque multiplices C, ſecundæ, & D, quartæ, & illæ ab his vna deficiant, vel vna æquales ſint, vel vna excedant, &c.) quod eſt propoſitum. Si quatuor igitur magnitudines proportionales fuerint, & viciſſim proportionales erunt. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

PORRO demonſtratio huius propoſ. locum ſolum habet quando quatuor magnitudines ſunt eiuſdem generis. Nam ſi duæ A, B, eſſent

Digitized by Google

vnius generis, & duæ C, D, alterius; eſſent quoque multiplices E, F, vnius generis, in quo videlicet ſunt A, B, & multiplices G, H, alterius; in quo nimirum exſiſtunt C, D. Quare non poſſet dici E, maior quam G, vel æqualis, vel minor; ac proinde nihil colligeretur ex defin. 6. huius lib. Vſurpanda igitur erit permutata proportio in ſolis quatuor magnitudinibus eiuſdem generis. Quod nonnulli philoſophi non aduertentes in graues errores incidunt, cum eam adhibeant in rebus diuerſorum generum.

EX hoc & illud demonſtrabitur, quod ad finem ſcholij propoſ. 14. ex ipſa ſimilitudine proportionem oſtendimus, recepimuſque nos demonſtraturos hoc loco, videlicet.

SI prima ad ſecundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; prima vero, quam ſecunda, maior fuerit: Erit & tertia maior, quam quarta; Et ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor.

QVANQVAM id, quod hic proponitur, per ſe notum ſit, vt ad propoſ. 14. diximus, demonſtrabimus tamen illud cum Federico Commandino, hoc modo. Sit vt A, prima ad B, ſecundam, ita C, tertia ad D, quartam. Dico, ſi A, prima maior eſt, quam B, ſecunda; & C, tertiam maiorem eſſe quarta D, & ſi eſt æqualis, æqualem; & ſi minor, minorem.



a 16. quinti. *a Erit enim permutando, vt A, ad C, ita B, ad D. b Quare ſi A, prima maior eſt, quam B,*
b 14. quinti. *tertia, erit & C, ſecunda maior, quam D, quarta; & ſi æqualis, æqualis, & ſi minor, minor. Quod eſt propoſitum.*

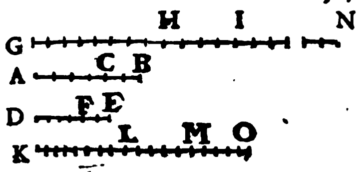
SED & hæc demonſtratio locum duntaxat habet, cum quatuor magnitudines ſunt eiuſdem generis. Quare ſatius eſt illud ex natura proportionum monſtrare, vt à nobis ad propoſ. 14. factum eſt. Ita enim verum erit ſemper id, quod proponitur, etiamſi magnitudines A, B, in vno genere, & C, D, in alio contineantur: immò verò licet A, B, ſint quantitates continuæ, & C, D, numeri, &c.

xvij. THEOR. 17. PROPOS. 17.

SI compoſitæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diuiſæ proportionales erunt.

HOC loco demonſtrat Euclides Diuiſionem rationis, quam defin. 15. explicauit. Sint enim compoſitæ magnitudines A B, C B, & D E, F E, proportionales, hoc eſt, ſit A B, ad C B, vt D E, ad F E. Dico & diuiſas eaſdem proportionales eſſe, hoc eſt, vt eſt A C, ad C B, ita eſſe D F, ad F E, in eo ſenſu, quem definitione 6. expoſuimus. Ipſarum enim A C, C B, D F, F E, æque multiplices capiantur
a 1. quinti. eodem ordine G H, H I, K L, L M; eritque G I, ita multiplex

plex ipſius A B, vt eſt G H, ipſius A C, hoc eſt, vt K L, ipſius D F. Sed vt eſt multiplex K L, ipſius D F, *a* ita quoq; multiplex eſt K M, ipſius D E. Æque multiplices ergo ſunt G I, K M, ipſarum A B, D E. Capiantur rurſus I N, M O, æque multiplices ipſarum C B, F E. Quoniam igitur ſic eſt multiplex H I, prima ſecundæ C B, vt L M, tertia quartæ F E: Item tam eſt multiplex I N, quinta ſecundæ C B, quam multiplex eſt M O, ſexta quartæ F E; *b* erit & H N, ſic multiplex ſecundæ C B, vt L O, multiplex eſt quartæ F E. Itaque cum ſit A B, prima ad C B, ſecundam, vt D E, tertia ad F E, quartam; ſumptæque ſint æque multiplices G I, K M, primæ ac tertiæ A B, D E; Item ſecundæ & quartæ C B, F E, æque multiplices H N, L O, *c* ſit vt ſi G I, multiplex primæ A B, deficit ab H N, multiplice ſecundæ C B, etiam K M, multiplex tertiæ D E, deficiat ab L O, multiplice quartæ F E; & ſi æqualis, æqualis; & ſi excedit, excedat. Quod ſi deficiat tam G I, ab H N, quam K M, ab L O, ablatis communibus H I, L M, deficiet quoque G H, ab I N, & K L, ab M O. Et ſi G I, æqualis fuerit ipſi H N, & K M, ipſi L O, ablatis communibus H I, L M, erit & G H, æqualis ipſi I N, & K L, ipſi M O. Et ſi denique G I, exceſſerit ipſam H N, & K M, ipſam L O, ablatis communibus H I, L M, excedet quoque G H, ipſam I N, & K L, ipſam M O. Quam ob rem cum G H, K L, ſumptæ ſint æque multiplices primæ A C, & tertiæ D F: Item I N, M O, æque multiplices ſecundæ C B, & quartæ F E, oſtenſumq; ſit, (in quacunq; multiplicatione illæ æque multiplices fuerint acceptæ) æque multiplices primæ & tertiæ ab æque multiplicibus ſecundæ & quartæ vel vna deficere, vel æquales eſſe, vel vna excedere; *d* Erit A C, prima ad C B, ſecundam, vt D E, tertia ad F E, quartam. quod eſt propoſitum. Si compoſitæ igitur magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod oſtendendum erat.



a 1. quinti.

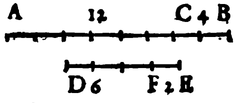
b 2. quinti.

c 6. def. quinti.

d 6. def. quinti.

SCHOLIVM.

EX his facile demonſtrabimus modum illum argumentandi, quem definitione 15. Diuiſionem rationis conuerſam diximus: Hoc eſt, ſi eſt, vt A B, ad C B, ita D E, ad E F; eſſe quoque vt C B, ad A C, ita F E, ad D F, quod ita patet. Quoniam eſt vt A B, ad C B, ita D E, ad F E; e *erit diuidendo, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Igitur conuertendo erit quoque, vt C B, ad A C, ita F E, ad D F. Quod eſt propoſitum.*



e 17. quinti.

NVLLO etiam negotio demonſtrabitur modus ille argumentandi, quem ad eandem defin. 15. Diuiſionem rationis contrariam appellauimus,

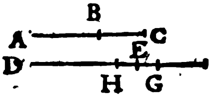
Digitized by Google

lauimus, & in quo antecedens magnitudo minor eſt quam conſequens, non autem maior, vt in Diuiſione rationis, quam Euclides definiuit, & ea, quam proximè demonſtrauimus. Sit enim vt A C, ad A B, ita D F, ad D E. Dico eſſe quoque per Diuiſionem rationis contrariam, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Quoniam enim eſt, vt A C, ad A B, ita D F, ad D E; erit conuertendo, vt A B, ad A C, ita D E,
a 17. *ad D F. a Ergo diuidendo, vt C B, ad A C, ita F E, ad D F: Ac proinde*
quinti. *conuertendo rurſus, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Quod eſt propoſitum.*

xviij. THEOR. 18. PROPOS. 18.

SI diuiſæ magnitudines ſint proportionales, hæ quoque compoſitæ proportionales erunt.

DEMONSTRAT hoc loco Euclides compoſitionem rationis, quam definitione 14. deſcripſit. Sint enim diuiſæ magnitudines A B, B C, & D E, E F, proportionales, hoc eſt, A B, ad B C, vt D E, ad E F. Dico & compoſitas proportionales eſſe, hoc eſt, vt eſt A C, ad B C, ita eſſe D F, ad E F. Si enim non eſt, vt A C, ad B C, ita D F, ad E F, habebit D F, ad aliquam magnitudinem minorem ipſa E F, vel maiorem, eandem proportionem, quam A C, ad B C. Habeat primum D F, ad G F, minorem ipſa E F, ſi fieri poteſt, eandem proportionem, quam A C, ad B C. Quoniam igitur eſt, vt A C, ad B C, ita



b 17. D F, ad G F; *b* Erit diuidendo quoque, vt A B, ad B C, ita D G, ad
quinti. G F: Sed vt A B, ad B C, ita poſita quoque eſt D E, ad E F. *c* Igitur
c 11. erit etiam, vt D G, prima ad G F, ſecundam, ita D E, tertia ad E F,
quinti. quartam. Cum ergo D G, prima maior ſit, quàm D E, tertia, *d* erit
d 14. quoque G F, ſecunda maior quàm E F, quarta, pars quàm totum.
quinti. Quod eſt abſurdum.

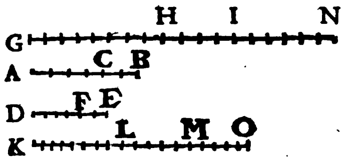
HABEAT deinde, ſi fieri poteſt, D F, ad H F, maiorem ipſa E F, eandem proportionem, quam A C, ad B C. Quoniam igitur
e 17. eſt, vt A C, ad B C, ita D F, ad H F; *e* erit diuidendo quoque vt
quinti. A B, ad B C, ita D H, ad H E. Sed vt A B, ad B C, ita poſita etiam
f 11. eſt D E, ad E F. *f* Igitur erit quoque, vt D H, prima ad H F, ſecun-
quinti. dam, ita D E, tertia ad E F, quartam. Cum ergo D H, prima minor ſit quàm D E, tertia, erit quoque H F, ſecunda minor quàm E F, quarta, totum quàm pars. quod eſt abſurdum. Non igitur habebit D F, ad minorem ipſa E F, aut ad maiorem, eandem proportionem, quam A C, habet ad B C. Ergo D F, ad ipſam E F, erit, vt A C, ad B C, quod eſt propoſitum. Itaque ſi diuiſæ magnitudines ſint proportionales, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

HANC propoſitionem demonſtrant nonnulli cum Campano eadem ſer-

Digitized by Google

dem ferme ratione, qua antecedentem propoſitionem Euclides demonſtrauit, hoc videlicet modo. Sint diuiſa magnitudines A C, C B, D F, F E, proportionales, hoc eſt, A C, ad C B; vt D F, ad F E. Dico eas etiam compoſitas proportionales eſſe, vt A B, quidem ad C B, ita D E, ad F E. Sumantur enim, vt in antecedente propoſitione, ipſarum A C, C B, D F, F E, aque multiplices G H, H I, K L, L M. Item ipſarum C B, F E, alia aque multiplices I N, M O, a eruntque rurſus G I, K M, ipſarum A B, D E, aque multiplices. b Item H N, L O, ipſarum C B, F E, vt in pracedenti Theoremate oſtenſum eſt. a 1. quinti. b 2. quinti.



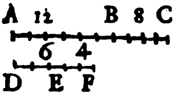
Quoniam vero ponitur eſſe A C, prima ad C B, ſecundam, vt D F, tertia ad F E, quartam, ſumptaque ſunt G H, K L, aque multiplices prima ac tertia A C, D F. Item ſecunda & quarta C B, F E, aque multiplices I N, M O, c ſit, vt ſi G H, multiplex prima A C, deficit ab I N, multiplice ſecunda C B, etiam K L, multiplex tertia D F, deficiat ab M O, multiplice quarta F E, & ſi aqualis, aqualis; & ſi excedit, excedat. Quod ſi deficiat tam G H, ab I N, quàm K L, ab M O, additis communibus H I, L M, deficiet quoque G I, ab H N; & K M, ab L O. Et ſi G H, aqualis fuerit ipſi I N, & K L, ipſi M O; additis communibus H I, L M, erit & G I, ipſi H N, aqualis, & K M, ipſi L O. Et denique ſi G H, exceſſerit ipſam I N, & K L, ipſam M O, additis communibus H I, L M, excedet quoq; G I, ipſam H N, & K M, ipſam L O. Quoniam ergo ſi G I, multiplex prima A B, deficit ab H N, multiplice ſecunda C B, etiam K M, multiplex tertia D E, deficit ab L O, multiplice quarta F E, & ſi aqualis, aqualis, & ſi excedit, excedit; d erit A B, prima ad C B, ſecundam, vt D E, tertia ad F E, quartam. Quod eſt propoſitum. Itaque ſi diuiſa magnitudines ſint proportionales, &c. Quod erat oſtendendum. c 6. def. quinti. d 6. def. quinti.

VERVM hac demonſtratio non rectè colligit propoſitum ex defin. 6. propterea quòd H N, L O, non ſunt ita multiplices ipſarum C B, F E, vt multiplices accepta ſunt I N, M O, earundem C B, F E. Vnde merito dubitare quis poſſet, an ſecundum quamcunque multiplicationem aque multiplices ſeruent eam conditionem defectus, aqualitatis, atque exceſſus, quam Euclides in 6. defin. poſtulauit; quandoquidem in hac demonſtratione liberum non eſt aſſumere ipſarum C B, F E, quaſcunque aque multiplices, ſed tales duntaxat, quales conſurgunt ex H I, I N, & ex L M, M O, multiplicibus acceptis. Id quod in antecedentis propoſitionis demonſtratione obiici non poteſt: quippe cum I N, M O, ſumpta ſint ipſarum C B, F E, aque multiplices qualeſcunque, ipſaque eadem remanent aque multiplices earundem C B, F E, in diuiſa proportionalitate. Quam ob rem praferenda eſt Euclidis de-

Digitized by Google

dis demonſtratio huic demonſtrationi Campani. Libuit autem eam quoque explicare, ne eam ſtudioſus Lector, relicta illa Euclidis, arriperet, vt bonam: præſertim cum oſtenſiua ſit, illa verò Euclidis ducat nos ad id, quod fieri non poteſt.

HINC facile etiam confirmabimus duos illos modos argumentandi, quos ad defin. 14. deſcripſimus. Priorem diximus compoſitionem rationis cõuerſam. Sit enim vt A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico per compoſitionem rationis conuerſam, eſſe quoq; vt A C, ad A B, ita D F, ad D E. Quoniam enim eſt, vt A B, ad B C, ita D E, ad E F, erit conuertendo, vt B C, ad B D, ita E F, ad D E. a Igitur & componendo erit, vt A C, ad A B, ita D F, ad D E, quod eſt propoſitum.



a 18. quinti.

POSTERIOREM modum vocauimus compoſitionem rationis contrariam. Sit ergo rurſus, vt A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico per compoſitionem rationis contrariam, eſſe quoque vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Quoniam enim eſt, vt A B, ad B C, ita D E, ad E F, erit conuertendo, vt B C, ad A B, ita E F, ad D E. b Igitur & componendo erit, vt A C, ad A B, ita D F, ad D E: ac proinde conuertendo rurſus erit, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Quod eſt propoſitum.

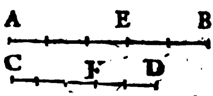
b 18. quinti.

xix.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI quemadmodum totum ad totum, ita ablatum ſe habuerit ad ablatum: & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum, ſe habebit.

QVOD in propoſ. 5. demonſtratum eſt de multiplici proportione, hoc loco de omni proportione, etiam irrationali demonſtratur. Sit enim tota A B, ad totam C D, vt ablata A E, ad ablatam C F. Dico & reliquam E B, eſſe ad reliquam F D, vt eſt tota A B, ad totam C D. Cum enim ſit A B, ad C D, vt A E, ad C F, *c* erit & permutando A B, ad A E, vt C D, ad C F. *d* Diuidendo ergo erit E B, ad A E, vt F D, ad C F. *e* Quare permutando rurſus erit E B, ad F D, vt A E, ad C F, hoc eſt, vt tota A B, ad totam C D; cum poſita ſit A B, ad C D, vt A E, ad C F. Si igitur quemadmodum totum ad totum &c. Quod demonſtrandum erat.

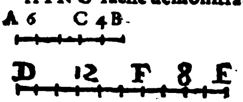


c 16. quinti.
d 17. quinti.
e 16. quinti.

CORÓLLARIVM.

HINC facile demonſtrabitur modus ille argumentandi in proportionibus, qui ſumitur a conuerſione rationis, iuxta 16. defin.

SIT enim, vt A B, ad C B, ita D E, ad F E. Dico per conuerſionem rationis eſſe quoque



quoque, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Cum enim ſit, vt A B, ad C B, ita D E, ad F E, *a* erit quoque diuidendo, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Igitur & conuertendo, vt C B, ad A C, ita F E, ad D F: *b* hac propterea componendo quoque, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Quod eſt propoſitum. a 17. quinti. b 18. quinti.

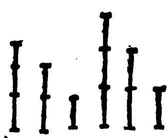
SCHOLIVM.

OMNES Euclidis interpretes conuerſionem rationis demonſtrant hac ratione. Quoniam eſt, vt A B, ad C B, ita D E, ad F E; c *erit permutando, vt tota A B, ad totam D E, ita C B, ablata ad ablatam F E.* d *Igitur vt tota A B, ad totam D E, ita erit quoque reliqua A C, ad reliquam D F. Et proinde permutando rurſus, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Quod eſt propoſitum.* c 16. quinti. d 19. quinti.

SED quis non videt, hanc demonſtrationem conuenire ſolum magnitudinibus eiuſdem generis, cum in ea vſurpetur alterna, ſiue permutata proportio, quæ vim tantum habet in eiuſdem generis magnitudinibus, vt & in defin. 12. & in propoſ. 19. monuimus? Quare cum Euclides, & alij Geometræ modum hunc argumentandi à conuerſione rationis adhibeant in omnibus magnitudinibus, etiam non eiuſdem generis, reiecta hac communi interpretum demonſtratione, noſtram aliam excogitauimus, quæ omnibus magnitudinibus congruit. Ea enim locum habet, etiamſi priores duæ quantitates A B, C B, ſint vnius generis, nimirum lineæ, poſteriores verò duæ D E, F E, alterius generis, nimirum vel ſuperficies, vel anguli, vel corpora, vel denique numeri: propterea quod in ea non aſſumpta fuit alterna, ſiue permutata proportio.

THEOR. 20. PROPOS. 20. 21.

SI ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ & in eadem ratione ſumantur; ex æquo autem prima, quàm tertia maior fuerit, erit & quarta, quàm ſexta, maior. Quod ſi prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis ſextæ: ſin illa minor, hæc quoque minor erit.

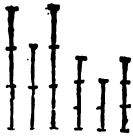


A B C D E F

SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, ſitque A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F, ſit autem primum A, prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam eſſe maiorem F, ſexta. Cum enim A, maior ſit quam C, *e* erit maior proportio A, ad B, quam C, ad B. Eſt autem vt A, ad B, ita D, ad E. *f* Maior igitur proportio quoque erit D, ad E, quam C, ad B. At vt C, ad B, ita eſt F, ad E. (Cum enim ſit B, ad C, vt E, ad F, erit conuertendo vt C, ad B, ita F, ad E.) Maior igitur quoque proportio erit D, ad E, quam F, ad E. *g* Quare D, maior erit, quam F. Quod eſt propoſitum. e 8. quinti. f 13. quinti. g 10. quinti.

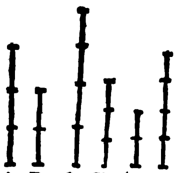
SIT

SIT deinde A, æqualis ipſi C. Dico & D, æqualem eſſe ipſi F. Cum enim A, ſit ipſi C, æqualis, a 7. quinti. a erit A, ad B, vt C, ad B. Eſt autem vt A, ad B, ita D, ad E. b 11. quinti. b Igitur erit & D, ad E, vt C, ad B: At vt C, ad B, ita eſt F, ad E, per inuerſam rationem, vti prius. Quare erit quoque D, ad E, vt F, ad E; c 9. quinti. c Ideoque æquales erunt D, & F. Quod eſt propoſitum.



A B C D E F

SIT tertio A, minor quam C. Dico & D, minorem eſſe, quam F. d 8. quinti. Cum enim A, minor ſit quam C, d erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B. Sed vt A, ad B, ita eſt D, ad E. e 13. quinti. e Minor ergo quoque proportio eſt D, ad E, quam C, ad B. Eſt autem conuertendo, vt prius, vt C, ad B, ita F, ad E. Igitur minor eſt quoque proportio D, ad E, quam F, ad E, f 10. quinti. f proptereaque D, minor erit quam F. Quod eſt propoſitum. Si ſint itaque tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, &c.



A B C D E F

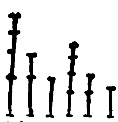
SCHOLIVM.

PORRO propoſitione 22. oſtendet Euclides, A, & D, magnitudines non ſolum eſſe maiores, vel æquales, vel minores duabus magnitudinibus C, & E, vt hic demonſtrauit, ſed etiam illas ad has eandem habere proportionem ex æqualitate: quod quidem demonſtrare non poterat, niſi prius theorema hoc oſtendiſſet, vt ex eadem propoſitione 22. erit perſpicuum.

xxj. THEOR. 21. PROPOS. 21.

SI ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione ſumantur, fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima quam tertia maior fuerit: erit & quarta, quam ſexta, maior. Quod ſi prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis ſextæ; ſin illa minor, hæc quoque minor erit.

SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, quæ binæ, & in eadem ratione ſumantur; ſitque earum proportio perturbata, hoc eſt, ſit vt A, ad B, ita E, ad F, & vt B, ad C, ita D, ad E: Sit autem primum A, prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam eſſe maiorem ſexta, F. g 8. quinti. Cum enim A, maior ſit quam C, g erit maior proportio A, ad B, quam C, ad B: Eſt autem vt A, ad B, ita E, ad F. h 13. quinti. h Maior ergo quoque proportio eſt E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero vt B, ad C, ita eſt D, ad E, erit



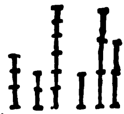
A B C D E F

E, erit conuertendo vt C, ad B, ita E, ad D. Quare maior quoque erit proportio E, ad F, quam E, ad D. *a* Ideoque maior erit D, quam F. Quod eſt propoſitum. a 10. quinti.

SIT deinde A, ipſi C, æqualis. Dico D, quoque ipſi F, eſſe æqualem. Cum enim A, ſit æqualis ipſi C, *b* erit A, ad B, vt C, ad B: Sed vt A, ad B, ita eſt E, ad F. *c* Igitur erit vt C, ad B, ita E, ad F: Eſt autem ex inuerſa ratione, vt C, ad B, ita E, ad D, veluti prius. Igitur erit quoque vt E, ad F, ita E, ad D; *d* atque idcirco D, ipſi F, æqualis erit. Quod eſt propoſitum. b 7. quinti. c 11. quinti. d 9. quinti.



SIT tertio A, minor, quam C. Dico & D, minorem eſſe quam F. Cum enim A, ſit minor quam C, *e* erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B: Vt autem A, ad B, ita eſt E, ad F. *f* Minor eſt ergo proportio E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero, vt ante, ex inuerſa ratione, eſt vt C, ad B, ita E, ad D; erit quoque minor proportio E, ad F, quam E, ad D; *g* ac propterea D, minor erit quam F, quod eſt propoſitum. Si igitur ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, &c. Quod oſtendendum erat. e 8. quinti. f 13. quinti. g 10. quinti.



SCHOLIVM.

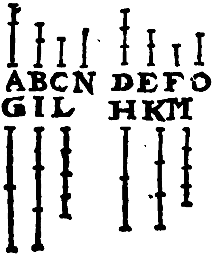
CÆTERVM propoſ. 23. oſtendet Euclides duas magnitudines A, & D, non ſolum eſſe maiores, vel æquales, vel minores duabus magnitudinibus C, & F, ſed etiam illas ad has eandem habere proportionem ex æqualitate: quod quidem ſine auxilio huius theorematis demonſtrare non poterat, vt ex propoſ. illa 23. patebit.

THEOR. 22. PROPOS. 22. xxij.

SI ſint quotcunque magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

IAM hic demonſtrat Euclides modum argumentandi in proportionibus ex æqualitate, quando proportio eſt ordinata. Sint enim primum tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F: ſitque A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Dico quoque ex æqualitate eſſe A, ad C, vt D, ad F. Sumptis enim ipſarum A, D, æque multiplicibus G, H: Item ipſarum B, E, æque multiplicibus I, K: Item ipſarum C, F, æque multiplicibus L, M; cum ſit A, prima ad B, ſecundam, vt D, tertia





a 4. quinti. ad E, quartam, *a* erit quoque G, multiplex primæ A, ad I, multiplicem ſecundæ B, vt H, multiplex tertiæ D, ad K, multiplicem quartæ E. Eadem ratione, cum ſit B, prima ad C, ſecundam, vt E, tertia ad F, quartam; b 4. quinti. *b* erit I, multiplex primæ B, ad L, multiplicem ſecundæ C, vt K, multiplex tertiæ E, ad M, multiplicem quartæ F. Quoniam igitur ſunt tres magnitudines, G, I, L, & aliæ tres H, K, M, quæ binæ in eadem proportione ſumuntur; c 10. quinti. *c* ſit vt ſi G, prima ſuperat tertiam L, ſuperet neceſſario quoque H, quarta ſextam M; Et ſi æqualis, æqualis; Et ſi deficit, deficiat. Itaque cum G, H, æque multiplices primæ A, & tertiæ D, vel deficiant vna ab L, M, æque multiplicibus ſecundæ C, & quartæ F, vel vna æquales ſint, vel vna excedant: in quacunque multiplicatione ſumpta ſint ea multiplicia; d 6. def. quinti. *d* erit A, prima ad C, ſecundam, vt D, tertia ad F, quartam. Quod eſt propoſitum.

DEINDE ſint plures magnitudines tribus, ita vt ſit etiam C, ad N, vt F, ad O. Dico adhuc eſſe vt A, ad N, ita D, ad O. Cum enim iam ſit oſtenſum in tribus magnitudinibus, eſſe A, ad C, vt D, ad F: ponatur autem C, ad N, vt F, ad O, erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, F, O, quæ binæ in eadem ratione ſumuntur. Ergo ex æqualitate in tribus magnitudinibus oſtenſa, rurſus erit, vt A, ad N, ita D, ad O. Eodemque modo idem oſtendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor; ſicut id in quatuor demonſtratum fuit per tres; Et ſic de pluribus. Itaque ſi ſint quotcunque magnitudines, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

CÆTERVM non videtur hoc loco diſſimulandum Theorema quoddam antiquis Mathematicis valde familiare, quanquam à nemine, quod ſciam, ſit adhuc demonſtratum. Id autem eiuſmodi eſt.

SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; Habebunt etiam æque multiplices primæ ac tertiæ, ad ſecundam & quartam eandem rationem: Item æque multiplices ſecundæ & quartæ ad primam & tertiam, eandem rationem habebunt. Et contra, eandem rationem habebunt ſecunda & quarta ad æque multiplices primæ & tertiæ: Item prima ac

tertia

Digitized by Google

tertia ad æque multiplices ſecundæ & quartæ, rationem habebunt eandem.



SIT enim vt A, prima ad B, ſecundam, ita C, tertia ad D, quartam; ſumanturque E, F, ipſarum A, C, æque multiplices: Item G, H, æque multiplices ipſarum B, D. Dico ita eſſe E, ad B, vt F, ad D: Item ita G, ad A, vt H, ad C. Et contra, ita eſſe B, ad E, vt D, ad F: Item ita A, ad G, vt C, ad H. Quoniam enim eſt, vt E, ad A, ita F, ad C, ex conſtructione, cum vtrobique ſit eadem proportio multiplex; poniturque vt A, ad B, ita C, ad D; a *erit ex æquo, vt E, ad B, ita F, ad D. Rurſus quia eſt, vt G, ad B, ita H, ad D, quod vtrobique ſit eadem proportio multiplex, ex conſtructione; eſtque vt B, ad A, ita D, ad C; (Cum enim ponatur, vt A, ad B, ita C, ad D, erit conuertendo, vt B, ad A, ita D, ad C)* b *erit ex æquo, vt G, ad A, ita H, ad C.* a 22. quinti. b 22. quinti.

DEINDE, quia eſt vt B, ad A, ita D, ad C, per inuerſam rationem; Et vt A, ad E, ita C, ad F, quod ex conſtructione vtrobique ſit eadem proportio ſubmultiplex; c *erit ex æquo, vt B, ad E, ita D, ad F. Rurſus quia ponitur, vt A, ad B, ita C, ad D; eſtque vt B, ad G, ita D, ad H, quod ex conſtructione ſit vtrobique eadem proportio ſubmultiplex;* d *erit ex æquo, vt A, ad G, ita C, ad H. Quod eſt propoſitum.* c 22. quinti. d 22. quinti.

EX quo conſtat modus argumentandi, quo frequentiſſime vtuntur Geometræ, maximè Archimedes, Apollonius Pergæus, Theon, & alij. Videlicet, vt A, ad B, ita eſt C, ad D. Ergo vt E, dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. ipſius C, ad D. Item vt A, ad B, ita eſt, C, ad D. Igitur vt A, ad duplum, vel triplum, vel quadruplum, &c. ipſius B, nimirum ad G, ita erit quoque C, ad duplum, vel triplum, vel quadruplum, &c. ipſius D, videlicet ad H.

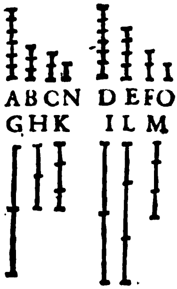
THEOR. 23. PROPOS. 23. xxiij.

SI ſint tres magnitudines, aliæque ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

DEMONSTRATVR hic ratio ex æqualitate, quando proportio eſt perturbata. Sint enim tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, ſitque perturbata earum proportio, hoc eſt, ſit vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico quoque ex æqualitate eſſe vt A, ad C, ita D, ad F. Sumptis enim ipſarum A, B, D, æque multiplicibus G, H, I; Item ipſarum C, E, F, æque multiplicibus K, L, M; e Erit vt A, ad B, ita G, ad H, cum G, H, e 15. quinti.

 ſint

Digitized by Google



ſint ipſarum A,B, æque multiplices: At vt A, ad B, ita eſt E, ad F; *a* Igitur vt G, ad H, ita quoq; eſt E, ad F; *b* Sed vt E, ad F, ita eſt quoque L, ad M; quod L, M, ſint ipſarum E, F, æque multiplices. *c* Igitur erit quoque vt G, ad H, ita L, ad M. Rurſus quoniam eſt B, prima ad C, ſecundam, vt D, tertia ad E, quartam; *d* erit quoque vt H, multiplex primæ B, ad K, multiplicem ſecundæ C, ita I, multiplex tertiæ D, ad L, multiplicem quartæ E. Quia igitur ſunt tres magnitudines G, H, K, & aliæ tres I, L, M, quæ binæ in eadem ratione ſumuntur, eſtque earum proportio perturbata; cum oſtenſum ſit eſſe vt G, ad H, ita L, ad M: Et vt H, ad

a 11. *quinti.* b 15. *quinti.* c 11. *quinti.* d 4. *quinti.*

e 21. *quinti.* K, ita I, ad L; *e* fit vt ſi G, prima ſuperat tertiam K, ſuperet quoque quarta I, ſextam M; & ſi æqualis, æqualis; & ſi deficit, deficiat. Itaque cum G, & I, æque multiplices primæ A, & tertiæ D, à K, & M, æque multiplicibus ſecundæ C, & quartæ F, vel vna deficiant, vel vna æquales ſint, vel vna excedant; *f* erit vt A, prima ad
f 6. *def. quinti.* C, ſecundam, ita D, tertia ad F, quartam. quod eſt propoſitum. Itaque ſi ſint tres magnitudines, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

QVOD ſi fuerint plures magnitudines tribus, fueritque earum proportio perturbata, nimirum ſi fuerit A, ad B, vt F, ad O; & B, ad C, vt E, ad F; & C, ad N, vt D, ad E. Dico adhuc eſſe vt A, ad N, ita D, ad O, quanquam proportio ex æqualitate, quando proportio eſt perturbata, apud Geometras in vſu non ſit in pluribus magnitudinibus, quàm in tribus, quæ cauſa fuit, cur Euclides antecedentem propoſitionem de quotquot magnitudinibus, hanc autem de tribus duntaxat propoſuerit, quamuis vera etiam ſit de pluribus. quod ita probatur. Cum iam ſit oſtenſum in tribus magnitudinibus, eſſe A, ad C, vt E, ad O; Ponatur autem eſſe ita C, ad N, vt D, ad E, erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres, D, E, O, quæ binæ in eadem ſumuntur proportione, & earum proportio eſt perturbata. Ergo rurſus ex æqualitate in tribus magnitudinibus oſtenſa, erit vt A, ad N, ita D, ad O. Eodemque modo idem oſtendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor, ſicut id in quatuor fuit demonſtratum, per tres. Et ſic de pluribus. Quod eſt propoſitum.

xxiv.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad ſecundam eandem rationem, quam ſexta ad quartam: Etiam

Digitized by Google

Etiam compoſita prima cum quinta, ad ſecundam eandem habebit rationem, quam tertia cum ſexta, ad quartam.

QVOD propoſitione 2. demonſtrauit Euclides de ſola proportione multiplici, demonſtrat hoc loco de omni proportione, etiam irrationali. Sit enim A B, prima ad C, ſecundam, vt D E, tertia ad F, quartam; Item B G, quinta ad C, ſecundam, vt E H, ſexta ad F, quartam. Dico ita eſſe A G, compoſitam ex prima ac quinta, ad ſecundam C, vt eſt D H, compoſita ex tertia & ſexta, ad quartam F.



Cum enim ſit vt B G, ad C, ita E H, ad F; erit conuertendo vt C, ad B G, ita F, ad E H. Quoniam igitur eſt A B, ad C, vt D E, ad F; & C, ad B G, vt F, ad E H; *a* erit ex æquali A B, ad B G, vt D E, ad E H. *b* Componendo igitur erit vt tota A G, ad B G, ita tota D H, ad E H. Itaque cum rurſus ſit A G, ad B G, vt D H, ad E H; & B G, ad C, vt E H, ad F: *c* erit ex æquali A G, ad C, vt D H, ad F. quod eſt propoſitum. Si prima igitur ad ſecundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 22. *quinti.* b 18. *quinti.* c 22. *quinti.*

SCHOLIVM.

HÆC propoſitio vera eſt, ſiue magnitudines A B, B G, & G, ſint eiuſdem generis cum magnitudinibus D E, E H, & F, ſiue non, vt ex demonſtratione conſtat.

EODEM fere modo oſtendetur in omni genere proportionis id, quod Theoremate ſexto huius lib. demonſtratum eſt in multiplicibus magnitudinibus duntaxat. Videlicet.

SI duæ magnitudines ad duas magnitudines eandem habeant proportionem, & detractæ quædam habeant ad eaſdem eandem proportionem: & reliquæ ad eaſdem eandem proportionem habebunt.

HABEANT enim A G, D H, ad C, & F, eandem proportionem, hoc eſt, ſit A G, ad C, vt D H, ad F. Item detractæ A B, D E, ad eaſdem C, F, eandem habeant proportionem; ita vt ſit quoque A B, ad C, vt D E, ad F. Dico & reliquas B G, E H, eandem habere proportionem ad eaſdem C, F, hoc eſt, eſſe B G, ad C, vt E H, ad F. Cum enim ſit vt A B, ad C, ita D E, ad F, d erit conuertendo vt C, ad A B, ita F, ad D E. Quoniam igitur eſt A G, ad C, vt D H, ad F, & C, ad A B, vt F, ad D E: e erit ex æqualitate A G, ad A B, vt D H, ad D E. Diuidendo ergo erit quoque vt B G, ad A B, ita E H, ad D E. Itaq; cum rurſus ſit B G, ad A B, vt E H, ad D E; & A B, ad C, vt D E, ad F: f erit ex æquali B G, ad C, vt E H, ad F. Quod eſt propoſitum.

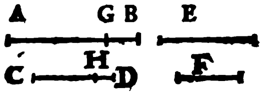
d 22. *quinti* e 17. *quinti.* f 22. *quinti.*

Digitized by Google

xxv.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.



SIT enim A B, ad C D, vt E, ad F, ſitque A B, omnium maxima, & F, minima. Dico duas A B, & F, ſimul eſſe maiores duabus C D, & E, ſimul. Auferatur enim ex A B, magnitudo A G, æqualis ipſi E; & ex C D, alia C H, æqualis ipſi F. Erit igitur A G, ad C H, vt E, ad F, hoc eſt, vt A B, ad C D. Quare cum ſit tota A B, ad totam

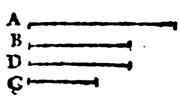
a 19. quinti. C D, vt ablata A G, ad ablatam C H: a erit quoque vt tota A B, ad totam C D, ita reliqua G B, ad reliquam H D: Eſt autem A B, (cum ſit omnium maxima) maior, quam C D. Igitur & G B, maior erit quam H D. Quoniam vero A G, & E, æquales ſunt; ſi ipſis addantur æquales F, & C H, nimirum F, ipſi A G, & C H, ipſi E; fient A G, & F, ſimul æquales ipſis E, & C H, ſimul. Additis igitur inæqualibus G B, & H D, fient A B, & F, ſimul maiores quam E, & C D, ſimul, cum G B, ſit maior quam H D. Quod eſt propoſitum. Si ergo quatuor magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

NECESSARIO autem ſequitur, ſi antecedens magnitudo vnius proportionis fuerit omnium maxima, conſequentem alterius eſſe omnium minimam; vt in propoſito exemplo cernere licet. Cum enim ſit vt A B, ad C D, ita E, ad F; & A B, prima maior quam

b 14. quinti. *tertia E; b erit quoque C D, ſecunda maior quam F, quarta. Item quia maior eſt A B, quam C D, erit quoq; E, maior quam F, ob eandem proportionem A B, ad C D, & E, ad F, vt in ſcholio propoſ. 14. oſtendimus. Quod ſi è contrario antecedens vnius proportionis fuerit omnium minima, erit conſequens alterius omnium maxima, vt conſtat, ſi dicatur eſſe F, ad E, vt C D, ad A B. Debent quoque omnes quatuor magnitudines eſſe eiuſdem generis, alias non poſſet vna magnitudo componi ex maxima & minima; imò neque ex reliquis duabus. Addit hoc in loco Federicus Commandinus theorema aliud huic 25. non multum diſſimile, videlicet.*

SI tres magnitudines fuerint proportionales: Maxima & minima maiores erunt quam dupla reliquæ.



SIT vt A, ad B, ita B, ad C, ſitque A, maxima, & C, minima. Dico A, & C, ſimul maiores eſſe dupla ipſius B. Sumpta enim

Digitized by Google

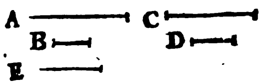
enim D, ipſi B, æquali, erit, vt A, ad B, ita D, ad C. Igitur A, & C, ſimul maiores erunt, quam B, & D, ſimul, a *vt proxime demonſtratum eſt, hoc eſt, quam dupla ipſius B. Quod eſt propoſitum.* a 25. quinti.

HIC finem Euclides imponit quinto libro. Verum quia Campanus, & nonnulli alij adiiciunt alias quaſdam propoſitiones, quibus ſæpenumero grauiſſimi Scriptores, vt Archimedes, Apollonius, Ioannes Regiomontanus, & alij vtuntur, eaſque quaſi eſſent Euclidis, citant; placuit eas huic quinto libro annectere, & maxima, quæ fieri poteſt, breuitate demonſtrare, nec non in numerum, ac ſeriem propoſitionum Euclidis referre. Omnes autem traduntur de magnitudinibus improportionalibus, quarum prima hæc eſt.

THEOR. 26. PROPOS. 26. xxvj.

SI prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: habebit conuertendo ſecunda ad primam minorem proportionem, quam quarta ad tertiam.

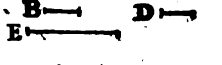
HABEAT enim A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico proportionem B, ad A, minorem eſſe proportione D, ad C. Intelligatur enim eſſe E, ad B, vt C, ad D; eritque proportio A, ad B, maior quoque quam E, ad B;



b ac propterea A, maior erit quam E. c Quare minor erit proportio B, ad A, maiorem, quam B, ad E, minorem: Sed vt eſt B, ad E, ita eſt conuertendo D, ad C. Igitur proportio B, ad A, minor eſt quoque, quam D, ad C. Quod eſt propoſitum. b 10. quinti. c 8. quinti.

SCHOLIVM.

EODEM fere modo demonſtrabimus, ſi prima ad ſecundam habuerit minorem proportionem, quam tertia ad quartam, conuertendo maiorem eſſe proportionem ſecundæ ad primam, quam quartæ ad tertiam; dummodo vocem, maioris, mutemus in vocem, minoris, & contra.

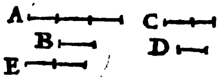


SIT enim minor proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico, conuertendo, B, ad A, maiorem habere proportionem, quam D, ad C. Intelligatur enim eſſe E, ad B, vt C, ad D; Eritque proportio A, ad B, etiam minor, quam E, ad B, d *ac propterea A, minor erit, quam E.* e *Quare maior erit proportio B, ad A, minorem, quam B, ad E, maiorem: Sed vt B, ad E, ita eſt conuertendo D, ad C. Igitur & proportio B, ad A, maior eſt, quam D, ad C. Quod eſt propoſitum.* d 10. quinti. e 8. quinti.

ALITER. Quoniam minor eſt proportio A, ad B, quam C, ad
a 26. *D; erit maior proportio C, ad D, quam A, ad B.* a *Igitur conuertem-*
quinti. *do minor erit proportio D, ad C, quam B, ad A, ac proinde maior erit*
proportio B, ad A, quam D, ad C. Quod eſt propoſitum.

xxvij. THEOR. 27. PROPOS. 27.

SI prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque viciſſim prima ad tertiam maiorem proportionem, quam ſecunda ad quartam.

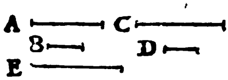


HABEAT enim A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico permutando maiorem eſſe quoq; proportionem A, ad C, quam B, ad D. Intelligatur namque eſſe E, ad B,
b 10. vt C, ad D, eritque proportio A, ad B, maior etiam quam E, ad
quinti. B: *b* Ideoque A, maior erit quam E. *c* Quare maior erit propor-
c 8. tio A, ad C, quam E, ad C. *d* Quoniam vero permutando eſt, vt
quinti. E, ad C, ita B, ad D, (cum poſita ſit E, ad B, vt C, ad D) Igitur pro-
d 16. portio A, ad C, maior quoque erit quam B, ad D. Quod eſt pro-
quinti. poſitum.

SCHOLIVM.

SIMILITER oſtendemus, ſi prima ad ſecundam minorem habuerit proportionem, quam tertia ad quartam, viciſſim prima ad tertiam minorem eſſe proportionem, quam ſecunda ad quartam.

SIT namque minor proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico permutando, minorem quoque eſſe proportionem A, ad C, quam B, ad D.



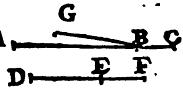
Intelligatur enim eſſe E, ad B, vt C, ad D;
Eritque proportio A, ad B, minor quoq;
e 10. *quam E, ad B;* e *Ac propterea A, minor*
quinti. *erit, quam E.* f *Quare minor erit propor-*
f 8. *tio A, ad C, quam E, ad C.* g *Sed permutando, vt E, ad C, ita B, ad*
quinti. *D (cum poſita ſit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, mi-*
g 16. *nor quoque erit, quam B, ad D. Quod eſt propoſitum.*
quinti. *ALITER. Quoniam minor eſt proportio A, ad B, quam C, ad*
h 27. *D, erit maior proportio C, ad D, quam A, ad B.* h *Ergo permutan-*
quinti. *do, maior etiam erit proportio C, ad A, quam D, ad B:* i *ac proinde*
i 26. *conuertendo, minor erit proportio A, ad C, quam B, ad D. Quod eſt*
quinti. *propoſitum.*

xxviij. THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem,

Digitized by Google

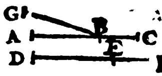
tionem, quàm tertia ad quartam: Habebit quoque compoſita prima cum ſecunda, ad ſecundam maiorem proportionem, quàm compoſita tertia cum quarta, ad quartam.



SIT maior proportio A B, ad B C, quam D E, ad E F. Dico & componendo maiorem eſſe proportionem A C, ad B C, quàm D F, ad E F. Intelligatur enim eſſe G B, ad B C, vt D E, ad E F; eritque proportio A B, ad B C, maior quoque, quàm G B, ad B C; a Ideoque A B, maior, quàm G B. Addita ergo communi B C; fiet A C, maior quàm G C; b maiorque propterea erit proportio A C, ad B C, quàm G C, ad B C. Sed componendo, c vt eſt G C, ad B C, ita eſt D F, ad E F. (quod poſita ſit G B, ad B C, vt D E, ad E F.) Maior ergo etiam erit proportio A C, ad B C, quàm D F, ad E F. Quod eſt propoſitum.

a 10. quinti.
b 8. quinti.
c 18. quinti.

SCHOLIVM.



EADEM ratione oſtendemus, ſi proportio prima ad ſecundam minor fuerit, quàm tertia ad quartam, minorem quoque eſſe proportionem prima & ſecunda ſimul, ad ſecundam, quàm tertia & quarta ſimul, ad quartam.

SIT enim minor proportio A B, ad B C, quàm D E, ad E F. Dico & componendo minorem eſſe proportionem A C, ad B C, quàm D F, ad E F. Intelligatur enim eſſe G B, ad B C, vt D E, ad E F; eritq; proportio A B, ad B C, minor quoque, quàm G B, ad B C; d *ideoq; A B, minor erit, quàm G B. Addita ergo communi B C; fiet A C, minor, quàm G C;* e *minorq; propterea erit proportio A C, ad B C, quàm G C, ad B C. Sed componendo, vt G C, ad B C, ita eſt D F, ad E F. (quòd poſita ſit G B, ad B C, vt D E, ad E F.) Minor ergo etiam erit proportio A C, ad B C, quàm D F, ad E F. Quod eſt propoſitum.*

d 10. quinti.
e 8. quinti.

ALITER. Quoniam minor eſt proportio A B, ad B C, quàm D E, ad E F; erit maior proportio D E, ad E F, quàm A B, ad B C. f *Igitur componendo, maior quoque proportio erit D F, ad E F, quàm A C, ad B C, ac propterea, minor erit proportio A C, ad B C, quàm D F, ad E F. quod eſt propoſitum.*

f 28. quinti.

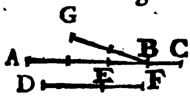
THEOR. 29. PROPOS. 29.

xxix.

SI compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam maiorem habuerit proportionem, quàm compoſita tertia cum quarta ad quartam: Habebit quoque diuidendo prima ad ſecundam maiorem proportionem, quàm tertia ad quartam.

Digitized by Google

SIT maior proportio A C, ad B C, quàm D F, ad E F. Dico &
diuidendo maiorem eſſe proportionem A B, ad B C, quàm D E,
ad E F. Intelligatur enim eſſe G C, ad B C, vt D F, ad E F, eritque



proportio A C, ad B C, maior quoque pro-
a 10. portione GC, ad BC: a ideoque maior erit
quinti. A C, quàm G C. Ablata ergo communi B C;
b 8. maior erit A B, quàm G B: b Ac propterea
quinti. maior erit proportio A B, ad B C, quàm G B, ad B C. c Sed diui-
c 17. dendo, vt eſt G B, ad B C, ita eſt D E, ad E F. (Poſita namque eſt
quinti. G C, ad B C, vt D F, ad E F.) Igitur maior quoque erit proportio
A B, ad B C, quàm D E, ad E F. Quod eſt propoſitum.

SCHOLIVM.

QVOD ſi prima cum ſecunda ad ſecundam, minorem proportionem habuerit, quàm tertia cum quarta, ad quartam; habebit & diuidendo prima ad ſecundam proportionem minorem, quàm tertia ad quartam.

SIT enim minor proportio A C, ad B C, quàm D F, ad E F. Dico di-

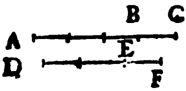


uidendo quoque minorem eſſe proportionẽ A B,
ad B C, quàm D E, ad E F. Intelligatur enim
eſſe G C, ad B C, vt D F, ad E F; eritq; proportio
d 10. *A C, ad B C, minor quoque, quàm G C, ad B C:* d *ideoque minor*
quinti. *erit A C, quàm G C. Ablata ergo communi B C; minor erit A B,*
e 8. *quàm G B:* e *Ac propterea minor erit proportio A B, ad B C, quàm*
quinti. *G B, ad B C:* f *Sed diuidendo eſt, vt G B, ad B C, ita D E, ad E F.*
f 17. *(Poſita namque eſt G C, ad B C, vt D F, ad E F) Igitur minor quoque*
quinti. *proportio erit A B, ad B C, quàm D E, ad E F. Quod eſt propoſitum.*

ALITER. Quoniam minor proportio eſt A C, ad B C, quàm
D F, ad E F; erit maior proportio D F, ad E F, quàm A C, ad B C.
g 29. g *Igitur & diuidendo, maior erit proportio D E, ad E F, quàm A B,*
quinti. *ad B C: atque idcirco minor erit proportio A B, ad B C, quàm D E,*
ad E F. Quod eſt propoſitum.

XXX. THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI compoſita prima cum ſecunda, ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quam compoſita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit per conuerſionem rationis, prima cum ſecunda ad primam, minorem proportionem, quàm tertia cum quarta, ad tertiam.



SIT maior proportio A C, ad B C, quàm
D F, ad E F. Dico per conuerſionem rationis,
minorem eſſe proportionem A C, ad A B,
quàm D F, ad D E. Cùm enim ſit A C, ad
B C, ma-

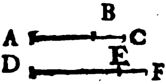
Digitized by Google

B C, maior proportio, quam D F, ad E F; *a* erit & diuidendo, a 29.
maior proportio A B, ad B C, quàm D E, ad E F. *b* Quare conuertendo, quinti.
minor erit proportio B C, ad A B, quàm E F, ad D E; b 26.
c Ac propterea & componendo, minor erit proportio totius A C, quinti.
ad A B, quàm totius D F, ad D E. Quod eſt propoſitum. c 28.

quinti.

SCHOLIVM.

NON diſſimili ratione oſtendemus, ſi compoſita prima cum ſecunda minorem habuerit proportionem ad ſecundam, quam compoſita tertia cum quarta ad quartam, per conuerſionem rationis, maiorem eſſe proportionem prima & ſecunda ad primam, quàm tertia & quarta ad tertiam.



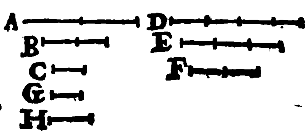
SIT enim minor proportio A C, ad B C, quàm D F, ad E F. Dico per conuerſionem rationis maiorem eſſe proportionem A C, ad A B, quàm D F, ad D E. Cum enim minor ſit proportio A C, ad B C, quàm D F, ad E F, d *erit & diuidendo minor proportio A B, ad B C, quàm D E, ad E F. Quare* e *conuertendo, erit maior proportio B C, ad A B, quàm E F, ad D E:* f *Ac proinde & componendo maior proportio erit A C, ad A B, quàm D F, ad D E. Quod eſt propoſitum.*

d 29. quinti. e 26. quinti. f 30. quinti.

ALITER. Quoniam minor eſt proportio A C, ad B C, quàm D F, ad E F; erit maior proportio D F, ad E F, quàm A C, ad B C. g *Ergo per conuerſionem rationis minor erit proportio D F, ad D E, quàm A C, ad A B: Hoc eſt, maior proportio erit A C, ad A B, quàm D F, ad D E. Quod eſt propoſitum.* g 30. quinti.

THEOR. 31. PROPOS. 31. XXXI.

SI ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitque maior proportio primæ priorum ad ſecundam, quàm primæ poſteriorum ad ſecundam; Item ſecundæ priorum ad tertiam maior, quàm ſecundæ poſteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate maior proportio primæ priorum ad tertiam, quàm primæ poſteriorum ad tertiam.

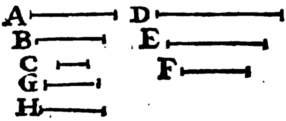


SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, ſitq; maior proportio A, ad B, quàm D, ad E: Item maior B, ad C, quàm E, ad F. Dico ex æqualitate maiorem quoque eſſe A, ad C, quàm D, ad F. Intelligatur enim eſſe G, ad C, vt E, ad F; eritque propterea proportio B, ad C; maior, quàm G, ad C; *h* Ideoque B, maior erit quàm G. Quare *i* maior erit proportio A, ad G, minorem quàm

h 10. quinti. i 8. quinti.

quàm A, ad B, maiorem: Ponitur autem proportio A, ad B,
maior, quàm D, ad E. Multò ergo maior erit proportio A, ad G,
quàm D, ad E. Intelligatur rurſus eſſe H, ad G, vt D, ad E; erit-
a 10. que propterea maior proportio A, ad G, quàm H, ad G; *a* Ideo-
quinti. que A, maior erit, quàm H. *b* Quare maior quantitas A, ad C,
b 8. habebit maiorem proportionem, quàm minor quantitas H, ad
quinti. eandem C: *c* Atqui vt H, ad C, ita eſt, ex æqualitate, D, ad E.
c 22. (quoniã vt D, ad E, ita eſt H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior
quinti. ergo proportio quoque erit A, ad C, quàm D, ad F. Quod eſt
propoſitum.

SCHOLIVM.



EADEM ratione oſtendemus, ſi fuerit proportio A, ad B, quæ D, ad E; At B, ad C, maior quàm E, ad F, Vel contrà, ſi proportio A, ad B, fuerit maior quàm D, ad E; At B, ad C, eadem, quæ E, ad F, ex æqualitate maiorem eſſe quoque proportionem A, ad C, quàm D, ad F.

*SIT enim primum A, ad B, vt D, ad E, ſed maior proportio B, ad
C, quàm E, ad F. Intelligatur eſſe G, ad C, vt E, ad F, eritq; propterea*
d 10. *proportio B, ad C, maior, quàm G, ad C:* d *Ideoque B, maior erit*
quinti. *quàm G.* e *Quare maior erit proportio A, ad G, quàm A, ad B. Po-*
e 8. *nitur autem A, ad B, vt D, ad E. Igitur & proportio A, ad G, maior*
quinti. *erit, quàm D, ad E. Intelligatur rurſus eſſe H, ad G, vt D, ad E, eritq;*
f 10. *propterea maior proportio A, ad G, quàm H, ad G.* f *Ideoque A, ma-*
quinti. *ior erit, quàm H.* g *Quare maior erit proportio A, ad C, quàm H, ad*
g 8. *C.* h *Atqui vt H, ad C, ita eſt, ex æqualitate, D, ad F. (quoniam*
quinti. *vt D, ad E, ita eſt H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo*
h 22. *proportio quoq; erit A, ad C, quàm D, ad F. Quod eſt propoſitum.*
quinti. *DEINDE ſit maior proportio A, ad B, quàm D, ad E, ſed B, ad
C, vt E, ad F. Intelligatur eſſe C, ad C, vt E, ad F, eritq; propterea et-*
i 9. *iam B, ad C, vt G, ad C:* i *Ideoque B, ipſi G, æqualis erit.* k *Quare*
quinti. *erit A, ad G, vt A, ad B. Ponitur autẽ proportio A, ad B, maior quàm*
k 7. *D, ad E. Igitur & proportio A, ad G, maior erit quàm D, ad E. Intel-*
quinti. *ligatur rurſus eſſe H, ad G, vt D, ad E. eritq; propterea maior propor-*
l 10. *tio A, ad G, quàm H, ad G,* l *Ideoq; A, maior erit, quàm H.* m *Qua-*
quinti. *re maior proportio erit A, ad C, quàm H, ad C:* n *Atqui vt H, ad C,*
m 8. *ita eſt ex æqualitate, D, ad F. (quoniam vt D, ad E, ita eſt H, ad*
quinti. *G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior erit quoq; proportio A, ad C,*
n 22. *quàm D, ad F. Quod eſt propoſitum.*
quinti. *NON diſſimiliter demonſtrabimus, ſi proportiones priorum ma-
gnitudinum minores fuerint, etiam proportionem extremarum eſſe
minorem. Idemque eueniet, ſi fuerit A, ad B, vt D, ad E; ſed minor
ſit proportio B, ad C, quàm E, ad F: Aut contrà, ſi proportio A, ad B,
fuerit*

fuerit minor, quàm D, ad E, at B, ad C, ſit, vt E, ad F. Eadem namq; ſemper erit demonſtratio, ſi modò vocem, maioris, vbique permutes in vocem, minoris, vt patet.

QVOD ſi plures fuerint magnitudines tribus, ſiue omnes proportiones in vno ordine magnitudinum ſint maiores, vel minores omnibus proportionibus in alio ordine magnitudinum, ſiue vna tantùm maior, quàm vna, vel dua, &c. oſtendemus maiorem vel minorem quoque eſſe proportionem prima priorum ad vltimam, quàm prima poſteriorum ad vltimam, ea methodo, quam propoſ. 22 tradidimus: adhibendo propoſ. 12. loco huius propoſ. 31. quando tres magnitudines vnius ordinis proportionales ſunt tribus magnitudinibus alterius ordinis. Item vſurpando hoc ſcholium, quando vna tantùm proportio in tribus magnitudinibus æqualis eſt vnitatum proportioni in tribus magnitudinibus alterius ordinis.

NAM ſi maior eſt proportio A, ad B, quàm E, ad F; & maior B, ad C, quàm F, ad G, & maior C, ad D, quàm G, ad H; a erit ex æquo maior proportio A, ad C, quàm E, ad G. Quia igitur rurſus maior proportio eſt A, ad C, quàm E, ad G; & maior C, ad D, quàm G, ad H; b erit quoq; ex æquo maior proportio A, ad D, quàm E, ad H.

A.	E.
B.	F.
C.	G.
D.	H.

a 31. quinti.

b 31. quinti.

QVOD ſi tres magnitudines A, B, C, tribus E, F, G, proportionales ſint, ſed maior ſit proportio C, ad D, quàm G, ad H: c erit ex æquo A, ad C, vt E, ad G. Ergo ex hoc ſcholio, maior proportio erit A, ad D, quàm E, ad H. c 22. quinti.

SI verò maior proportio ſit A, ad B, quàm E, ad F; ſed tres B, C, D, proportionales ſint tribus F, G, H, erit hoc ſcholio, maior proportio A, ad C, quàm E, ad G; Et rurſus maior A, ad D, quàm E ad H.

SI autem maior ſit proportio A, ad B, quàm E, ad F: ſed B, ad C, vt F, ad G; at maior proportio C, ad D, quàm G, ad H. Vel A, ad B, vt E, ad F, ſed maior proportio B, ad C, quàm F, ad G; at C, ad D, vt G, ad H, erit ſemper ex hoc ſcholio, maior proportio A, ad C, quàm E, ad G: ac proinde rurſus maior A, ad D, quàm E, ad H, &c.

A.	E.
B.	F.
C.	G.
D.	H.

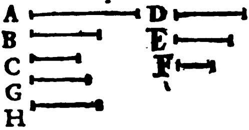
IDEM Euclides, ſi omnes proportiones vnius ordinis ſint minores omnibus proportionibus alterius ordinis, vel vna vel dua. Item ſi ſint plures magnitudines, vt propoſitione 22. diximus.

THEOR. 32. PROPOS. 32. xxxij.

SI ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitque maior proportio primæ priorum ad ſecundam, quam ſecundæ poſteriorum ad tertiam; Item ſecundæ priorum ad tertiam maior, quàm primæ poſteriorum ad ſecundam: Erit quoque ex æqualitate, maior propor-

proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ poſteriorum ad tertiam.

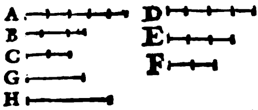
SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, ſitque maior proportio A, ad B, quàm E, ad F, Item maior B, ad C, quàm D, ad E, Dico eſſe quoque maiorem proportionem ex æqualitate A, ad C, quàm D, ad F. Intelligatur enim eſſe G, ad C, vt D, ad E,



eritque propterea proportio B, ad C, maior quàm G, ad C. *a* Ideoque maior erit B, quàm G. *b* Quare maior erit proportio A, ad G, minorē, quàm eiuſdem A, ad B, maiorem; Eſt autem proportio A, ad B, maior quàm E, ad F. Multò ergo maior eſt proportio A, ad G, quàm E, ad F. Intelligatur rurſus eſſe H, ad G, vt E, ad F; Eritq; propterea maior proportio A, ad G, quàm H, ad G; *c* ideoq; maior erit A, quàm H. *d* Quocirca A, maior ad C, maiorem habebit proportionem, quàm H, minor ad eandem C: *e* At vt H, ad C, ita eſt ex æqualitate, D, ad F. (Quoniam vt D, ad E, ita eſt G, ad C: & vt E, ad F: ita eſt H, ad G.) Maior ergo etiam eſt proportio A, ad C, quàm D, ad F. Quod eſt propoſitum.

a 10. quinti. b 8. quinti. c 10. quinti. d 8. quinti. e 23. quinti.

SCHOLIVM.



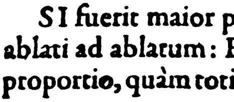
EADEM ratione, ſi fuerit proportio A, ad B, qua E, ad F, At B, ad C, maior quàm D, ad E. Vel contrà, proportio A, ad B, maior, quam E, ad F, At B, ad C, eadem, qua D, ad E, oſtendemus, ex æqualitate maiorem eſſe proportionem A, ad C, quàm D, ad F, vt in propoſita figura perſpicitur.

HAVD ſecus oſtendemus, ſi proportiones priorum magnitudinũ minores fuerint, etiam extremorũ proportionem eſſe minorem, &c.

QVOD ſi fuerint plures magnitudines tribus, demonſtrabimus, maiorem quoq; vel minorem eſſe proportionem primæ priorum ad vltimam, quàm primæ poſteriorum ad vltimam, ea arte, qua vſi ſumus propoſ. 23. &c. Quæ omnia perſpicua ſunt. ſi diligenter demonſtrationes ſcholij præcedentis propoſ. conſiderentur.

xxxiij. THEOR. 33. PROPOS. 33.

SI fuerit maior proportio totius ad totum, quàm ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quàm totius ad totum.



SIT maior proportio totius AB, ad totam CD, quam ablatæ AE, ad ablatam CF. Dico & proportionem reliquæ EB, ad reliquam FD, maiorem eſſe, quàm totius AB, ad totam CD. Cùm enim maior ſit propor-

Digitized by Google

proportio A B, ad C D, quàm A E, ad C F; *a* erit quoque permutando, maior proportio A B, ad A E, quàm C D, ad C F; *b* ac propterea, per conuerſionem rationis, minor erit proportio A B, ad E B, quàm C D, ad F D, *c* Permutando igitur, minor quoque erit proportio A B, ad C D, quàm E B, ad F D, hoc eſt, E B, reliqua ad reliquam F D, maiorem habebit proportionem, quàm tota A B, ad totam C D. Quod eſt propoſitum.

a 27. quinti. b 30. quinti. c 27. quinti.

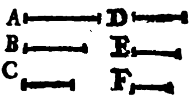
SCHOLIVM.

QVOD ſi tota ad totam habuerit minorem proportionem, quàm ablata ad ablatam, habebit & reliqua ad reliquam maiorem proportionem, quàm tota ad totam, vt ex modo demonſtrandi liquet, ponendo ſemper vocem, minoris, pro voce maioris; & vocem, maioris, pro voce, minoris.

THEOR. 34. PROPOS. 34.

xxxiiij.

SI ſint quotcunque magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitque maior proportio primæ priorum ad primam poſteriorum, quàm ſecundæ ad ſecundam, & hæc maior, quàm tertiæ ad tertiam; & ſic deinceps: Habebunt omnes priores ſimul ad omnes poſteriores ſimul, maiorem proportionem; quàm omnes priores, relicta prima, ad omnes poſteriores, relicta quoq; prima; minorem autem, quàm prima priorum ad primam poſteriorum; maiorem denique etiam, quàm vltima priorum ad vltimam poſteriorum.



SINT primùm tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, Sit autem maior proportio A, ad D; quàm B, ad E; Item maior B, ad E, quàm C, ad F. Dico proportionem ipſarum A, B, C, ſimul ad ipſas D, E, F, ſimul maiorem eſſe proportione ipſarum B, C, ſimul ad ipſas E, F; ſimul; minorem verò, proportione A, ad D; maiorem denique etiam proportione C, ad F. Cùm enim maior ſit proportio A, ad D, quàm B, ad E; *d* erit permutando maior A, ad B, quàm D, ad E, *e* Igitur componendo, maior erit proportio ipſarum A, B, ſimul ad B, quàm ipſarum D, E, ſimul ad E; *f* Permutando ergo rurſus, maior erit proportio A, B, ſimul ad D, E, ſimul, quam B, ad E. Itaque cùm tota A B, ad totam D, E, maiorem habeat proportionem, quàm ablata B, ad ablatam E; *g* habebit quoq; reliqua A, ad reliquam D, maiorem proportionem, quàm tota A, B, ad totã D, E. Eadem ratione, maior erit proportio

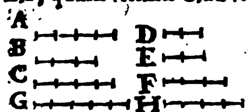
d 27. quinti. e 18. quinti. f 27. quinti. g 33. quinti.

Digitized by Google

tio B, ad E, quam totius B, C, ad totam E, F: Multò ergo maior e-
a 27. rit proportio A, ad D, quam B, C, totius ad totam E, F. a Permu-
quinti. tando igitur, maior erit proportio A, ad B, C, quàm D, ad E, F; b &
b 28. componendo ergo maior eſt proportio totius A, B, C, ad B, C,
quinti. quam totius D, E, F, ad E, F. c Et rurſus permutando, maior pro-
c 27. portio omnium A, B, C, ſimul ad omnes D, E, F, ſimul quàm B, C
quinti. ad E, F. quod eſt primum.

ITAQVE cùm ſit maior proportio totius A, B, C, ad totam
d 33. D, E, F, quam ablatæ B, C, ad ablatam E, F, d erit & maior pro-
quinti. portio reliquæ A, ad reliquam D, quàm totius A, B, C, ad totam
D, E, F, quod eſt ſecundum.

QVONIAM verò maior eſt proportio B, ad E, quàm C, ad
e 27. F; e erit permutando maior quoq; B, ad C, quàm E, ad F; f & cõ-
quinti. ponendo, maior totius B C, ad C, quàm totius E, F, ad F; g & rur-
f 27. ſus permutando, maior B, C, ad E, F, quàm C, ad F. Eſt autem ma-
quinti. ior proportio A, B, C, ad D, E, F, vt oſtendimus, quàm B, C, ad E, F.
g 27. Multò ergo maior erit proportio omnium A, B, C, ad omnes D,
quinti. E, F, quàm vltimæ C, ad vltimam F, quod eſt tertium.



DEINDE ſint quatuor magnitudines vtrobiq; cum eadem hypotheſi, hoc eſt, ſit quoque maior proportio tertiæ C, ad F, tertiam, quàm G, quartæ
ad H, quartam. Dico eadem conſequi. Vt enim iam in tribus
éſt oſtenſum, maior eſt proportio B, ad E, quàm B, C, G, ad E, F, H.
h 27. Multò ergo maior erit A, ad D, quàm B, C, G, ad E, F, H. h Per-
quinti. mutando ergo minor erit A, ad B, C, G, quàm D, ad E, F, H, i & cõ-
i 28. ponendo maior A, B, C, G, ad B, C, G, quàm D, E, F, H, ad E, F, H.
quinti. k & permutando A, B, C, G, ad D, E, F, H, maior quàm B, C, G, ad
k 27. E, F, H. quod eſt primum.
quinti. ITAQVE cùm ſit maior proportio totius A, B, C, G, ad to-
l 33. tam D, E, F, H, quàm ablatæ B, C, G, ad ablatam E, F, H, l erit &
quinti. reliquæ A, ad reliquã D, maior proportio, quàm totius A, B, C, G,
ad totam D, E, F, H. quod eſt ſecundum.

QVONIAM verò, vt in tribus eſt demonſtratum, maior eſt proportio B, C, G, ad E, F, H, quàm G, ad H, & maior A, B, C, G, ad D, E, F, H, quàm B, C, G, ad E, F, H, vt fuit oſtenſum; multò maior erit proportio A, B, C, G, ad D, E, F, H, quàm vltimæ G, ad vltimam H; quod eſt tertium.

EADEM arte concludes, eadem conſequi in quinque magnitudines per quatuor, & in ſex, per quinque, & in ſeptem, per ſex, &c. quemadmodum oſtendimus in quatuor, per tres. Conſtat ergo totum Theorema, &c.

FINIS ELEMENTI QVINTI.

EVCLI-

Digitized by Google

[redacted]

EVCLIDIS ELEMENTVM SEXTVM.

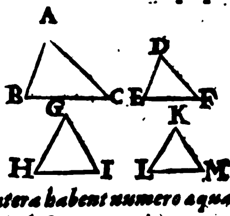
DEFINITIONES.

I.

SIMILES figuræ rectilineæ ſunt, quæ & angulos ſingulos ſingulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.

VT triangula A B C, D E F, ſimilia dicentur, ſi fuerint æquiangula, ita ut angulus A, angulo D; & B, ipſi E; & C, ipſi F, æqualis ſit: Item latera circa æquales angulos proportionalia, hoc eſt, ut A B, ad A C, ita D E, ad D F; & ut A B, ad B C, ita D E, ad E F, & ut A C, ad C B, ita D F, ad F E.

QVOD ſi anguli unius æquales fuerint angulis alterius, ſinguli ſingulis, at latera circa æquales angulos non proportionalia, aut contrà; non dicentur tales figuræ ſimiles: cuiuſmodi ſunt quadratum, & figura altera parte longior. Hæ etenim figuræ habent quidem angulos æquales, utpote rectos, at latera unius lateribus alterius proportionalia nõ ſunt, quippe cùm latera quadrati circa quemuis angulum rectum habeant proportionem æqualitatis, latera verò figuræ altera parte longioris circa quemuis angulum rectum, proportionem inæqualitatis. Ex quibus conſtat, omnes figuras rectilineas æquiangulas, & æquilateras, quæ & angulos & latera habent numero æqualia, eſſe ſimiles, quanquam inter ſe maximè ſint inæquales. Cuiuſmodi ſunt triangula æquilatera G H I, K L M. Propter laterum enim æqualitatem, erit G H, ad G I, ut K L, ad K M. Item G H, ad

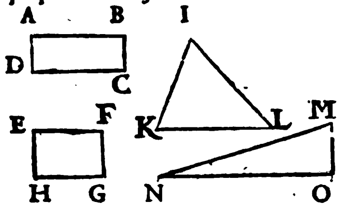


H I, vt K L, ad L M, & G I, ad I H, vt K M, ad M L, cùm ſemper ſit proportio æqualitatis. Idem dicendum eſt de quadratis, pentagonis æquilateris & æquiangulis, nec non de hexagonis, heptagonis, octogonis, & de alijs id genus figuris rectilineis æquiangulis, atque æquilateris.

II.

RECIPROCÆ autem figuræ ſunt, cùm in vtraque figura antecedentes & conſequentes rationum termini fuerint.

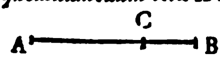
VT ſi in parallelogrammis A B C D, E F G H, latera A B, B C, ita proportionalia fuerint lateribus E F, F G, vt vtrobique ſit & antecedens, & conſequens diuerſarum proportionum, hoc eſt, vt ſit ea proportio A B, ad E F, quæ F G, ad B C, ſiue eadem A B, ad F G, quæ E F, ad B C; (vtroque enim modo A B, eſt antecedens vnius proportionis & B C, conſequens alterius, in figura A B C D, quemadmodum & primo modo E F, eſt conſequens vnius, & F G, antecedens alterius; vel ſecundo modo F G, conſequens, & E F, antecedens, in figura E F G H,) dicentur huiuſmodi parallelogramma reciproca, quamuis ſimilia non ſint. Similiter erunt triangula I K L, M N O, reciproca, ſi fuerit vt I K, ad M N, ita M O, ad I L; vel vt I K, ad M O, ita M N, ad I L. Neque memini me inueniſſe apud Geometras vſum reciprocarum figurarum in alijs figuris, quàm in parallelogrammis, & triangulis.



III.

SECVNDVM extremam, & mediam rationem recta linea ſecta eſſe dicitur, cùm vt tota ad maius ſegmentum, ita maius ad minus ſe habuerit.

SI linea recta quæuis A B, ita diuidatur in C, inæqualiter, vt ſit, quemadmodum tota A B, ad maius ſegmentum A C, ita A C maius ſegmentum ad C B, minus ſegmentum, dicetur diuiſa eſſe ſecundum extremam & mediam rationem. Quam quidem diuiſionem docebit Euclides propoſ. 30. huius lib. eamq́; ſub alijs verbis iam docuit lib. 2. propoſ. 11. vt fiet perſpicuum propoſ. 30. huius lib. Sunt autem penè innumeræ dignitates, atque vtilitates lineæ hoc modo diuiſæ, vt ex libris Stereometriæ conſtabit, præſertim lib. 13. vt non immeritò à quibuſdam dicta ſit diuina proportio, in qua linea eo modo eſt diuiſa.



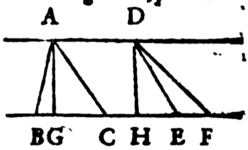
ALTI

Digitized by Google

IV.

ALTITVDO cuiuſque figuræ eſt linea perpendicularis à vertice ad baſin deducta.

SI à vertice A, trianguli A B C, ad baſin B C, perpendicularis ducatur A G, dicetur hæc perpendicularis, altitudo trianguli A B C; ita vt tantam dicatur habere altitudinem triangulum, quanta eſt perpendicularis A G. Sic etiam perpendicularis D H, ducta à D, vertice trianguli D E F, ad baſin E F, ad partes E, protractam, appellabitur altitudo trianguli D E F. Itaque ſi duarum figurarum perpendiculares à verticibus ad baſes, (ſiue hæ protractæ ſint, ſiue non) demiſſæ, fuerint æquales, eandem dicentur huiuſmodi figuræ habere altitudinem.



Tunc autem huiuſmodi perpendiculares erunt æquales, cùm baſes figurarum, ac vertices in eiſdem conſtituti fuerint parallelis, cuiuſmodi ſunt perpendiculares A G, D H, triangulorum A B C, D E F, in eiſdem parallelis conſtitutorum. Cùm enim anguli A G H, D H G, interni ex eadem parte ſint duobus rectis æquales, immò duo recti; a *erunt rectæ A G, D H, parallelæ;* (a 28. primi.) *Sunt autem & A D, G H parallelæ, eo quòd ponantur triangula in eiſdem eſſe parallelis conſtituta. Igitur parallelogrammum erit A D H G;* b *ac propterea latera oppoſita A G, D H, æqualia erunt.* (b 34. primi.) *Eandem igitur dicentur ea triangula habere altitudinem. Quod ſi in eiſdem triangulis vertices ponantur C, & F, baſes verò A B, & D E; non habebunt ea eandem altitudinem. Perpendicularis enim ducta ex F, ad baſin D E, protractam æqualis non eſt perpendiculari ex C, ad baſin A B, deductæ, cùm nec triangula ipſa in eiſdem parallelis poſſint conſtitui, vt manifeſtum eſt.*

RECTE verò ab Euclide altitudo figuræ cuiuſuis definita eſt per lineam perpendicularem, quæ à vertice ad baſin deducitur: quoniam, vt ſcribit Ptolemæus in libello de Analemmate, & referente Simplicio, in libro de dimenſione, menſura cuiuſcunque rei debet eſſe ſtata, determinataq́ue, & non indefinita: Inter omnes autem rectas lineas, penes quas meritò Geometræ, ſicut & vulgus, omnia metiuntur, ſola linea perpendicularis certa eſt, determinataq́ue longitudinis, aliæ autem omnes incertæ indeterminatæq́ue. Qua de re plura ſcripſimus ad initium commentariorum, quos in ſphæram Ioan. de Sacro boſco edidimus.

V.

RATIO ex rationibus componi dicitur, cùm rationum quantitates inter ſe multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.

QVONIAM denominator cuiuslibet proportionis exprimit, quanta ſit magnitudo antecedens ad conſequentem; (vt denominator quadruplæ proportionis, nempe 4. oſtendit, in quauis proportione quadrupla antecedentem magnitudinem quater continere conſequentem; denominator verò proportionis ſubquadruplæ, videlicet $\frac{1}{4}$. *indicat antecedentem eſſe partem quartam conſequentis, &c.) dici ſolet propterea denominator à Geometris, quantitas proportionis; vt idem ſignificet quantitas alicuius proportionis, quod denominator. Vult igitur hæc definitio, proportionem aliquam ex duabus, vel pluribus proportionibus componi, quando harum denominatores, ſeu quantitates inter ſe multiplicatæ effecerint illam proportionem, ſeu (vt vertit Zambertus) effecerint illius proportionis quantitatem, ſiue denominatorem. Vt proportio duodecupla componi dicitur ex dupla, & ſextupla; quoniam denominator proportionis duodecuplæ, nimirum 12. producitur ex multiplicatione denominatoris duplæ proportionis, nempe ex 2. in denominatorem ſextuplæ, hoc eſt, in 6. Sic eadem proportio duodecupla dicitur componi ex tripla & quadrupla. Nam ex multiplicatione 3. in 4. producitur idem denominator 12. duodecuplæ proportionis. Eadem ratione proportio trigecupla componi dicitur ex dupla, tripla, & quintupla. Nam harum denominatores 2. 3. 5. inter ſe multiplicati gignunt 10. denominatorem illius. Sic etiam proportio dupla dicetur componi ex ſeſquialtera, & ſeſquitertia: quia ſeſquialteræ denominator* $1\frac{1}{2}$. *ductus in* $1\frac{1}{3}$. *denominatorem ſeſquitertiæ gignit 2. denominatorem duplæ. Rurſus eadem proportio dupla componetur ex ſeſquiſeptima, & ſupertripartiente quartas. Nam harum proportionum denominatores* $1\frac{1}{7}$. $1\frac{3}{4}$. *inter ſe multiplicati procreant 2. denominatorem duplæ. Item eadem dupla proportio componi dicetur ex ſubſeſquiquarta, & dupla ſeſquialtera; propterea quòd harum denominatores* $\frac{4}{5}$. $2\frac{1}{2}$. *inter ſe multiplicati producunt quoque eundem denominatorem 2. proportionis duplæ. Atque ita ex infinitis alijs proportionibus componi dicetur dupla proportio: quod etiam de quauis alia proportione dici poteſt, vt paulò poſt patebit.*

PORRO quemadmodum in magnitudinibus continuè proportionalibus, proportio primæ ad vltimam componi dicitur ex proportione primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. cùm illa ex his intermedijs conſtet, & illius denominator ex harum denominatoribus inter ſe multiplicatis producatur, vt 5. libro defin.10 expoſuimus: ita vt ſi fuerint duæ proportiones æquales intermediæ, ex quibus dicitur componi, dicatur proportio primæ magnitudinis ad vltimam duplicata proportionis primæ ad ſecundam; ſi tres, triplicata, &c. Sic etiam in magnitudinibus quibuſcunque ordine poſitis, proportio primæ ad vltimam dicetur componi ex proportione primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c.

denom

donec extiterit proportio; quoniam denominator proportionis primæ magnitudinis ad vltimam conſurgit ex denominatoribus proportionum intermediarum inter ſe multiplicatis. Quod quidem primum inductione quadam Theonis Alexandrini, quam hoc loco adducit, confirmabimus: Deinde verò idem duabus demonſtrationibus, quarum vna traditur ab Eutocio Aſcalonita lib. 2. Archimedis de ſphæra & Cylindro, theoremate 4. & in 1. lib. Apollonij Pergæi de conicis elementis propoſ. 11. Altera autem à Vitellione lib. 1. propoſ. 13 ſuæ Perſpectiuæ, comprobabimus.

THEON igitur rem propoſitam ita conatur abſoluere. Habeat AB, ad CD, rationem datam, veluti duplam, aut triplam, aut quamlibet aliam; & CD, ad EF, eandem quoq; datam. Dico quòd ipſius AB, ad EF, ratio conſtat ex AB, ad CD, & ex CD, ad EF, ratione, vel quòd ipſius AB, ad CD, rationis quantitas multiplicata in ipſius CD, ad EF, rationis quantitatem efficit ipſius AB, ad EF, rationis quantitatem. Sit enim primum AB, quàm CD, maior; & CD, quàm EF: & ſit quidem AB, ipſius CD, dupla, & CD, ipſius EF, tripla. Quoniam igitur CD, ipſius EF, tripla eſt, ipſius autem CD, dupla eſt AB; erit AB, ipſius EF, ſextupla. Quoniam ſi triplum alicuius duplicamus, fit ſextuplum; hoc enim eſt propriè compoſitio. Vel ſic. Quoniam AB, dupla eſt ipſius CD, diuidatur AB, in ipſis CD, æqualia, hoc eſt, AG, & GB: & quoniam CD, ipſius EF, tripla eſt; æqualis autem eſt AG, ipſi CD; & AG, igitur ipſius EF, tripla eſt: Id propterea & GB, ipſius EF, tripla eſt. Tota igitur AB, ipſius EF, ſextupla eſt. Ipſius igitur AB, & EF, ratio connectitur per CD, medium limitem, compoſita ex ipſius AB, ad CD, & CD, ad EF, ratione.



SIMILITER autem, & ſi minor fuerit CD, vtraque ipſarum AB, & EF, idipſum colligitur. Sit enim rurſus AB, ipſius CD, tripla, At CD, ipſius EF, ſit dimidia. Et quoniam CD, ipſius EF, dimidia eſt, ipſius autem CD, tripla eſt AB, erit AB, ſeſquialtera ipſius EF. Si enim alicuius dimidium triplicamus, habebit ipſum ſemel, & dimidium: At quoniam AB, ipſius CD, tripla eſt, & CD, ipſius EF, dimidia: qualium AB, æqualium ipſi CD, trium, talium eſt EF, duorũ. Quare ſeſquialterum eſt AB, ipſius EF. Igitur ratio ipſius AB, ad EF, connectitur per CD, medium limitem, compoſita ex ipſius AB, ad CD, & CD, ad EF, ratione.



SED iam rurſus ſit CD, vtraque ipſarum AB, & EF, maior, & ſit quidem AB, ipſius CD, dimidiũ, & CD, ipſius EF, ſeſquitertium. Quoniam igitur, qualium eſt AB, duorum, talium eſt CD, quatuor, qualium autem CD, quatuor, talium EF, trium. Et qualium igitur AB, duorum, talium



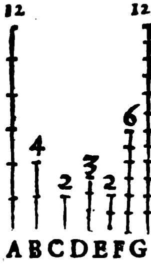
Digitized by Google

talium E F, trium. Connectitur igitur rurſum ratio ipſius A B, ad E F, per C D, medium limitem, quæ duorum eſt ad tria. Similiter quoque & in pluribus, & in reliquis caſibus. Et manifeſtum eſt, quòd ſi à compoſita ratione quauis vna compoſitarum auferatur, vno ſimplicium eiecto, reliqua compoſitarum aſſumetur.

Hæc ad verbum deſumpſimus ex Theone, iuxta interpretationem Zamberti.

EVTOCII verò demonſtratio ita ſe habet.

SINT tres magnitudines A, B, C. Dico proportionem A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B, & B, ad C. Quod quidem facilè demonſtrabitur, aſſumpto priùs hoc principio. Quantitatem ſeu denominatorem cuiuſuis proportionis multiplicatum in conſequentem magnitudinem proportionis eiuſdem, producere antecedentem. Cùm enim denominator indicet habitudinem antecedentis ad conſequentem, neceſſe eſt, conſequentem ſumptam ſecundum denominatorem, hoc eſt, multiplicatam in denominatorem, reſtituere antecedentem. Vt quia 12. ad 3. habent proportionem quadruplam, idcirco 3. multiplicata in 4 producunt 12. Item quia 4. ad 20. habent proportionem ſubquintuplam, cuius denominator eſt $\frac{1}{5}$. fit, vt $\frac{1}{5}$ in conſequentem 20. efficiat 4. &c. Sit igitur proportionis A, ad B, denominator D, proportionis verò B, ad C, denominator ſit E, & D, multiplicans E, producat F. Dico F eſſe quantitatem, ſiue denominatorem proportionis A, ad C, hoc eſt, ſi multiplicetur F, in C, produci A. Producatur namque G, ex multiplicatione F, in C, Dico G, ipſi A, æqualem eſſe, ac proinde & A, fieri ex F, in C. Cùm enim D, ſit denominator proportionis A, ad B, ſi multiplicetur D, in B, producetur A. Eadem ratione ſi E, multiplicetur in C, producetur B.



Quoniam igitur F, & E, multiplicantes C, producunt G. & B, (nam ex F, in C, fit G, & ex E, in C, fit B, vt dictum eſt) a *erit vt F, ad E, ita G, ad B. Rurſus quia D, multiplicans E, & B, producit F, & A,* b *erit vt E, ad B, ita F, ad A, & permutando vt E, ad F, ita B, ad A, & conuertendo rurſus, vt F, ad E, ita A, ad B: Vt autem F, ad E, ita oſtenſum eſt eſſe G, ad B. Igitur vt A, ad B, ita G, ad B; Ideoque æquales erunt quantitates A, & G. Quam ob rem cùm G, producatur ex F, in C, producetur quoque A, ex F, in C: proptereáque F, quantitas erit proportionis A, ad C. Quod eſt propoſitum.*

a 18. *ſeptimi.*
b 17. *ſeptimi.*

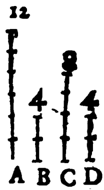
A, 100. B, 20. C, 5.
D, 5. E, 4.
G, 100. F, 20.

SIMILIS ratio eſt in pluribus magnitudinibus. Semper enim proportio prima ad vltimam componetur ex proportionibus primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. Vt ſi fuerint quatuor magnitudines A, B, C, D, componetur proportio A,

ad D,

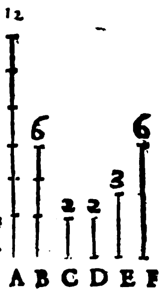
Digitized by Google

ad D, ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Nam ſi intelligantur tres magnitudines A, C, D, componetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad C, & C, ad D, ut oſtenſum eſt. At vero eadem ratione proportio A, ad C, componitur ex proportionibus A, ad B, & B, ad C. Igitur proportio A, ad D, componitur quoque ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Quod eſt propoſitum. Idem cernes in 5. 6. 7. vel quotcunque magnitudinibus.



VITELLIO denique huiuſmodi affert demonſtrationem.

SINT tres magnitudines A, B, C. Dico proportionem A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B; & B, ad C. Hoc autem demonſtrabitur, aſſumpto eodem principio Eutocij. Denominatorem videlicet proportionis multiplicatum in magnitudinem conſequentem proportionis producere antecedentem magnitudinem. Sit namque D, denominator proportionis A, ad B; & E, denominator proportionis B, ad C, At F, denominator proportionis A, ad C. Demonſtrandum eſt igitur F, produci ex D, in E, quod ita fiet. Quoniam quod ex F, prima quantitate in C, quartam producitur, æquale eſt ei, quod ex D, ſecunda in B, tertiam gignitur, cùm ſemper producatur A; (nam ex F, denominatore in C, conſequentem producitur A, antecedens; ſimiliter ex D, denominatore in B, conſequentem producitur antecedens A,) a erit ut F, prima ad D, ſecundam, ita B, tertia ad C, quartã. Cùm igitur E, ſit denominator proportionis B, ad C; erit quoque E, denominator proportionis F, ad D. Quare E, multiplicans conſequẽtem D, producet antecedentem F. Quod eſt propoſitum. Hæc Vitellio.



A, 100. B, 20. C, 5.
D, 5. E, 4.
F, 20.

a 19. ſeptimi.

IDEM oſtendetur in pluribus magnitudinibus, ut prius ex Eutocio. Veluti, datis 6. magnitudinibus A, B, C, D, E, F, componetur proportio A, ad E, ex proportionibus A, ad B; B, ad C, C, ad D; D, ad E; & E, ad F. Nam ut oſtenſum eſt, proportio A, ad F, componitur ex proportione A, ad B, & B, ad F. Hæc autem proportio B, ad F, componitur ex proportione B, ad C, & C, ad F: Et hæc proportio C, ad F, componitur ex proportione C, ad D, & D, ad F: Atque hæc tandem proportio D, ad F, componitur ex proportione D, ad E, & E, ad F. Igitur proportio A, ad F, ex omnibus proportionibus intermedijs componitur: hoc eſt, denominator proportionis A, ad F, gignitur ex quinque denominatoribus quinque proportionum intermediarum inter ſe multiplicatis.

A. B. C. D. E. F.
12. 6. 3. 2. 1. 4.

EX his liquidò conſtat id, quod ad defin. 10. lib. 5. docuimus: nimirum, Continuatis quotlibet quantitatibus continuè proportionalibus, proportionem primæ ad vltimam componi ex omnibus proportionibus intermediis æqualibus, hoc eſt, denominatorem proportionis, quam prima ad vltimam habet, produci ex denominatore proportionis, quam prima habet ad ſecundam, in ſeipſum multiplicato, & ex eodem in numerum productum, & ſic deinceps, donec tot multiplicationes fiant vna minus, quot proportiones inter primam quantitatem, & vltimam ſunt interpoſitæ: Adeò vt duplicata proportio alicuius proportionis conſurgat, cùm huius proportionis denominator bis ponitur, (propter duas æquales proportiones inter primam quantitatem, & tertiam poſitas) atq; ita in ſe multiplicatur; triplicata verò, quando idem denominator ter ponitur, (propter tres proportiones æquales inter primam quantitatem, & tertiam poſitas) atq; ita multiplicatur, primùm in ſe, deinde iterum in numerum productum. Et ſic de quadruplicata, quintuplicata, & de aliis dicendum eſt in infinitum. Eſt enim eadem demonſtratio in magnitudinibus continuè proportionalibus, & in magnitudinibus non proportionalibus: Solùm in illis denominatores æquales erunt. Vt ſi A, B, C, ponantur continuè proportionales, æquales erunt denominatores D, E; & F, erit denominator proportionis duplicatæ, &c.

ETSI autem demonſtratio tam Eutocii, quàm Vitellionis propriè quadrat in proportiones tantùm rationales, cum vtraq; propoſitionibus lib. 7. Euclidis nitatur: quia tamen, quæ de numerorum proportionibus demonſtrantur, conueniunt quoque magnitudinibus incommenſurabilibus, hoc eſt, proportionibus irrationalibus, dici poteſt vtraque demonſtratio omnibus proportionibus conuenire.

VERVM etiamſi non conſtaret, propoſitis pluribus magnitudinibus, denominatorem proportionis, quam prima ad vltimam habet, produci ex multiplicatione denominatorum intermediarum proportionum inter ſe, vt demonſtrauimus, non tamen propterea demonſtrationes, in quibus compoſitio proportionum adhibetur, minùs certæ erunt: quippe cùm in illis hæc denominatorum multiplicatio nõ vſurpetur. Nam quemadmodum, propoſitis pluribus magnitudinibus continuè proportionalibus, primam ad tertiam dixit Euclides defin. 10. lib. 5. habere proportionem duplicatam eius, quam prima habet ad ſecundam; nimirum compoſitam ex duabus proportionibus intermediis, æqualibus: primam verò ad quartam habere proportionem triplicatam eius, quam prima ad ſecundam habet, hoc eſt, compoſitam ex tribus intermediis proportionibus æqualibus, & ſic deinceps; nulla facta mentione multiplicationis denominatorum: Ita quoque, ſi ponantur ordine plures magnitudines, eiuſdem generis non continuè proportionales, dicetur prima ad vltimam habere proportionem compoſitam ex omnibus proportionibus intermediis, licet inter ſe non ſint

omnes

Digitized by Google

omnes æquales, ſiue aliqua ſint maioris inæqualitatis, & aliqua æqualitatis, & aliqua minoris inæqualitatis, ſiue omnes eiuſdem generis ſint, ſolum eam ob cauſam, quod illæ proportiones intermediæ ſint inter extremas duas magnitudines interiectæ; quemadmodum defin. 10. lib. 5. proportio prima ad tertiam dicebatur duplicata, hoc ſolo nomine, quia duæ proportiones æquales interpoſitæ ſunt inter extremas duas magnitudines: Adeo vt non ſit aliud diſcrimen inter hanc compoſitionem proportionum, & illam duplicationem, triplicationem, &c. quæ lib. 5. explicata eſt, quam quod in duplicatione, triplicatione &c. proportionum interiiciuntur proportiones omnes æquales, in compoſitione vero proportionum non neceſſe eſt, interpoſitas proportiones æquales eſſe. Multiplicatio tamen denominatorum vtilis eſt, vt ſciamus, quanam ſit illa proportio, quæ alterius dicitur duplicata, triplicata &c. vel quæ ex propoſitis proportionib. compoſita eſſe dicitur.

VERBI gratia. Vt ſciamus, quæ proportio ſit illa, quæ dicitur duplicata proportionis decuplæ, ponemus 10. denominatorem decuplæ proportionis bis hoc modo, 10. 10. & vnum in alterum ducemus. Numerus enim genitus 100. denominator eſt proportionis, quæ decuplæ eſt duplicata. Vt autem habeamus denominatorem proportionis, quæ eiuſdem decuplæ triplicata dicitur, ponemus 10. denominatorem ter hoc modo 10. 10. 10. & primum in ſecundum ducemus, & numerum productum 100. in tertium. Nam numerus hic procreatus 1000. denominat proportionem decuplæ triplicatam. Quod de aliis quoque proportionibus dicendum eſt. Sed hoc etiam diſcemus abſque denominatorum multiplicatione. Nam ſi continuentur tres numeri in proportione data, vt in tractatu proportionum, cum de proportionalitate Geometrica agebamus, docuimus, habebunt duo extremi numeri proportionem datæ proportionis duplicatam: ſi verò continuentur quatuor numeri, habebunt extremi duo triplicatam proportionem datæ proportionis. Conferendus autem eſt maior cum minore, quando data proportio eſt maioris inæqualitatis; minor vero cum maiore, cum data proportio minor inæqualitatis eſt. Veluti ſi deſideretur proportio decuplæ proportionis duplicata, continuabimus tres numeros in proportione decupla hoc modo, 1. 10. 100. Vel 3. 30. 300. Nam proportio 100. ad 1. vel 300. ad 3. quæ centupla eſt, dicetur decuplæ duplicata. Eodem modo proportio 1. ad 100. vel 3. ad 300. quæ ſubcentupla eſt, dicitur duplicata proportionis ſubdecuplæ 1. ad 10. vel 3. ad 30.

EADEM ratione vt cognoſcamus, quanam ſit proportio illa, quæ verbi gratia componi dicitur ex tripla, dupla, ſeſquialtera, & ſeſquitertia, ſtatuemus ordine harum denominatores hoc modo, 3. 2. $1\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{3}$. eoſque inter ſe multiplicabimus, primum 3. in 2. deinde productum numerum 6. in $1\frac{1}{2}$. & hunc rurſus numerum procreatum 9. in $1\frac{1}{3}$. & ſic deinceps, ſi plures eſſent denominatores. Vltimus enim productus 12. eſt denominator proportionis, quæ ex datis

Digitized by Google

proportionibus componi dicitur; ita vt proportio duodecupla componi dicatur ex tripla, dupla, ſeſquialtera, & ſeſquitertia. Hoc autem intelligemus etiam ſine hac multiplicatione denominatorum. Si namque proportiones componentes continuentur in numeris, ita vt primus ad ſecundum habeat primam proportionem componentem, ſecundus ad tertium ſecundam, tertius ad quartum tertiam, quartus ad quintum quartam, & ita deinceps; erit proportio, quam primus numerus habet ad vltimum, compoſita ex datis proportionibus. Vt in proximo exemplo proportiones datæ, videlicet tripla, dupla, ſeſquialtera, & ſeſquitertia, continuantur in his numeris 36. 12. 6. 4. 3. Vel in his 108. 36. 18. 12. 9. Vel in his 12. 4. 2. 1⅓. 1. Vbiq; enim primus numerus ad ſecundum proportionem habet triplam, ſecundus ad tertium duplam, tertius ad quartum ſeſquialteram, & quartus ad quintum ſeſquitertiam. Proportio ergo primi ad vltimum, quæ duodecupla eſt, componi dicitur ex quatuor illis proportionibus, vt prius. Quo pacto autem quotuis proportiones continuandæ ſint in numeris integris minimis, docet Euclides lib. 8. propoſ. 4.

ITAQVE cum Euclides demonſtrat hoc lib. propoſ. 23. æquiangula parallelogramma habere proportionem compoſitam ex duabus proportionibus, quas duo latera circa vnum angulum vnius habent ad duo latera circa angulum æqualem alterius, nihil aliud intelligit, quàm ſi duæ illæ proportiones laterum continuentur in tribus quantitatibus, eam proportionem parallelogramma inter ſe habere, quam prima quantitas ad tertiam habet. Vt ſi proportio vnius lateris primi parallelogrammi ad vnum latus ſecundi fuerit, vt 8. ad 3. proportio verò alterius lateris ad alterum latus, vt 1. ad 2. nihil aliud eſt intelligendum, quam ſi ſumantur tres numeri, 24. 9. 18. quorum primus ad ſecundum eſt, vt 8. ad 3. & ſecundus ad tertium, vt 1. ad 2. proportionem parallelogrammi primi ad ſecundum eſſe eandem, quam habet primus numerus 24. ad tertium 18. quæ eſt ſeſquitertia. Proportio enim 24. ad 18. componitur, vt dictum eſt, ex proportionibus 24. ad 9. & 9. ad 18. hoc eſt, ex proportionibus 8. ad 3. & 1. ad 2. quas inter latera eſſe diximus.

PORRO quemadmodum interpretes nonnulli Euclidis volebant in defin. 10. lib. 5. duplicatam proportionem, & triplicatam, &c. verè eſſe maiorem illa, cuius duplicata, vel triplicata dicitur, nimirum duplam, vel triplam, &c. ac propterea eam definitionem eſſe intelligendam de magnitudinibus continuè proportionalibus in proportione maioris inæqualitatis; quod tamen falſum eſſe ibi indicauimus: ita iidem volunt etiam in hac compoſitione proportionum, extremorum proportionem, quæ ex proportionibus intermediis componi dicitur, verè eſſe maiorem qualibet intermediarum componentium, vtpotè conflatam ex additione omnium intermediarum proportionum inter ſe, ac proinde omnes intermedias proportiones debere eſſe minores extremorum pro-

runt proportione. Verum hoc falſum eſt, & Euclidi omnino repugnans, vt ex proximo exemplo, quod ex propoſ. 23. huius lib. protulimus, perſpicuum eſt. Nam propoſitis tribus hiſce numeris, 24. 9. 18. qui habent eaſdem proportiones ordine inter ſe, quas latera vnius parallelogrammi ad latera alterius parallelogrammi habent; erit proportio parallelogrammi ad parallelogrammum eadem, quæ 24. ad 18. numerorum ex laterum proportionibus compoſita, vt Euclides demonſtrat. Quis autem non videt, proportionem 24. ad 18. quæ ſeſquitertia eſt, multo minorem eſſe proportione 24. ad 9. quæ dupla eſt ſuperbipartiens tertias? Sed de hac re plura ſcribemus ad finem lib. 9.

HÆC cum ita ſint, ſi quis velit habere quotlibet proportiones datam proportionem componentes, id eſt, quarum denominatores inter ſe multiplicati gignant datæ proportionis denominatorem, ſtatuendi erunt inter duos numeros datæ proportionis quoſcunque, tot numeri medij quicunque, quot proportiones componentes deſiderantur, minus vno. Vt ſi quis velit tres proportiones, ex quibus centupla proportio componatur, ſatisfiet quæſtioni, ſi inter 100. & 1. *duos numeros ponamus medios, hoc modo,* 100. 50. 10. 1. *Nam extremorum proportio* 100. *ad* 1. *componitur ex intermediis tribus, hoc eſt, ex dupla, quintupla, & decupla. Ita quoque ſi alios numeros ſtatuas medios hoc modo,* 100. 10. 3. 1. *componetur eadem proportio* 100. *ad* 1. *ex decupla, tripla ſeſquitertia, & tripla. Sic etiam vides hic,* 2. 3. 1. 10. 1, *duplam proportionem compoſitam eſſe ex quatuor, nimirum ex ſubſeſquialtera, tripla, ſubdecupla, & decupla. Quod ſi quis petat quotuis proportiones datam proportionem componentes, quæ etiam omnes datæ ſint præter vnam, continuabimus ab vno extremo datæ proportionis omnes datas proportiones componentes ordine. Ha enim cum proportione, quam vltimus medius ad alterum extremum datæ proportionis habet, component datam proportionem. Vt ſi quis dicat, da mihi quinque proportiones, quarum quatuor ſint, dupla, tripla, ſeſquialtera, & quintupla ſeſquitertia, componentes proportionem ſeſquialteram inter* 9. & 6. *ſtatuemus hos quatuor numeros medios,* 9. $4\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2}$. $1\frac{7}{16}$. 6. *ita vt* 9. *ad* $4\frac{1}{2}$. *habeant proportionem duplam, &* $4\frac{1}{2}$. *ad* $1\frac{1}{2}$. *triplam, &* $1\frac{1}{2}$. *ad* 1. *ſeſquialteram: &* 1. *ad* $\frac{3}{16}$. *quintuplam ſeſquitertiam. Ex his etenim quatuor, vna cum proportione* $\frac{3}{16}$. *ad* 6. *quæ eadem eſt, quæ* 1. *ad* 32. *componitur proportio ſeſquialtera* 9. *ad* 6. *Idem eueniet, ſi datæ quatuor proportiones continuentur à minori extremo* 6. *hoc modo,* 6. 12. 36. 54. 288. 9. *ita vt* 12. *ad* 6. *habeant proportionem duplam; &* 36. *ad* 12. *triplam; &* 54. *ad* 36. *ſeſquialteram; &* 288. *ad* 54. *quintuplam ſeſquitertiam. Nam quinta proportio* 9. *ad* 288. *eadem eſt, quæ prius* $\frac{3}{16}$. *ad* 6. *qualis eſt* 1. *ad* 32.

EX his nullo negotio ſatisfaciemus quæſtioni, quâ quiſpiam poſtulat ſibi dari quotuis numeros, qui inter ſe multiplicati procreent datum quemcunque numerum. Si namque ſumantur duo numeri habentes

bentes proportionem à dato numero denominatam, & inter eos ſtatuantur tot numeri quicunque minus vno, quot numeri deſiderantur, erunt denominatores proportionum intermediarum, quæ quæruntur. Nam ij inter ſe multiplicati producunt denominatorem proportionis extremorum, vt demonſtratum eſt, hoc eſt, numerum datum. Veluti ſi quis petat tres numeros, ex quorum mutua multiplicatione gignantur 100. *ſtatuemus inter duos numeros* 500. 5. *centuplam proportionem habentes, duos medios numeros quoſcunque, hoc modo* 500. 250. 50. 5. *eruntque tres quæſiti numeri,* 2. 5. 10. *nimirum denominatores proportionum* 500. *ad* 250. & 250. *ad* 50. & 50. *ad* 5. *Nam ex* 2. *in* 5. *fiunt* 10. & *ex* 10. *in* 10. *fiunt* 100. *Quòd ſi quis poſtulet vnum numerum, qui vna cum quotlibet aliis datis, ſi inter ſe multiplicentur, producat datum quemcunque numerum: Sumendi erunt rurſus duo numeri proportionem habentes à dato numero, qui produci debet, denominatam, & ab alterutro eorum continuanda proportiones à datis aliis numeris denominata. Denominator enim proportionis inter alterum numerum, & vltimum continuatorum erit numerus, quem quærimus. Vt ſi dentur hi quatuor numeri,* 2. 3. $1\frac{1}{2}$. $5\frac{1}{3}$. *quæraturque quintus alius, qui in numerum ex illorum mutua multiplicatione productum ductus gignat datum hunc numerum* $1\frac{1}{2}$ *accipiemus duos numeros* 9. & 6. *proportionem ſeſquialteram habentes à dato numero* $1\frac{1}{2}$. *denominatam; & à* 9. *continuabimus quatuor proportiones à* 2. 3. $1\frac{1}{2}$. $5\frac{1}{3}$. *denominatas, hoc modo,* 9. $4\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2}$. 1. $\frac{3}{16}$. 6. *Quintus enim numerus quæſitus erit denominator proportionis* $\frac{3}{16}$ *ad* 6. *nimirum* $\frac{1}{32}$. *Nam quinque hi numeri* 2. 3. $1\frac{1}{2}$. $5\frac{1}{3}$. $\frac{1}{32}$. *quorum priores quatuor dati ſunt, quintus autem inuentus, inter ſe multiplicati procreant datum numerum* $1\frac{1}{2}$. *Idem quintus numerus* $\frac{1}{32}$. *inuenietur, ſi quatuor proportiones à datis numeris denominata continuentur à numero* 6. *hoc modo,* 6. 12. 36. 54. 288. 9. *Denominator enim proportionis* 9. *ad* 288. *eſt* $\frac{1}{32}$. *vt prius. Sic etiam ſi quærendi ſint quatuor numeri, qui inter ſe multiplicati procreent* 1. *ſtatuemus inter quoſuis duos numeros æquales proportionem æqualitatis ab* 1. *denominatam habentes, tres medios numeros quoslibet, vt hic vides,* 4. 2. 1. 3. 4. *Nam denominatores proportionum* 4. *ad* 2. & 2. *ad* 1. & 1. *ad* 3. & 3. *ad* 4. *nimirum,* 2. $2\frac{1}{3}$. $\frac{3}{4}$. *ſunt quatuor numeri, qui quæruntur, quippe cum inter ſe multiplicati gignant* 1.

FACILIVS huiuſmodi quæſtiones ſoluuntur, ſi tot numeri quicunque, minus vno, quot petuntur, inter ſe multiplicentur. & per vltimum numerum productum, diuidatur datus numerus, qui gigni debet. Quotiens enim & aſſumpti numeri, qui multiplicati inter ſe ſunt, erunt quos quærimus. Vt in proxima quæſtione, ſi hi tres numeri, verbi gratia, 4. 5. 6. *inter ſe multiplicentur, & per numerum productum* 120. *diuidatur* 1. *qui produci debet, fiet Quotiens* $\frac{1}{120}$. *Quatuor ergo*

Digitized by Google

tuur ergo numeri quæſiti ſunt 4. 5. 6. $\frac{1}{120}$. *Nam ex 4. in 5. fiunt 20. & ex 20 in 6. fiunt 120. & ex 120. in* $\frac{1}{120}$. *fit 1.*

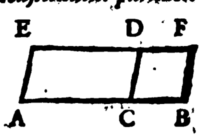
POSTREMO neq; hoc prætermittendum eſt, videlicet: Quemadmodum, ordine poſitis quotcunque numeris, denominator proportionis extremorum producitur ex omnibus denominatoribus intermediarum proportionum, vt demonſtrauimus; ita poſitis quotcunq; numeris ordine, ita tamen, vt quilibet inſequens ſit ſuo antecedente maior, differentia extremorum coaceruatur ex omnibus differentiis intermediorum numerorum. Vt hic 3. 7. 12. 20. 30. 100. 713. differentia inter 3. & 713. eſt 710. At differentia inter 3. & 7. eſt 4. Inter 7. & 12. eſt 5. Inter 12. & 20. eſt 8. Inter 20. & 30. eſt 10. Inter 30. & 100. eſt 70. Inter 100. denique & 713. eſt 613. quæ omnes differentiæ 4. 5. 8. 10. 70. 613. conficiunt 710. differentiam extremorum.

ATQVE hæc dicta ſint de quinque definitionibus ab Euclide hoc 6. lib. poſitis, quibus addendam eſſe cenſemus ſequentem ſextam, quæ multum conducet, vt facilius intelligantur 27. 28. 29. & 30. propoſitiones huius libri, & quam plurima alia decimi libri. Ea autem eſt eiuſmodi.

VI.

PARALLELOGRAMMVM ſecundum aliquam rectam lineam applicatum, deficere dicitur parallelogrammo, quando non occupat totam lineam. Excedere vero, quando occupat maiorem lineam, quam ſit ea, ſecundum quam applicatur: ita tamen, vt parallelogrammum deficiens, aut excedens eandem habeat altitudinem cum parallelogrammo applicato, conſtituatque cum eo totum vnum parallelogrammum.

SIT data recta linea A B, ſupra quam conſtituatur parallelogrammum A C D E, quod non occupet totam lineam A B, ſed deſit C B; & ducta B F, parallela ipſi C D, donec cum E D, protracta conueniat in F, compleatur totum parallelogrammum A B F E. Parallelogrammum igitur A D, applicatum ſecundum rectam A B, deficere dicitur parallelogrammo D B, ita vt D B, appelletur defectus.



RVRSVS ſit data recta linea A C, ſupra quam conſtituatur parallelogrammum A B F E, quod habeat latus A B, maius recta data A C; & ducatur C D, ipſi B F, parallela. Parallelogrammum igitur A F, applicatum ſecundum rectam A C, excedere dicitur parallelogrammo D B, ita vt D B, vocetur exceſſus.

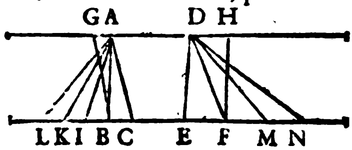
HIC autem defectus D B, vel exceſſus, in rectangulis quidem eſſe poteſt

poteſt vel quadratum, vel altera parte longior figura: In non rectangulis autem vel Rhombus, vel Rhomboides, vt perſpicuum eſt.

1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

TRIANGVLA & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita ſe habent inter ſe, vt baſes.

SINT duo triangula ABC, DEF, eandem habentia altitudinem, quorum baſes BC, EF. Item duo parallelogramma CG, EH, eiuſdem altitudinis, quorum eædem baſes BC, EF. Dico ita



eſſe triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH, vt eſt baſis BC, ad baſin EF. Hoc eſt, ſi baſis BC, ſtatuatur prima magnitudo, & baſis EF, ſecunda: At triangulum ABC, vel parallelogrammum CG, tertia, & triangulum DEF, vel parallelogrammum EH, quarta, æque multiplicia primæ ac tertiæ ab æque multiplicibus ſecundæ & quartæ vel vna deficere, vel vna æqualia eſſe, vel vna excedere, vt definitio 6. lib. 5. exigit. Collocentur enim tam triangula, quam parallelogramma inter eaſdem parallelas GH, LN. (Nam vt in defin. 4. dictum eſt, triangula & parallelogramma tum demum eandem habebunt altitudinem, cum inter eaſdem fuerint conſtituta parallelas: ſic enim perpendiculares à verticib. ad baſes demiſſæ æquales erunt,) & ex BL, ſumantur quotcunq; rectæ BI, IK, KL, ipſi BC, æquales; Item ex FN, abſcindantur quotcunque rectæ FM, MN, æquales rectæ EF. Deinde ex A, & D, deducantur rectæ AI, AK, AL; DM, DN. *a* Erunt igitur triangula ABC, AIB, AKI, ALK, ſuper æquales baſes, & inter eaſdem parallelas conſtituta, inter ſe æqualia. Eadem ratione æqualia erunt triangula DEF, DFM, DMN. Quam multiplex eſt ergo recta CL, rectæ BC, tam multiplex quoque erit triangulum ACL, trianguli ABC; & quam multiplex eſt recta EN, rectæ EF, tam quoque multiplex erit triangulum DEN, trianguli DEF, quia in tot triangula æqualia ſunt diuiſa tota triangula ACL, DEN, in quot rectas æquales ſectæ fuerunt totæ rectæ CL, EN. Quoniam vero ſi baſis CL, æqualis fuerit baſi EN, *b* neceſſario triangulum ACL, æquale eſt triangulo DEN, ac proinde ſi CL, maior fuerit quam EN, neceſſario ACL, maius eſt quam DEN, & ſi minor, minus; deficient propterea vna CL, recta, & triangulum ACL, æque multiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ ABC, ab EN, recta, triangulo DEN, æque multiplicibus ſecundæ EF, & quartæ

a 38. *primi.*

b 38. *primi.*

DEF,

DEF, vel vna æqualia erunt, vel vna excedent, ſi ea ſumantur, quæ interſe reſpondent. a Quare quæ proportio eſt primæ BC, ad ſecundam EF, baſis ad baſim, ea eſt tertiæ ABC, ad quartam DEF, trianguli ad triangulum. Sicut igitur baſis ad baſin, ita eſt triangulum ad triangulum. quod eſt propoſitum. a 6. def. quinti.

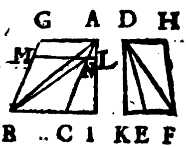
QVONIAM autem b vt triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita eſt parallelogrammum CG, (c quod duplum eſt trianguli ABC) ad parallelogrammum EH; (d quod eſt duplum trianguli DEF) perſpicuum eſt, e ita quoque eſſe parallelogrammum ad parallelogrammum, vt eſt baſis ad baſin. Quod tamen eodem argumento confirmari poteſt, quo vſi ſumus in triangulis, ſi prius ex punctis I, K, L, educantur rectæ parallelæ ipſi BG; nec non ex punctis M, N, parallelæ ipſi FH, &c. Triangula igitur & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo; ita ſe habent inter ſe, vt baſes. Quod erat demonſtrandum. b 15. quinti. c 34. primi. d 34. primi. e 11. quinti.

SCHOLIVM.

SED & converſum huius demonſtrabimus. Videlicet.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita ſe habent inter ſe, vt baſes, æquales habent altitudines, vel eandem.

SIT triangulum ABC, ad triangulum DEF; & parallelogrammum AGBC, ad parallelogrammum DEFH, vt baſis BC, ad baſin EF. Dico eorum altitudines, nimirum perpendiculares AI, DK, eſſe æquales. Si enim non ſunt æquales, ſit AI, ſi fieri poteſt, maior, quam DK. Abſciſſa igitur IL, ipſi DK, æquali, ductaque LM, ipſi BC, parallela, quæ latus AC, ſecet in N, coniunctaque recta BN; f erit NBC, triangulum ad triangulum DEF, vt baſis BC, ad baſin EF; cum altitudines LI, DK, ponantur æquales: Sed fuit etiam ABC, ad DEF, f 1. ſexti.



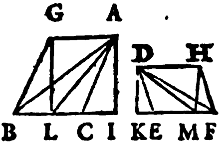
vt BC, ad EF. g Igitur triangula NBC, ABC, ad triangulum DEF, eandem habent proportionem; h Ac proinde æqualia erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Non ergo inæquales ſunt altitudines AI, DK, ſed æquales. Eadem eſt ratio in parallelogrammis. Simili enim argumento oſtendemus parallelogramma NMBC, AGBC, æqualia eſſe, ſi altitudines AI, DK, inæquales dicantur, & LI, DK, æquales. g 11. quinti. h 9. quinti.

ADDIT hoc loco Federicus Commandinus aliud theorema, quod nos breuius demonſtrabimus. Videlicet.

TRIAN-

TRIANGVLA, & parallelogramma, quorum æquales ſunt baſes, vel eadem, ita ſe habent inter ſe, vt altitudines.

SINT duo triangula ABC, DEF; & parallelogramma AGBC, DEFH, habentia baſes æquales BC, EF. Dico eſſe triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum AGBC, ad parallelogrammum DEFH, vt altitudo AI, eſt ad altitudinem DK. Si enim ſumantur rectæ IL, KM, baſibus BC, EF, æquales, du-



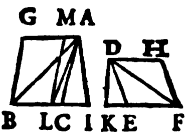
a 38. primi. *canturque rectæ LA, MD;* a *erit triangulum ALI, triangulo ABC, æquale, cum ſint ſuper baſes æquales*
b 7. quinti. *LI, BC, & inter eaſdem parallelas AG, IB. Eodem modo æquale erit triangulum DKM, triangulo DEF.* b *Quare erit, vt ABC, ad*
c 1. ſext. *DEF, ita ALI, ad DKM.* c *Eſt autem, vt ALI, ad DKM, ita AI, ad DK (Nam ſi baſes ponantur AI, DK, erunt rectæ æquales LI, KM, altitudines.) Igitur & ABC, ad DEF, erit, vt AI, ad DK. Quod eſt propoſitum.*

d 15. quinti. *QVONIAM verò eſt,* d *vt ABC, ad DEF, ita parallelogrammum AGBC,* e *quod trianguli ABC, duplum eſt, ad paralle-*
e 34. primi. *logrammum DEFH,* f *quod trianguli DEF, eſt duplum.* g *Erit quo-*
f 34. pri. *que AGBC, ad DEFH, vt AI, ad DK. Quod tamen eodem modo confirmari poteſt, ſi rectæ ducantur LG, MH. Idem ſequetur, ſi*
g 11. quinti. *triangula, & parallelogramma eandem habuerint baſim.*

HOC verò conuertemus etiam, ad hunc modum.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita ſe habent inter ſe, vt altitudines, æquales habent baſes, ſi vnam & eandem non habeant.

SIT triangulum ABC, ad triangulum DEF; & parallelogrammum AGBC, ad parallelogrammum DEFH, vt altitudo AI, ad altitudinem DK. Dico eorum baſes BC, EF, æquales eſſe. Si enim non ſunt æquales, ſit BC, ſi fieri poteſt, maior, quam EF. Abſciſſa igitur BL, ipſi EF, æquali, ductaque recta LA; erit, vt proxime demonſtrauimus, ABL, ad DEF, vt AI, ad DK: Sed vt AI, ad DK, ita ponitur eſſe ABC,



h 11. quinti. *ad DEF.* h *Igitur ABL, ABC, ad DEF, eandem habent proportionem;* i *Ac proinde inter ſe æquales ſunt pars*
i 9. quinti. *& totum. Quod eſt abſurdum. Non ergo inæquales ſunt baſes BC, EF, ſed æquales. Eademque eſt ratio de parallelogrammis. Simili enim argumento ducta LM, ipſi GB, parallela, oſtendemus, parallelogram-*

Digitized by Google

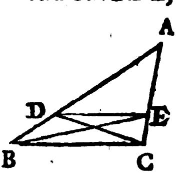
logramma M G B L, A G B C, æqualia eſſe, ſi baſes B C, E F, dicantur inæquales, & B L, E F, æquales.

IN omnibus autem his non variabitur demonſtratio, etiamſi triangula, & parallelogramma ſint rectangula, ita vt altitudines ſint ipſorum latera, vel vnum fuerit rectangulum, alterum vero non. Nos aſſumpſimus caſum difficiliorem, quando ſcilicet neutrum eſt rectangulum. Ita enim demonſtratio maiore indiget nonnunquam conſtructione.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter ſecabit ipſius trianguli latera. Et ſi trianguli latera proportionaliter ſecta fuerint, quæ ad ſectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipſius trianguli latus parallela.

IN triangulo A B C, ducatur primum recta D E, parallela lateri B C. Dico latera A B, A C, ſecta eſſe proportionaliter in D, & E, hoc eſt, eſſe vt A D, ad D B, ita A E, ad E C. Ductis enim rectis C D, B E, *a* erunt triangula D E B, D E C, ſuper eandem baſin D E, (a 37. primi.) & inter eaſdem parallelas D E, B C, conſtituta, inter ſe æqualia. *b* Quare vt triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita eſt triangulum idem A D E, ad triangulum D E C: (b 7. quinti.) *c* Atqui vt triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita eſt baſis A D, ad baſin D B; (cum hæc triangula ſint eiuſdem altitudinis, vt (c 1. ſext.)



conſtat, ſi per E, agatur parallela recta ipſi A B) & eadem ratione, vt triangulum A D E, ad triangulum D E C, ita eſt baſis A E, ad baſin E C. *d* Vt igitur A D, ad D B, ita eſt A E, ad E C, (cum hæ duæ proportiones eædem ſint proportioni trianguli A D E, ad triangulum D E B, & eiuſdem trianguli A D E, ad triangulum D E C) quod eſt propoſitum. (d 11. quinti.)

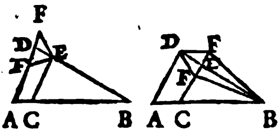
SECET deinde recta D E, latera A B, A C, proportionaliter. Dico D E, parallelam eſſe reliquo lateri B C. Ductis enim rurſum rectis C D, B E, *e* erit vt baſis A D, ad baſin D B, ita triangulum A D E, ad triangulum D E B, cum ſint eiuſdem altitudinis: (e 1. ſext. f 11. quinti.) Ponitur autem vt A D, ad D B, ita A E, ad E C. *f* Igitur erit vt triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita A E, ad E C: Sed (g 1. ſex.) rurſus *g* vt baſis A E, ad baſin E C, ita eſt triangulum A D E, ad triangulum D E C, cum ſint altitudinis eiuſdem. *h* Igitur vt triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita eſt triangulum idem A D E, ad triangulum D E C. *i* Æqualia ergo ſunt triangula D E B, & D E C: Ac propterea, cum eandem habeant baſin D E, *k* inter (h 11. quinti. i 9. quinti. k 39. primi.)

SCHOLIVM.

NON alienum à noſtro inſtituto eſſe puto, ſi hic demonſtremus duo theoremata, quorum primum Federicus Commandinus demonſtrat in libello Archimedis de iis, quæ vehuntur in aqua; Secundum verò in commentariis in Apollonij Conica. Horum primum eſt.

SI ex duobus punctis cuiuſuis rectæ, quorum alterum ſit extremum, alterum vero intra lineam, duæ parallelæ inter ſe ad eaſdem partes educantur, ita proportionem habeant eandem, quam rectæ inter ipſas, & alterum extremum punctum incluſæ: Recta coniungens extremũ vnius earum cum extremo prioris lineæ tranſibit per extremum alterius lineæ.

SIT recta A B, & ex punctis A, & C, educantur duæ parallelæ A D, C E, proportionem habentes, quam A B, B C, ita vt ſit A D, ad C E, ſicut A B, ad B C, vel C E, ad A D, vt B C, ad A B. Dico rectam, quæ coniungit extrema B, & E, tranſire per punctum D. Item rectam, quæ coniungit extrema B, & D, tranſire per punctum E. Si

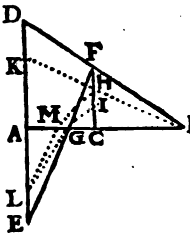


enim recta B E, non tranſit per D, coëat cum A D, in F, puncto, quod ſit vel ſupra D, vel infra, vt in prima figura. Quoniam igitur per coroll. huius propoſ. triangula B A F,
a 4. ſex. *B C E, ſimilia ſunt;* a *erit, vt A B,*
b 16. quinti. *ad A F, ita B C, ad C E: Et permutando,* b *vt A B, ad B C, ita A F, ad C E: Vt autem A B, ad B C, ita erat quoque A D, ad C E.*
c 11. quinti. c *Igitur erit, vt A F, ad C E, ita A D, ad C E;* d *Ac propterea æquales erunt rectæ A F, A D, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Tranſit*
d 9. quinti. *ergo recta B E, per punctum D. Quod eſt primum.*

RVRSVS ſi recta B D, non tranſit per E, tranſeat per F, punctum, quod ſit vel ſupra E, vel infra, vt in ſecunda figura. Quoniam ergo per coroll. huius propoſ. triangula B A D, B C F, ſimilia ſunt;
e 4. ſex. e *erit, vt A B, ad A D, ita B C, ad C F:* f *& permutando, vt A B, ad*
f 16. quinti. *B C, ita A D, ad C F: Vt autem A B, ad B C, ita quoque erat A D, ad C E.* g *Igitur erit, vt A D, ad C F, ita A D, ad C E:* h *Ac proinde*
g 11. quinti. *æquales erunt rectæ C F, C E, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Tranſit ergo recta B D, per E. Quod eſt ſecundum.*
h 9. quinti.

HOC etiam verum eſt, quando duæ parallelæ in diuerſas partes ducuntur, habentes eandem proportionem, quam ſegmenta rectæ inter parallelas conterminas, & punctum idem intra datum rectam. Vt in figura problematis 7. ſcholij propoſ. 17. ſi fuerint parallelæ A E, F G, in diuerſas partes ductæ, fuerintque vt A E, ad C F, ita A G, ad C G, tranſibit

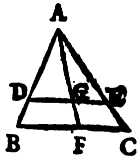
Digitized by Google



tranſibit recta E F, per G, hoc eſt, duæ recta E G, F G, vnam rectam conſtituent. Cum enim ſit, vt A E, ad C F, ita A G, ad C G; erit permutando quoque, vt A E, ad A C, ita C F, ad C G. Cum ergo anguli alterius A, C, æquales ſint; a *erunt quoque* a 6. ſex. *anguli A G E, C G F, æquales. Cum ergo A C, ſit linea recta, conſtituent E G, F G, lineam quoque rectam ex iis, quæ ex Proclo ad propoſ. 15. lib. 1. demonſtrauimus.*

ALTERVM verò eſt.

SI in triangulo quouis vni lateri parallela recta agatur; & ex quocunque puncto illius lateris ad angulum oppoſitum recta educatur linea: diuidentur linea parallela, & latus illud, in eaſdem rationes.

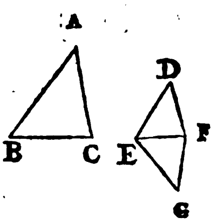


IN triangulo A B C, ducta ſit D E, lateri B C, parallela, & ex puncto F, quocunque ad angulum A, recta extendatur F A, ſecans D E, in G. Dico eſſe, vt B F, ad F C, ita D G, ad G E. Quoniam enim triangula A F B, A G D, ex coroll. huius propoſ. ſimilia ſunt; b *erit vt A F, ad B F, ita A G, ad* b 4. ſex.
D G, c *& permutando, vt A F, ad A G, ita B F, ad* c 16.
D G. Atque eodem argumento concludemus eſſe, vt A F, ad A G, ita quinti.
F C, ad G E. d *Igitur erit, vt B F, ad D G, ita F C, ad G E, & permu-* d 11.
tando, vt B F, ad F C, ita D G, ad G E. Quod eſt propoſitum. quinti.

ALITER. Quoniam triangula A B F, A D G, ſimilia ſunt, nec non triangula A F C, A G E, per coroll. huius propoſ. e *erit, vt B F, ad* e 4. ſex.
F A, ita D G, ad G A: Item vt F A, ad F C, ita G A, ad G E. f *Ex æquo* f 22.
igitur, vt B F, ad F C, ita erit D G, ad G E. Quod erat demonſtrandum. quinti.

THEOR. 5. PROPOS. 5. v.

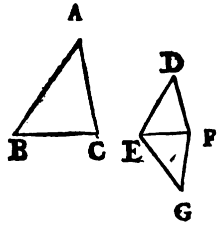
SI duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, ſub quibus & homologa latera ſubtenduntur.



HABEANT triangula ABC, DEF, latera proportionalia, ſitq; A B, ad B C, vt D E, ad E F, & B C, ad C A, vt E F, ad F D, & A B, denique ad A C, vt D E, ad D F. Dico triangula eſſe æquiangula, angulum ſcilicet A, æqualem eſſe angulo D, & angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F. Sic enim anguli æqua-

 les re-

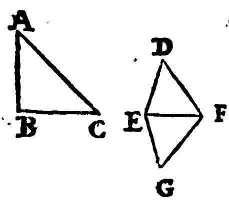
Digitized by Google



les reſpiciunt homologa latera. Fiat angulus F E G, æqualis angulo B; & angulus E F G, angulo C, conueniantque
a 32. primi. rectæ E G, F G, in G: a eritque reliquus angulus G, reliquo angulo A, æqualis. Æquiangula igitur ſunt triāgula A B C,
b 4. ſex. G E F. Quare b vt A B, ad B C, ita eſt G E, ad E F: Vt autem A B, ad B C, ita
c 11. ponitur D E, ad E F. c Igitur vt G E, ad
quinti. E F, ita eſt D E, ad E F, eandem, d proptereaque æquales erunt G E,
d 9. D E. Rurſus, e quoniam vt B C, ad C A, ita eſt E F, ad F G: Vt au-
quinti. tem B C, ad C A, ita ponitur E F, ad F D; f erit vt E F, ad F G, ita
e 4. ſex. eadem E F, ad F D; g ideoque æquales erunt F G, F D. Itaq; cum
f 11. latera E G, F G, æqualia ſint lateribus D E, D F, vtrumque vtri-
quinti. que; & baſis communis E F; h erunt anguli G, & D, æquales; i ac
g 9. propterea & reliqui anguli G E F, G F E, reliquis angulis D E F,
quinti. D F E, æquales erunt. Quamobrem cum angulus G, æqualis ſit
h 8. pri. angulo A; erit & angulus D, eidem angulo A, æqualis, eodemque
i 4. pri. modo angulus D E F, angulo B, & angulus D F E, angulo C, æqualis erit. quod eſt propoſitum. Si duo igitur triangula latera proportionalia habeant, &c. Quod oſtendendum erat.

vj. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, æqualesque habebunt angulos, ſub quibus homologa latera ſubtenduntur.



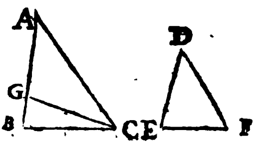
SIT angulus B, trianguli A B C, æqualis angulo E, trianguli D E F, ſintque latera A B, B C, proportionalia lateribus D E, E F, hoc eſt, ſit A B, ad B C, vt D E, ad E F. Dico reliquos angulos reliquis angulis æquales eſſe, angulum ſcilicet A, angulo D, & angulum C, angulo F; Ita enim æquales anguli homologa latera reſpiciunt. Fiat angulo B, æqualis angulus F E G; & angulo C, angulus E F G; eritque, vt in præcedenti propoſ. dictum eſt,
k 4. ſex. triangulum G E F, triangulo A B C, æquiangulum. Quare k vt
l 11. A B, ad B C, ita eſt G E, ad E F: Sed vt A B, ad B C, ita ponitur D E,
quinti. ad E F. l Igitur vt D E, ad E F, ita eſt G E, ad eandem E F; m atque
m 9. idcirco D E, G E, æquales erunt. Itaque cum latera D E, E F, æqua-
quinti. lia ſint lateribus G E, E F, & anguli ipſis contenti æquales quoque;

(nam

(nam angulo B, cui factus eſt æqualis angulus F E G, æqualis eſt
poſitus angulus D E F, proptereaque æquales ad inuicem erunt
anguli D E F, G E F) a erunt reliqui anguli D, E F D, reliquis an- a 4. pri.
gulis G, E F G, æquales. Cum ergo angulus G, ſit æqualis angulo
A, & angulus E F G, angulo C; erunt etiam angulis A, C, æquales
anguli D, E F D. & ob id æquiangula erunt triangula A B C, D E F,
quod eſt propoſitum. Si igitur duo triangula vnum angulum vni
angulo æqualem, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum verò ſimul vtrumque aut minorem, aut non minorem recto: Æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia ſunt latera.



SIT angulus A, trianguli A B C, æqualis angulo D, trianguli D E F, & latera A C, C B, circa angulum A C B, proportionalia lateribus D F, F E, circa angulum F, hoc eſt, ſit vt A C, ad C B; ita D F, ad F E, hac tamen lege, vt quilibet
reliquorum angulorum B, & E, ſit vel minor recto, vel non mi-
nor. Dico æquiangula eſſe triangula, angulos ſcilicet A C B, & F,
circa quos ſunt latera proportionalia, & angulos B, & E, æquales
eſſe. Sit enim primum tam B, quam E, recto minor: Quo poſito,
ſi anguli A C B, & F, non ſunt æquales, ſit A C B, maior, quam F:
fiatque ipſi F, æqualis A C G. Cum igitur, & angulus A, angulo
D, ponatur æqualis, a erit & reliquus A G C, reliquo E, æqualis; a 32. pri
ideoque triangula A G C, D E F, æquiangula erunt. Quare b vt mi.
A C, ad C G, ita erit D F, ad F E: Sed vt D F, ad F E, ita ponitur b 4. ſex.
A C, ad C B. c Vt igitur A C, ad C G, ita erit eadem A C, ad C B, c 11.
d ac propterea æquales erunt C G, C B, e & anguli C B G, C G B, quinti.
æquales. Cum igitur angulus B, ponatur recto minor, erit & d 9.
C G B, minor recto, ideoq; ei deinceps A G C, recto maior; f cum quinti.
A G C, C G B, ſint duobus rectis æquales: Eſt autem oſtenſus an- e 5. pri.
gulus A G C, angulo E, æqualis. Maior igitur recto eſt quoque an- f 13. pri.
gulus E: Sed poſitus eſt etiam recto minor. Quod eſt abſurdum.

SIT deinde tam B, angulus, quam E, recto non minor; eritq;
vt prius, angulus B, angulo C G B, æqualis, ideoque & C G B, re-
cto non minor erit; ac propterea anguli C B G, C G B, in triangu-
lo B C G, non minores erunt duobus rectis, ſed vel maiores, vel

Digitized by Google

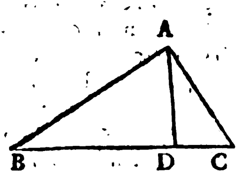
a 17. primi. æquales duobus rectis. quod eſt abſurdum. *a* Sunt enim duobus rectis minores. Non ergo inæquales ſunt anguli A C B, & F, ſed
b 32. primi. æquales, atq; *b* idcirco reliqui etiam anguli B, & E, æquales erunt. quod eſt propoſitum. Si duo itaque triangula vnum angulum vni angulo æqualem, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

ADDIDIT Euclides, vtrumque angulum reliquorum B, & E, debere eſſe vel minorem recto, vel non minorem. Nam alias, manente tota hypotheſi, non ſequeretur, triangula eſſe æquiangula. Si enim in eodem triangulo A B C, ſit C G, æqualis ipſi C B, (quod fieri poteſt,
c 19. primi. *quando angulus B, acutus eſt, & maior angulo A. Sic enim c erit latus C A, latere C B, maius. Si igitur ex C, ad interuallum C B, circulus deſcribatur, ſecabit is rectam A B, priuſquam rectam A C, quæ longior eſt, quam C B, ſecet. Secabit autem ille circulus neceſſario rectam A B, propterea quod ob acutum angulum B, recta A B, intra eum circulum cadit: quippe cum infra contingentem lineam ducatur, quæ ad B, angulum rectum conſtituit cum C B, vt patet ex propoſ. 16. lib. 3.) habebunt duo triangula A B C, A G C, vnum angulum vni angulo æqualem, imò angulum A, communem; & circum alios an-*
d 7. quinti. *gulos A C B, A C G, latera proportionalia, hoc eſt, d vt A C, ad C B, ita erit eadem A C, ad C G, cum æquales ponantur rectæ C B, C G, & tamen non ſunt vllo modo æquiangula triangula A B C, A G C, vt*
e 5. pri. *conſtat. Quod ideo euenit, quia non vterq; angulorum A B C, A G C,*
f 17. vel 32. pri. *vel minor eſt recto, vel non minor. Imò A B C, eſt quidem recto minor, A G C, verò recto maior. Cum enim C G, C B, latera æqualia ſint,*
g 13. primi. *e & ideo anguli C B G, C G B, æquales; f erit vterque eorum recto minor, g ac propterea A G C, recto maior.*

viij. THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI in triangulo rectangulo, ab angulo recto in baſin perpendicularis ducta ſit: quæ ad perpendicularem triangula, tum toti triangulo, tum ipſa inter ſe ſimilia ſunt.



IN triangulo A B C, angulus B A C, ſit rectus, à quo ad baſin perpendicularis agatur A D. Dico triangula A D B, A D C, ſimilia eſſe & toti triangulo A B C, & inter ſe. Cum enim in triangulis A B C, D B A, anguli B A C, &
h 32. primi. A D B, ſint recti, & angulus B, communis; *h* erunt & reliqui anguli A C B, & D A B, æquales. Æquian-
i 4. ſex. gulum eſt igitur triangulum D B A, triangulo ABC, *i* ac propterea habe-

habebunt latera circa æquales angulos proportionalia, &c. hoc eſt, erit vt C B, ad B A, ita B A, ad B D; & vt B A, ad A C, ita B D, ad D A; & vt B C, ad C A; ita B A, ad A D. Ita enim latera homologa æqualibus angulis opponuntur, vt vult propoſ. 4. huius lib. Quare ſimile eſt triangulum A D B, toti triangulo A B C. Eodem modo oſtendetur triangulum A D C, ſimile eidem triangulo A B C. Nam anguli B A C, & A D C, ſunt recti, & angulus C, communis
a ac propterea reliqui anguli A B C, & C A D, æquales. Quare b vt B C, ad C A, ita eſt C A, ad C D; & vt C A, ad A B, ita C D, ad D A; & vt C B, ad B A, ita C A, ad A D. Sic enim opponuntur quoque homologa latera angulis æqualibus, ex præſcripto propoſ. 4. huius lib. Non ſecus demonſtrabitur, ſimilia inter ſe eſſe triangula A D B, & A D C, cùm anguli A D B, A D C, ſint recti, & anguli A B D, C A D, oſtenſi æquales, nec non anguli B A D, A C D; Atq; idcirco ſit c vt B D, ad D A, ita D A, ad D C; & vt D A, ad A B, ita D C, ad C A; & vt A B, ad B D, ita C A, ad A D. Si igitur in triangulo rectangulo, ab angulo recto in baſin perpendicularis ducta ſit, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 32. primi.
b 4. ſexti.
c 4. ſexti.

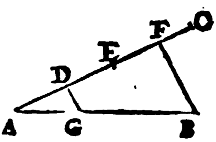
COROLLARIVM.

EX hoc manifeſtum eſt, perpendicularem, quæ in rectangulo triangulo ab angulo recto in baſin demittitur, eſſe mediam proportionalem inter duo baſis ſegmenta: Item vtrumlibet laterum angulum rectum ambientium, medium proportionale inter totam baſin, & illud ſegmentum baſis, quod ei lateri adiacet.

OSTENSVM eſt enim, eſſe vt B D, ad D A, ita D A, ad D C; ac propterea D A, eſſe mediam proportionalem inter B D, & D C; Item eſſe vt C B, ad B A, ita B A, ad B D: & idcirco B A, mediam eſſe proportionalem inter C B, & B D: Denique eſſe vt B C, ad C A, ita C A, ad C D; ideoque C A, eſſe proportionalem mediam inter B C, & C D. Quod eſt propoſitum.

PROBL. 1. PROPOS. 9. ix

A DATA recta linea imperatam partem auferre.



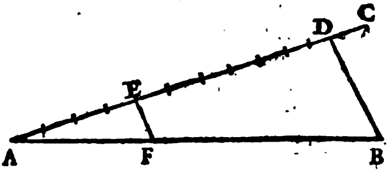
IMPERETVR, vt ex linea A B, auferamus partem tertiam. Ex A, ducatur recta A C, vtcunque faciens angulum C A B; & ex A C, abſcindantur tot partes æquales cuiuslibet magnitudinis, quota pars detrahenda eſt ex A B, vt in propoſito exemplo tres A D, D E, E F. Deinde ex F, ad B, recta ducatur F B, cui per D, parallela agatur D G. Dico A G, eſſe partem tertiam imperatam rectæ A B. Nam cùm in triangulo A B F, lateri F B, parallela ſit recta D G; d erit vt F D, ad D A, ita B G, ad G A, e Componendo igitur, vt F A, ad D A, ita B A, erit ad G A: Sed F A, ipſius A D, eſt tripla, ex conſtructione. Igitur & B A, ipſius A G, erit tripla;

d 2. ſexti.
e 18. quinti.

pla; ideoque A G, tertia pars erit ipſius A B, quæ imperabatur. A data ergo recta linea imperatam partem abſtulimus. Quod faciendum erat.

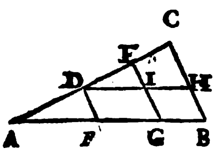
SCHOLIVM.

QVOD ſi ex A B, auferenda ſit pars non aliquota, ſed quæ plures aliquotas non efficientes vnam complectatur, nimirum quæ contineat quatuor vndecimas ipſius A B, ſumendæ erunt ex A C, vndecim partes æquales vſque ad D, punctum, ex quo ad B, recta ducatur D B; & huic parallela E F, ex E, termino quatuor partium. Nam A F, erit pars imperata. Erit enim rurſus vt D A, ad A E, ita B A, ad A F. Quare, & conuertendo vt A E, ad A D, ita A F, ad A B: Eſt autem A E, pars continens quatuor vndecimas ipſius A D, ex conſtructione. Igitur & A F, eadem pars erit rectæ A B. Quod eſt propoſitum. Non aliter detrahetur ex A B, pars complectens quotcunque partes ipſius aliquotas non facientes vnam.



xij. PROBL. 2. PROPOS. 10.

DATAM rectam lineam inſectam ſimiliter ſecare, vt data altera recta ſecta fuerit.



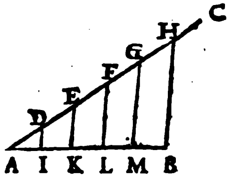
SIT recta A B, ſecanda ſimiliter, vt ſecta eſt recta A C, in D, & E, hoc eſt, in partes, quæ ſint partibus A D, D E, E C, proportionales. Coniungantur datæ duæ lineæ ad A, facientes angulum quemcunque B A C, & connectatur recta B C. Deinde ex D, E, agantur D F, E G, parallelæ ipſi B C. Dico rectam A B, ſimiliter eſſe ſectam in F, & G, vt eſt ſecta A C, in D, & E. Nam
a 2. ſexti. *a* vt A D, ad D E, ita eſt A F, ad F G. Proportionales ergo ſunt partes A F, F G, partibus A D, D E. Quod ſi ducatur D H, ipſi F B, parallela, ſecans E G, in I;
b 2. ſexti. *b* erit rurſus, vt D E, ad E C, ita D I, ad I H, hoc eſt, ita F G, ad G B;
c 34. primi. *c* quòd F G, ipſi D I, & G B, ipſi I H, æqualis ſit. Quare proportionales quoq; erunt partes F G, G B, partibus D E, E C. Eademque ratio eſt de pluribus partibus, ſi ex E, & C, ipſi A B, parallelæ agantur, &c. Itaque datam rectam lineam inſectam ſimiliter ſecuimus, vt data altera recta ſecta fuit. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

EX hoc problemate colligi poteſt facilis admodum via, ac ratio diuidendi lineam rectam datam in partes quotcunque æquales: id, quod

Digitized by Google

quod nos ad propoſ.10.lib.1. facturos recepimus, & alia iam via idem ad propoſ.40.lib.1. demonſtrauimus. Sit enim data recta A B, diuidenda in quinq; partes æquales. Ducta recta A C, faciente cum A B, quemcunque angulum C A B, ſumantur ex ea quinque partes æquales A D, D E, E F, F G, G H. Quia igitur linea recta A H, vtcunq; eſt diuiſa, ſi ex H, ad B, ducatur recta H B, & huic ex punctis D, E, F, G,



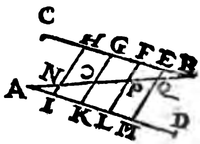
parallelæ agantur D I, E K, F L, G M; erit A B, ſimiliter diuiſa, vt A H, vt conſtat ex demonſtratione huius problematis. Cùm igitur A H, ſit diuiſa in quinque partes æquales, erit & A B in totidem æquales partes diuiſa. Haud aliter in plures partes æquales diuidetur eadem recta A B.

HVIC *rationi diuidendæ lineæ rectæ in quotcunque partes æquales, adiungi poſſunt alia non iniucunda, vt propoſ. 10. lib.1. ſumus polliciti, atque ad propoſ.40.lib.1. demonſtrauimus. Sit enim rurſus data linea recta A B, diuidenda in quinq; partes æquales. Ducatur ex B, recta B C, vtcunq; faciens angulum cum A B; Deinde ex aſſumpto puncto D, ſiue ſupra B, ſiue infra, agatur D E, parallela ipſi A B, ex qua abſcindantur quinque æquales partes D F, F G, G H, H I, I E, ea lege tamen,*

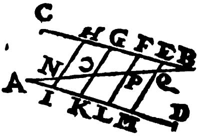


vt ſi D, eſt ſupra B, recta D E, ex quinq; partibus æqualibus conſtans, minor ſit, quàm A B, maior verò, ſi D, exiſtit infra B. Poſtremò ex A, per E, recta ducatur A C, occurrens ipſi B C, in G, puncto, à quo per puncta F, G, H, I, rectæ ducantur C K, C L, C M, C N, quas dico diuidere rectam A B, in quinq; partes æquales. Cùm enim D E, ſit parallela ipſi A B, diuidentur E H, & A M, in triangulo C A M, proportionaliter, ex ſcholio propoſ.4. huius lib. Cùm ergo E H, ſecta ſit bifariam in I, ſecta quoq; erit A M, bifariam in N. Eadem ratione recta N L, in triangulo C N L; & recta M K, in triangulo C M K; & recta L B, in triangulo C L B, ſecta erit bifariã. Eſt ergo A N, ipſi N M; & N M, ipſi M L; & M L, ipſi L K; & L K, ipſi K B, æqualis; ac proinde A B, ſecta erit in quinq; partes æquales. Quod eſt propoſitũ.

ALITER. *Ab extremis punctis A, & B, educantur duæ rectæ B C, A D, inter ſe parallelæ; hoc eſt, conſtituentes angulos A B, æquales: Et ex B C, abſcindantur quatuor partes æquales B F, E F, F G, G H, vt ſint tot partes, vna minus, in quot eſt linea diuidenda; His autem ex A D, totidem æquales reſecentur A I, I K, K L, L M. Ductis igitur rectis E M, F L, G K, H I,*

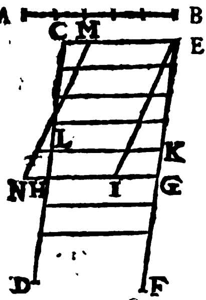


Digitized by Google



G K, H I, ſecantibus rectam A B, in N, O, P, Q, dico ipſam A B, ſectam eſſe in quinque partes æquales. Cùm enim æquales ſint, & parallelæ G H, I K,
a 33. primi. a erunt & H I, G K, parallelæ; Eademque ratione parallelæ erunt G K, F L, E M. Quare cùm A M, ſecta ſit in quatuor æquales partes, erit & A Q, ſimiliter in quatuor partes æquales diuiſa, vt conſtat ex demonſtratione huius 10. propoſ. Eadem ratione diuiſa erit & B N, in quatuor partes æquales, eò quòd B H, in totidem eſt partes æquales diuiſa. Quare cùm tam A N, quàm B Q, æqualis ſit ſingulis partibus N O, O P, P Q; erunt omnes quinque partes A N, N O, O P, P Q, Q B, inter ſe æquales. Quod eſt propoſitum.

ALITER. Præparetur prius inſtrumentum huic rei accommodatum, in hunc modum: Ductis duabus rectis inter ſe parallelis vtcunq; C D, E F; ex vtraq; abſcindãtur partes inter ſe æquales quotcunq;, ſaltem tot, in quot partes diuidenda proponitur linea, & bina pũcta correſpondentia lineis rectis iungantur. Deinde beneficio circini capiatur lõgitudo recta A B, diuidenda, eaq; ex aliquo puncto lineæ C F, vt ex E, transferatur in inſtrumentum ad punctum I; illius lineæ tranſuerſæ, quæ tot ſpatia terminat, in quot partes linea proponitur diuidenda, qualis in exemplo eſt recta G H; ea enim includit quinq; ſpatia. Poſtremò ex E, ad I, recta ducatur E I,



quam dico diuiſam eſſe in quinque æquales partes. Cùm enim G K,
b 33. primi. H L, æquales ſint, & parallelæ; b erunt quoq; G H, K L parallelæ. Eodemq; modo omnes lineæ inter rectas C D, E F, inter ſe parallelæ oſtendentur. Quare, vt ex demonſtratione huius 10. propoſ. liquet, quemadmodũ E G, diuiſa eſt in quinque partes æquales, ita ſimiliter in totidem diuiſa erit E I. Nam ſi punctum E, ſumptum non fuerit idem quod E, vel C, producenda eſt I E, donec cum F E, vel D C, coeat. Tunc enim vt in hac 10. propoſ. probatum eſt, erunt rectæ E I, E G, ſimiliter diuiſæ. Quod ſi fortè I E, nec cum F E, nec cum D C,
c 34. primi. concurrat, ſed vtrique ſit parallela, c erunt ſingulæ partes rectæ E I, ſingulis partibus rectæ E G, æquales, ob parallelogramma inter parallelas incluſa. Cùm ergo omnes partes rectæ E G, ſint æquales, erunt quoque omnes partes rectæ E I, æquales. Si igitur beneficio circini ſingulæ partes lineæ E I, transferantur in rectam propoſitam A B, ipſi E I, æqualem, diuiſa erit & A B, in quinque partes æquales. Quod eſt propoſitum.

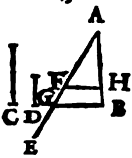
EST autem nonnunquam neceſſe lineas parallelas extra inſtrumentum

mentum producere. Vt ſi eadem linea transferatur ab M, vſq; ad N, punctum linea G H, protracta, erit quoque M N, diuiſa in quinque partes æquales. Vt conſtat, ſi ducatur ex M, ipſi E G, parallela, vſq; ad rectam G H: Vel ſi N M, producatur, donec cum G E, producta conueniat. Quod ſi linea diuidenda fuerit admodum breuis, accipienda erunt partes parallelarum C D, E F, minores, &c. Si verò linea ſit longiuſcula, & diuidenda in paucas partes æquales; transferri poterit in duplo plura ſpatia, vel in triplo plura, vel quadruplo plura, &c. Nam duo, vel tria, vel quatuor ſpatia, &c. dabunt vnam partem. Vt ſi diuidenda ſit in tres partes, transferaturq; in ſex ſpatia, dabunt duo ſpatia vnam partem: ſi transferatur in quindecim ſpatia, dabunt quinque ſpatia vnam partem, propterea quòd quinque ſpatia conficiunt tertiam partem quindecim ſpatiorum. Sic ſi linea diuidenda in duas æquales partes transferatur in octodecim ſpatia, dabunt nouem ſpatia vnam partem; quippe cùm nouem ſpatia conſtituant ſemiſſem octodecim ſpatiorum: & ſic de cæteris.

EODEM modo, ad ſimilitudinem huius propoſitionis, licebit nobis facili negotio ſequens problema, quod non rarò à Geometris adhibetur, demonſtrare. quod eſt eiuſmodi.

DATAM rectam ſecare in duas partes, quæ habeant proportionem quamcunque datam.

SIT ſecanda recta A B, in duas partes, quæ habeant proportionem inter ſe, quam recta C, & D. Ex A, ducatur linea A E, faciens angulum A, quemcunque, ex qua abſcindatur recta A F, ipſi C, & F G, ipſi D, æqualis: Ducta deinde G B, ducatur ei per F, parallela F H. Dico A B, ſectam eſſe in H, ſecundum proportionem C, ad D. Hoc autem manifeſtum eſt, a cùm ſit, vt A F, ad F G, atque adeò, vt C, ad D, ita A H, ad H B.



a 2. ſexti.

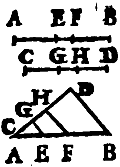
POSTREMO inſeremus huic loco theorema quoddam ad linearum etiam ſectiones pertinens, deſumptum ex Federico Commandino in libellum Archimedis de iis, quæ vehuntur in aqua. Nimirum.

SI duæ rectæ lineæ ſecentur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoque intermediæ ſectiones in eadem proportione cum quibuslibet ſegmentis duobus.

SECENTVR rectæ A B, C D, proportionaliter in binis punctis E, F, & G, H, ita vt ſit A E, ad E B, ſicut C G, ad G D; Item A F, ad F B, vt C H, ad H D. Dico ſectiones intermedias E F, G H, proportionales quoque eſſe cum duobus ſegmentis F B, H D; vel cum

duobus

Digitized by Google



duobus AE, CG, hoc eſt, eſſe FB, ad EF, vt HD, ad GH. Item AE, ad EF, vt CG, ad GH. Cùm enim ſit, vt AE, ad EB, ita CG, ad GD, erit componendo, vt AB, ad EB, ita CD, ad GD. Item cùm ſit, vt AF, ad FB, ita CH, ad HD, erit componendo, vt AB, ad FB, ita CD, ad HD, & conuertendo, vt FB, ad AB, ita HD, ad CD. Itaq; cùm ſit, vt FB, ad AB, ita HD, ad CD; Et vt AB, ad EB, ita CD, ad GD. a Erit
a 22. quinti. ex æquo, vt FB, ad EB, ita HD, ad GD. Et conuertendo, vt EB, ad FB, ita GD, ad HD: Et per conuerſionem rationis, vt EB, ad EF, ita GD, ad GH, & diuidendo, vt FB, ad EF; ita HD, ad GH. Quod eſt primum.

RVRSVS, quia eſt, vt AE, ad EB, ita CD, ad GD. Et vt EB, ad EF, ita GD, ad GH, vt oſtenſum eſt; erit ex æquo, vt AE, ad EF, ita CG, ad GH. Quod eſt ſecundum.

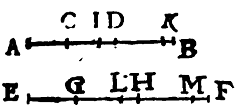
BREVIVS idem demonſtrabitur hoc modo. Conueniant duo puncta A, & C, in vnum, vt fiat angulus BCD, vel BAD, iunganturq; recta DB, HF, GE. Quia igitur ponitur, vt AE, ad EB, ita
b 2. ſexti. CG, ad GD, b Parallela erit GE, ipſi DB. Rurſus, cùm ponatur, vt AF, ad FB, ita CH, ad HD; c Parallela erit quoq; HF, ipſi
c 2. ſexti. DB. d Quare & GE, HF, inter ſe parallelæ erunt: Ac propterea e erit, vt AE, ad EF, ita CG, ad GH. Quod eſt ſecundum.

d 30. primi. EODEM modo, ſi puncta extrema B, D, conueniant in vnum, &c. oſtendemus eſſe, vt BF, ad EF, ita HD, ad GH, & conuertendo, vt EF, ad FB, ita GH, ad HD. Quod eſt primum.

e 2. ſexti. IDEM verum eſt, ſi magnitudines AB, CD, ſint diuerſæ, vt v.g. AB, ſuperficies, & CD, linea, vel corpus, vt ex priori demonſtratione conſtat.

SED neque omittendum videtur hoc loco theorema quod ſequitur.

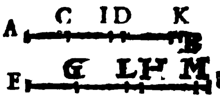
SI linea recta ſit ſecta in quotcunque partes Arithmeticè proportionales, & alia recta ſecetur in totidem partes, quæ eaſdem inter ſe, quæ illæ proportiones habeant; erunt quoque partes huius lineæ Arithmeticè proportionales.



RECTA linea AB, ſecta ſit in partes AC, CD, DB, Arithmeticè proportionales, hoc eſt habentes eundem exceſſum: e Secetur autem recta EF, in par-
f 10. ſexti. tes EG, GH, HF, illis proportionales. Dico has partes eundem quoq; habere exceſſum, hoc eſt, Arithmeticè eſſe proportionales: Sit enim CI, ipſi

EF, ipſi A C, & D K, ipſi C D, æqualis: vt I D, ſit exceſſus inter C D, A C; & K B, exceſſus inter D B, C D, atq; adeò ipſi I D, æqualis. Sit quoque G L, ipſi E G, & H M, ipſi G H, æqualis; vt L H, exceſſus ſit inter G H, E G, & M F, exceſſus inter H F, G H. Probandũ eſt, exceſſus L H, M F, æquales eſſe. Quoniã igitur eſt, vt A C, ad C D, ita E G, ad G H, erit permutando quoque vt A C, ad E G, ita C D, ad G H. Item quoniam eſt, vt C D, ad D B, ita G H, ad H F, erit quoque permutando, vt C D, ad G H, ita D B, ad H F. Atque ita ſi plures fuerint partes, habebunt ſemper partes lineæ A B, ad partes lineæ E F, ſingulæ ad ſingulas, eandem proportionem, quamuis partes vnius lineæ non ſint continuè proportionales. Itaque cùm ſit, vt C D, ad G H, ita A C, ad E G, hoc eſt, ita C I, ad G L, a erit quoque reliqua I D, ad reliquam L H, vt tota C D, ad totam G H. Rurſus quia eſt, vt D B, ad H F, ita C D, ad G H, hoc eſt, ita D K, ad H M, b erit quoque reliqua K B, ad reliquam M F, vt tota D B, ad totam H F, vel vt ablata D K, ad ablatam H M, hoc eſt, vt C D, ad G H. Erat autem quoque I D, ad L H, vt C D, ad G H. c Igitur erit vt I D, ad L H, ita K B, ad M F. Eſt autem I D, ipſi K B, æqualis. d Igitur & L H, ipſi M F, æqualis erit: atque idcirco E G, G H, H F, Arithmeticè proportionales erunt, cùm exceſſus habeant æquales. Quod eſt propoſitum.

a 19. quinti. b 19. quinti. c 11. quinti. d 14. quinti.



HOC theorema nullo modo conuerti poteſt. Nõ enim ſequitur, ſi duæ lineæ ſectæ ſint in partes Arithmeticè proportionales, partes vnius habere eaſdem proportiones, quas partes alterius habent. Nam ſi lineæ E F, ſecunda pars ſtatuatur G M, ita vt exceſſus inter E G, G M, ſit L M. Deinde ipſi G M, poſt M, ſumatur proportio ipſi G M, æqualis, eique adijciatur idem exceſſus L M, fient tres partes Arithmeticè proportionales in linea E F, & tamen non habent eaſdem proportiones inter ſe, quas habent partes lineæ A B: e quippe cùm minor ſit proportio E G, ad G M, quàm E G, ad G H, hoc eſt, quàm A B, ad C D.

e 8. quinti.

INFERTVR hinc aliud hoc theorema.

SI duæ lineæ inæquales ad alias duas eandem habeant proportionem, minor ad minorem, & maior ad maiorem, erit quoque exceſſus priorum ad exceſſum poſteriorum, vt priorum vna ad vnam poſteriorum.

VT in ſuperiori figura, quoniam erat, vt A C, ad E G, hoc eſt, vt C I, ad G L, ita C D, ad G H; oſtenſum eſt, ita quoque eſſe exceſſum I D, ad exceſſum L H, vt C D, ad G H, Itaque ſi A C, C D, ſint duplæ, aut dimidiatæ partes ipſarum E G, G H, erit quoq; I D, dupla, vel pars dimidiata ipſius L H, &c.

EX his quoque hoc problema abſoluemus.

LINEAM

LINEAM rectam datam in quotuis partes Arithmeticè proportionales ſecare.

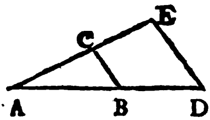
SIT enim recta E F, ſecanda in tres partes Arithmeticè proportionales. Sumantur tres rectæ A C, C D, D B, quomodocunque Arithmeticè proportionales componentes rectam lineam A B. Si igitur a 10. ſexti. *data recta E F, a ſecetur ſimiliter in G, H, vt A B, in C D, ſecta eſt, erunt partes E G, G H, H F, Arithmeticè proportionales, vt demonſtratum eſt.*

HÆC omnia vera etiam ſunt, in numeris, & in quibuſuis alijs magnitudinibus, cùm ſemper eadem ſit demonſtratio. Atque ex his deſumpſimus in 10. regula proportionalitatis Arithmeticæ poſtremam rationem diſtribuendi datum numerum in quotuis partes Arithmeticè proportionales. Nam per eam diuiditur datus numerus in partes, quæ eaſdem habent proportiones, quas aſſumpti numeri proportionalitatis Arithmeticæ, cùm ſemper fiat vt ſumma aſſumptorum numerorum, ad datum numerum, ita ſinguli numeri aſſumpti ad aliud. Hinc enim fit, numeros aſſumptos cum partibus dati numeri inuentis eandem habere proportionem. Quare vt hic oſtenſum eſt, partes inuentæ ſunt Arithmeticè proportionales.

2. PROBL. 3. PROPOS. 11.

DVABVS datis rectis lineis tertiam proportionalem adinuenire.

SINT duæ rectæ A B, A C, ita diſpoſitæ, vt efficiant angulum A, quemcunque, ſitq; inuenienda illis tertia proportionalis, ſicut quidē A B, ad A C, ita A C, ad tertiam. Producatur A B, quam volumus eſſe antecedentem, & capiatur B D, æqualis ipſi A C, quæ conſequens eſſe debet, ſiue media. Deinde ducta recta B C, agatur illi ex D, parallela D E, occurrens ipſi A C, productæ in E. Dico C E, eſſe tertiam proportionalem, hoc eſt, eſſe vt A B, ad A C, ita A C, ad C E. Cùm enim in triangulo A D E, lateri D E, parallela



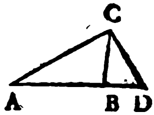
b 2. ſexti. ſit recta B C; *b* erit vt A B, ad B D, ita A C, ad C E. *c* Sed vt A B, ad B D, ita eadem A B, ad A C, æqualem ipſi B D. Vt igitur A B, c 7. quinti. ad A C, ita A C, ad C E: quod eſt propoſitum. Duabus ergo datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

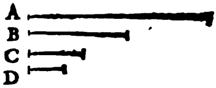
ALITER idem demonſtrabimus, hoc modo. Duæ rectæ datæ A B, B C, conſtituantur ad angulum rectum A B C, & coniungatur recta A C. Producta autem A B, antecedente, ducatur ex C, ad

A C, per-

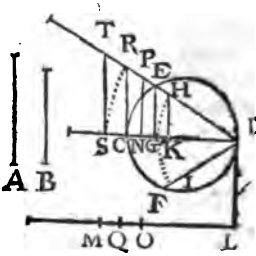
Digitized by Google



AC, perpendicularis CD, occurrens ipſi AB, productæ in D. Dico BD, eſſe tertiam proportionalem. Cùm enim in triangulo ACD, angulus ACD, ſit rectus, & ab eo ad baſin AD, deducta perpendicularis CB; erit per coroll. propoſ. 8 huius lib. BC, media proportionalis inter AB, & BD, hoc eſt, vt AB, ad BC, ita erit BC, ad BD. Quod eſt propoſitum.

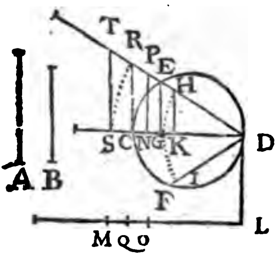


INVENTA autem tertia linea continuè proportionali, ſi primam omiſeris, & alijs duabus tertiam inueneris, habebis quatuor lineas continuè proportionales. Vt ſi lineis A, & B, adinueniatur tertia proportionalis C, & duabus B, & C, tertia proportionalis D, erunt quatuor lineæ A, B, C, D, continuè proportionales. Eadem arte reperietur quinta proportionalis, ſexta, ſeptima, octaua; & ſic in infinitum.



EXPEDITIVS reperiemus quotlibet lineas continuè proportionales in data proportione, hoc modo. Sit primùm data proportio lineæ A, maioris ad minorem B. Circa rectã CD, ipſi A, æqualem deſcribatur circulus CEDF, in quo applicentur DE, DF, ipſi B, æquales. Applicata autem regula punctis E, F, ducatur recta EG, quæ ad CD, perpẽdicularis erit. Cùm enim recta DG, per centrum tranſiens ſecet arcum ECF, bifariam, (ablatis enim æqualibus arcubus DE, DF, ex ſemicirculis æqualibus DEC, DFC, reliqui arcus CE, CF, æquales erunt) ſecabit eadem & rectam ductam EF, bifariam, per ea, quæ in ſcholio propoſ.
27. lib. 3. oſtendimus. a Igitur & ad angulos rectos. Et quoniam, ſi a 3. tertij.
duceretur recta EC, b angulus ad E, in ſemicirculo rectus eſſet;
erit ex coroll. propoſ. 8. huius lib. DE, media proportionalis inter b 31. tertij.
CD, DG: ac proinde DG, erit tertia proportionalis ipſis CD, DE,
hoc eſt, datis duabus A, & B. Quòd ſi ex D, per G, arcus deſcribatur
ſecans rectas DE, DF, in H, I; applicataq; regula ad puncta H, I, c 27. tertij.
ducatur recta HK; erit DK, quarta proportionalis. Nam propter
angulos HDG, IDG, (qui c ob æquales arcus EC, FC, æquales d 26. tertij.
ſunt) d arcus HG, IG, æquales erunt; ac propterea ex ſcholio pro-
poſ. 27. lib. 3. recta ducta HI, bifariam ſecabitur in K; e ideoque e 3. tertij.
& ad angulos rectos. f Parallelæ ergo ſunt EG, HK. g Vt igitur
recta ED, ad DG, ita erit DH, hoc eſt, DG, ad DK. Sunt ergo qua- f 28. primi.
tuor lineæ CD, DE, DG, DK, continuè proportionales. Quòd ſi ex
D, per K, alius arcus deſcribatur ſecans rectas DE, DF, inuenietur g 2. vel 4. ſexti.
eadem arte quinta proportionalis, atq; ita in infinitum.

DEINDE ſit data proportio lineæ B, minoris, ad maiorem A. Ductis duabus rectis D C, L M, ad D L, perpendicularibus, abſcindantur rectæ D N, L O, minori B, æquales, applicataq; regula ad
a 29. primi. *puncta O, N, ducatur recta N P,* a *quæ ad D C, perpendicularis erit,* b *cùm ſit parallela ipſi D L. Sumpta deinde recta D C, æqualis ipſi*
b 33. primi. *A, maiori deſcribatur ex D, per C, arcus ſecans rectã N P, in P extendaturque ex D, per P, recta D P T, eritq; D P, ipſi D C, hoc eſt, ipſi A, æqualis. Abſciſſa quoque L Q, ipſi D C, æqualis, applicataq; ad puncta Q, C, regula, ducatur recta C R, quæ eadem ratione ad D C,*
c 2. vel 4. ſexti. *perpendicularis erit, & ipſi N P, parallela.* c *Et quoniam eſt, vt N D, ad D P, hoc eſt, vt B, ad A, (quod N D, D P, ipſis B, A, acceptæ ſint æquales) ita C D, ad D R, hoc eſt, ita D P, ad D R; erunt tres rectæ N D, D P, D R, continuè proportionales; ideoque D R, ipſis B, A, tertia proportionalis erit. Quòd ſi ex D, per R, arcus deſcribatur ſecans D C, in S, & rectæ D S, æqualis auferatur L M, applicataq; regula ad puncta M, S, recta ducatur S T, erit D T, quarta proportionalis. Nam eadem ratione erit S T, ipſi C R, parallela, & ad D C, per-*
d 2. vel 4. ſexti. *pendicularis.* d *Quare erit, vt C D, ad D R, hoc eſt, vt A, ad D R, ita S D, id eſt, D R, ad D T. Sunt ergo quatuor lineæ N D, D P, D R, D T, continuè proportionales. Quòd ſi ex D, per T, alius arcus deſcribatur ſecans rectam D C, protractam, inuenietur eadem arte quinta proportionalis, atq; ita in infinitum.*



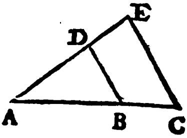
EX his ſine magno labore inter duas rectas datas reperiemus duas medias proportionales, non quidem Geometricè omnino, ſed quaſi attentando, & praxim ipſarum iterum atq; iterum repetendo, donec id, quod quærimus, aſſequamur. Vt ſi inter C D, D K, inuenienda ſint duæ mediæ proportionales, deſcripto circa maiorem C D, circulo C E D F, erigemus in K, ad C D, perpendicularem K H, ducemusq; D H, ea lege, vt ex puncto E, (vbi D H, circumferentiæ occurrit) perpendicularis ad D C, demiſſa E G, auferat rectam D G, rectæ D H, æqualem, hoc eſt, vt arcus ex D, per H, deſcriptus tranſeat per punctum G. Hoc enim facto, erunt D E, D H, inter C D, D K, mediæ proportionales. Nam vt oſtendimus, eſt vt C D, ad D E, ita D E, ad D G, ex coroll. propoſ. 8.
e 2. vel 4. ſexti. *huius lib.* e *Et vt D E, ad D G, ita D H, hoc eſt, D G, ad D K. Sunt ergo quatuor rectæ C D, D E, D H, D K, continuè proportionales, ac proinde D E, D H, inter C D, D K, mediæ proportionales ſunt. Quod ſi rectæ D H, D G, comperiantur non eſſe æquales, ſi quidem D H, fuerit minor, eleuanda erit D H, magis; ſi verò maior, magis deprimenda, donec deprehendantur æquales D H, D G.*

PROBL.

PROBL. 4. PROPOS. 12.

TRIBVS datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

SINT tres lineæ rectæ AB, BC, AD, quibus inuenienda ſit quarta proportionalis; ſicut quidẽ AB, ad BC, ita AD, ad quartam. Diſponantur primæ duæ AB, BC, ſecundum lineam rectam, quæ ſit AC: Tertia verò AD, cum prima AB, faciat angulum A, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur BD, cui per C, parallela ducatur CE, occurrens rectæ AD, productæ, in E, puncto. Dico DE, eſſe quartam proportionalem. Cùm enim in triangulo ACE, lateri CE, acta ſit parallela BD; a erit vt AB, ad BC, ita AD, ad DE. Quare DE, quarta eſt proportionalis; ac propterea tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenimus. Quod faciendum erat.



a 2. ſexti.

SCHOLIVM.

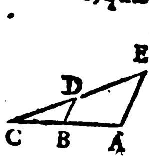
HINC facilè elicimus, quonam pacto, datis duabus rectis lineis, duæ aliæ in eadem cum illis proportione reperiri poſſint. Si enim datæ ſint duæ rectæ lineæ A, B, in quacunque proportione, ſi tertia qualibet accipiatur C, & ei quarta proportionalis inueniatur D, vt ſit quemadmodum A, ad B, ita C, ad D; factum erit, quod proponitur. Eadem arte inuenientur ſex lineæ, octo, decem, duodecim, &c. quarum binæ ſemper eandem habeant proportionem.



OSTENDEMVS etiam cum Pappo ſequens problema. Videlicet.

TRIBVS datis rectis lineis, quartam inuenire, quæ ſit ad tertiam, vt prima ad ſecundam.

SINT tres rectæ AB, BC, CD, oporteatq; inuenire quartam, quæ ad CD, tertiam ſit, vt AB, prima ad BC, ſecundam. Diſponantur primæ duæ AB, BC, in directum, vt faciant rectam AC: Tertia verò CD, cum ſecunda BC, faciat angulum C, quemcunq;. Deinde ex B, ad D, recta ducatur BD, cui per A, parallela ducatur AE, occurrens rectæ CD, producta in E. Dico ED, eſſe quartam, hoc eſt, eſſe ED, ad DC, tertiam, vt eſt AB, prima ad BC, ſecundam. Hoc autem manifeſtum eſt, b cùm AC, EC, proportionaliter ſecentur in B, & D, punctis.



b 2. ſexti.

ALITER. Ex ſecunda CB, fiat prima, & ex prima AB, fiat ſecunda, c atque inueniatur tribus CB, BA, CD, quarta proportionalis DE: Vt ſit ſecunda CB, ad primã BA, vt tertia CD, ad quar-

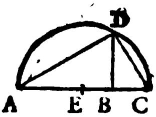
c 12. ſexti.

Digitized by Google

tam D E. Erit enim & conuertendo A B, prima ad B C, ſecundam, vt D E, quarta ad C D, tertiam.

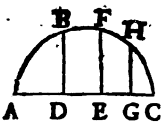
ix. PROBL. 5. PROPOS. 13.

DVABVS datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire.

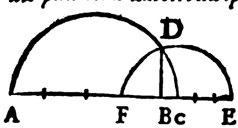


SINT duæ rectæ A B, B C, quibus media inuenienda eſt proportionalis, diſpoſitæ ſecundum lineam rectam A C. Diuiſa A C, bifariam in E, ex E, centro, & interuallo E A, vel E C, ſemicirculus deſcribatur A D C: Deinde ex B, ad A C, perpendicularis educatur B D, ad circumferentiam vſque. Dico B D, eſſe mediam proportionalem inter A B, & B C.
a 31. tertij. Ductis enim rectis A D, C D; a erit angulus A D C, rectus in ſemicirculo. Cùm igitur ex angulo recto A D C, trianguli rectanguli A D C, deducta ſit ad baſin A C, perpendicularis D B; erit per corollarium propoſ. 8. huius lib. B D, media proportionalis inter A B, & B C. Duabus ergo datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.



PERSPICVVM hinc fit, lineam rectam, quæ in circulo à quouis puncto diametri ipſi diametro perpendicularis ducitur ad circumferentiam vſque, mediam eſſe proportionalem inter duo diametri ſegmenta, quæ à perpendiculari facta ſunt. Detur enim ſemicirculus A B C, & ex puncto D, diametri A C, ducatur ad circumferentiam recta D B, perpendicularis ipſi A C. Dico D B, eſſe proportionalem mediam inter A D, & D C: Id quod liquidò conſtat ex demonſtratione huius problematis. Si enim ducan-
b 31. tertij. *tur rectæ A B, C B;* b *fiet angulus A B C, rectus. Quare per coroll. propoſ. 8. conſtat propoſitum. Eadem ratione erit perpendicularis E F, media proportionalis inter A E, & E C. Item G H, inter A G, & G C, atq; eodem modo de alijs quibuſcunq; dicendum eſt, quæ ex quibuſuis punctis diametri ad ipſam diametrum perpendiculares ducentur.*



QVANDO minor data linea eſt valde exigua, ſecabit perpendicularis B D, nimis obliquè circumferentiam in D. Quare vt exquiſitius tunc punctum D, inueniatur, multiplicabimus minorem lineam B C, quoties libuerit. V.g. ſumemus B E, ipſius B C, quadruplam, maiorem verò lineam A B, in tot partes æquales ſecabimus, quotuplex eſt B E, ipſius B C: ſitque vna pars B F: ita vt

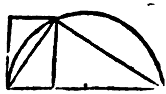
eam-

Digitized by Google

eandem proportionem habeat AB, ad BF, quam BE, ad BC. Ac tandem circa EF, circulus deſcribatur ſecans BD, in D: eritq́; BD, media proportionalis inter BF, BE, vt in hoc ſcholio demonſtrauimus. Dico eandem eſſe mediam proportionalem inter AB, BC. Cùm enim ſit vt prima AB, ad ſecundam BF, ita tertia BE, ad quartam BC; a *erit rectangulum ſub AB, prima, & BC, quarta,* a 16. ſexti. *æquale rectangulo ſub BF, ſecunda, & BE, tertia.* b *Sed hoc æquale eſt quadrato BD. Igitur & illud.* c *Quapropter BD, media proportionalis eſt inter AB, BC.* b 17 ſexti. *Non autem te moueat, quod citauerimus propoſ. 16. & 17. huius, quæ nondum ſunt demonſtrata: quia* c 14 ſexti. *hæc demonſtratio cum ſua conſtructione differri poteſt poſt propoſ. 17. huius, ita vt nullum periculum ſit petitionis principij, vt Philoſophi loquuntur.*

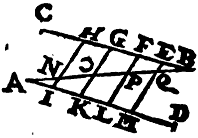
EX PELETARIO.

DATA recta linea, aliam rectam, (quæ minor non ſit, quàm dupla illius) ita ſecare, vt data recta ſit media proportionalis inter ſegmenta huius.



SIT data recta AC, & diuidenda proponatur recta AB, (quæ minor non ſit, quàm dupla ipſius AC, ſed vel dupla, vel maior) ita vt inter huius ſegmenta, media proportionalis ſit AC. Diſponantur rectæ AB, AC, ad angulum rectum BAC, & diuiſa AB, bifariam in D, ex D, centro, interuallo autem DA, vel DB, ſemicirculus deſcribatur AEB. Deinde per C, ducatur ipſi AB, parallela CE, ſecans, vel tangens circumferentiam in E, puncto: (Secabit autem neceſſariò CE, circumferentiam, vel tanget. Nam ſi minor ſit quàm dimidium rectæ AB, hoc eſt, minor, quàm ſemidiameter ad angulos rectos erecta ex D, ſecabit circumferentiam; tanget autem eandem circumferentiam, ſi æqualis ſit dimidio rectæ AB, hoc eſt, æqualis ſemidiametro ex D, ad angulos rectos educta. Cùm ergo poſitum ſit, AC, non eſſe maiorem dimidio rectæ AB, ſecabit neceſſariò AC, circumferentiam, aut tanget) à quo demittatur ad AB, perpendicularis EF. Dico AC, eſſe mediam proportionalem inter ſegmenta AF, FB. Ductis enim rectis AE, BE, erit vt iam eſt demonſtratum, ex coroll. propoſ. 8. huius lib. EF, media proportionalis inter AF, & FB. d *Cùm igitur* d 37. primi *EF, æqualis ſit ipſi AC, eo quod parallelogrammum ſit ACEF; (Eſt enim CE, ipſi AF, parallela per conſtructionem,* e *& AC,* e 28 primi. *ipſi EF, propter angulos rectos CAF, & EFA,) erit & AC, media proportionalis inter AF, & FB. Quod eſt propoſitum.*

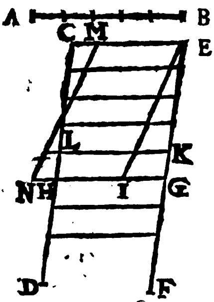
Digitized by Google



G K, H I, ſecantibus rectam A B, in N, O, P, Q, dico ipſam A B, ſectam eſſe in quinque partes æquales. Cùm enim æquales ſint, & parallelæ G H, I K, a erunt & H I, G K, parallelæ; Eademque ratione parallelæ erunt G K, F L, E M. Quare cùm A M, ſecta ſit in quatuor æquales partes, erit & A Q, ſimiliter in quatuor partes æquales diuiſa, vt conſtat ex demonſtratione huius 10. propoſ. Eadem ratione diuiſa erit & B N, in quatuor partes æquales, eò quòd B H, in totidem eſt partes æquales diuiſa. Quare cùm tam A N, quàm B Q, æqualis ſit ſingulis partibus N O, O P, P Q; erunt omnes quinque partes A N, N O, O P, P Q, Q B, inter ſe æquales. Quod eſt propoſitum.

a 33. primi.

ALITER. Præparetur priùs inſtrumentum huic rei accommodatum, in hunc modum: Ductis duabus rectis inter ſe parallelis vtcunque C D, E F; ex vtraque abſcindantur partes inter ſe æquales quotcunque, ſaltem tot, in quot partes diuidenda proponitur linea, & binæ pũcta correſpondentia lineis rectis iungantur. Deinde beneficio circini capiatur lõgitudo rectæ A B, diuidendæ, eaque ex aliquo puncto lineæ C F, vt ex E, transferatur in inſtrumentum ad punctum I; illius lineæ tranſuerſæ, quæ tot ſpatia terminat, in quot partes linea proponitur diuidenda, qualis in exemplo eſt recta G H; ea enim includit quinque ſpatia. Poſtremò ex E, ad I, recta ducatur E I, quam dico diuiſam eſſe in quinque æquales partes. Cùm enim G K, H L, æquales ſint, & parallelæ; b erunt quoque G H, K L parallelæ. Eodemque modo omnes lineæ inter rectas C D, E F, inter ſe parallelæ oſtendentur. Quare, vt ex demonſtratione huius 10. propoſ. liquet, quemadmodũ E G, diuiſa eſt in quinque partes æquales, ita ſimiliter in totidem diuiſa erit E I. Nam ſi punctum E, ſumptum non fuerit idem quod E, vel C, producenda eſt I E, donec cum F E, vel D C, coeat. Tunc enim vt in hac 10. propoſ. probatum eſt, erunt rectæ E I, E G, ſimiliter diuiſæ. Quod ſi fortè I E, nec cum F E, nec cum D C, concurrat, ſed vtrique ſit parallela, c erunt ſingulæ partes rectæ E I, ſingulis partibus rectæ E G, æquales, ob parallelogramma inter parallelas incluſa. Cùm ergo omnes partes rectæ E G, ſint æquales, erunt quoque omnes partes rectæ E I, æquales. Si igitur beneficio circini ſingulæ partes lineæ E I, transferantur in rectam propoſitam A B, ipſi E I, æqualem, diuiſa erit & A B, in quinque partes æquales. Quod eſt propoſitum.



b 33. primi.

c 34. primi.

EST autem nonnunquam neceſſe lineas parallelas extra inſtrumentum

mentum

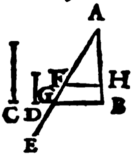
Digitized by Google

mentum producere. Vt ſi eadem linea transferatur ab M, vſq; ad N, punctum lineæ G H, protracta, erit quoque M N, diuiſa in quinque partes æquales. Vt conſtat, ſi ducatur ex M, ipſi E G, parallela, vſq; ad rectam G H: Vel ſi N M, producatur, donec cum G E, producta conueniat. Quod ſi linea diuidenda fuerit admodum breuis, accipienda erunt partes parallelarum C D, E F, minores, &c. Si verò linea ſit longiuſcula, & diuidenda in paucas partes æquales; transferri poterit in duplo plura ſpatia, vel in triplo plura, vel quadruplo plura, &c. Nam duo, vel tria, vel quatuor ſpatia, &c. dabunt vnam partem. Vt ſi diuidenda ſit in tres partes, transferaturq; in ſex ſpatia, dabunt duo ſpatia vnam partem: ſi transferatur in quindecim ſpatia, dabunt quinque ſpatia vnam partem, propterea quòd quinque ſpatia conficiunt tertiam partem quindecim ſpatiorum. Sic ſi linea diuidenda in duas æquales partes transferatur in octodecim ſpatia, dabunt nouem ſpatia vnam partem; quippe cùm nouem ſpatia conſtituant ſemiſſem octodecim ſpatiorum: & ſic de cæteris.

EODEM modo, ad ſimilitudinem huius propoſitionis, licebit nobis facili negotio ſequens problema, quod non rarò à Geometris adhibetur, demonſtrare. quod eſt eiuſmodi.

DATAM rectam ſecare in duas partes, quæ habeant proportionem quamcunque datam.

SIT ſecanda recta A B, in duas partes, quæ habeant proportionem inter ſe, quam recta C, & D. Ex A, ducatur linea A E, faciens angulum A, quemcunque, ex qua abſcindatur recta A F, ipſi C, & F G, ipſi D, æqualis: Ducta deinde G B, ducatur ei per F, parallela F H. Dico A B, ſectam eſſe in H, ſecundum proportionem C, ad D. Hoc autem manifeſtum eſt, a cùm ſit, vt A F, ad F G, atque adeò, vt C, ad D, ita A H, ad H B.

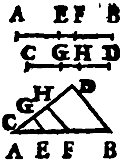


a 2. ſexti.

POSTREMO inſeremus huic loco theorema quoddam ad linearum etiam ſectiones pertinens, deſumptum ex Federico Commandino in libellum Archimedis de ijs, quæ vehuntur in aqua. Nimirum.

SI duæ rectæ lineæ ſecentur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoque intermediæ ſectiones in eadem proportione cum quibuslibet ſegmentis duobus.

SECENTVR rectæ A B, C D, proportionaliter in binis punctis E, F, & G, H, ita vt ſit A E, ad E B, ſicut C G, ad G D; Item A F, ad F B, vt C H, ad H D. Dico ſectiones intermedias E F, G H, proportionales quoque eſſe cum duobus ſegmentis F B, H D; vel cum duobus



duobus A E, C G, hoc eſt, eſſe F B, ad E F, vt H D, ad G H. Item A E, ad E F, vt C G, ad G H. Cùm enim ſit, vt A E, ad E B, ita C G, ad G D, erit componendo, vt A B, ad E B, ita C D, ad G D. Item cùm ſit, vt A F, ad F B, ita C H, ad H D, erit componendo, vt A B, ad F B, ita C D, ad H D, & conuertendo, vt F B, ad A B, ita H D, ad C D. Itaq; cùm ſit, vt F B, ad A B, ita H D, ad C D; Et vt A B, ad E B, ita C D, ad G D.
a 22. quinti. *a Erit ex æquo, vt F B, ad E B, ita H D, ad G D. Et conuertendo, vt E B, ad F B, ita G D, ad H D: Et per conuerſionem rationis, vt E B, ad E F, ita G D, ad G H, & diuidendo, vt F B, ad E F; ita H D, ad G H. Quod eſt primum.*

RVRSVS, quia eſt, vt A E, ad E B, ita C D, ad G D. Et vt E B, ad E F, ita G D, ad G H, vt oſtenſum eſt; erit ex æquo, vt A E, ad E F, ita C G, ad G H. Quod eſt ſecundum.

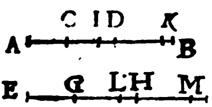
BREVIVS idem demonſtrabitur hoc modo. Conueniant duo puncta A, & C, in vnum, vt fiat angulus B C D, vel B A D, iunganturq; recta D B, H F, G E. Quia igitur ponitur, vt A E, ad E B, ita
b 2. ſexti. *C G, ad G D, b Parallela erit G E, ipſi D B. Rurſus, cùm ponatur, vt A F, ad F B, ita C H, ad H D; c Parallela erit quoq; H F, ipſi*
c 2. ſexti. *D B. d Quare & G E, H F, inter ſe parallelæ erunt: Ac propterea e erit, vt A E, ad E F, ita C G, ad G H. Quod eſt ſecundum.*

d 30. primi. *EODEM modo, ſi puncta extrema B, D, conueniant in vnum, &c. oſtendemus eſſe, vt B F, ad E F, ita H D, ad G H, & conuertendo, vt E F, ad F B, ita G H, ad H D. Quod eſt primum.*

e 2. ſexti. *IDEM verum eſt, ſi magnitudines A B, C D, ſint diuerſæ, vt v.g. A B, ſuperficies, & C D, linea, vel corpus, vt ex priori demonſtratione conſtat.*

SED neque omittendum videtur hoc loco theorema quod ſequitur.

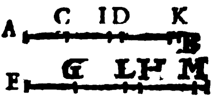
SI linea recta ſit ſecta in quotcunque partes Arithmeticè proportionales, & alia recta ſecetur in totidem partes, quæ eaſdem inter ſe, quæ illæ proportiones habeant; erunt quoque partes huius lineæ Arithmeticè proportionales.



RECTA linea A B, ſecta ſit in partes A C, C D, D B, Arithmeticè proportionales, hoc eſt habentes eundem exceſſum: e Secetur autem recta E F, in partes E G, G H, H F, illis proportionales. Dico has partes eundem quoq; habere exceſſum, hoc eſt, Arithmeticè eſſe proportionales: Sit enim
f 10. ſexti.

C I, ipſi

eſt, ipſi A C, & D K, ipſi C D, æqualis: vt I D, ſit exceſſus inter C D, A C; & K B, exceſſus inter D B, C D, atq; adeò ipſi I D, æqualis. Sit quoque G L, ipſi E G, & H M, ipſi G H, æqualis; vt L H, exceſſus ſit inter G H, E G, & M F, exceſſus inter H F, G H. Probandũ eſt, exceſſus L H, M F, æquales eſſe. Quoniã igitur eſt, vt A C, ad C D, ita E G, ad G H, erit permutando quoque vt A C, ad E G, ita C D, ad G H. Item quoniam eſt, vt C D, ad D B, ita G H, ad H F, erit quoque permutando, vt C D, ad G H, ita D B, ad H F. Atque ita ſi plures fuerint partes, habebunt ſemper partes lineæ A B, ad partes lineæ E F, ſingula ad ſingulas, eandem proportionem, quamuis partes vnius lineæ non ſint continuè proportionales. Itaque cùm ſit, vt C D, ad G H, ita A C, ad E G, hoc eſt, ita C I, ad G L, a *erit quoque reliqua I D,* a 19.
ad reliquam L H, vt tota C D, ad totam G H. Rurſus quia eſt, vt quinti.
D B, ad H F, ita C D, ad G H, hoc eſt, ita D K, ad H M, b *erit* b 19.
quoque reliqua K B, ad reliquam M F, vt tota D B, ad totam H F, quinti.
vel vt ablata D K, ad ablatam H M, hoc eſt, vt C D, ad G H. Erat autem quoque I D, ad L H, vt C D, ad G H. c *Igitur erit vt I D,* c 11.
ad L H, ita K B, ad M F. Eſt autem I D, ipſi K B, æqualis. d *Igitur* quinti.
& L H, ipſi M F, æqualis erit: atque idcirco E G, G H, H F, A- d 14.
rithmeticè proportionales erunt, cùm exceſſus habeant æquales. Quod quinti.
eſt propoſitum.



HOC theorema nullo modo conuerti poteſt. Nõ enim ſequitur, ſi duæ lineæ ſectæ ſint in partes Arithmeticè proportionales, partes vnius habere eaſdem proportiones, quas partes alterius habent. Nam ſi lineæ E F, ſecunda pars ſtatuatur G M, ita vt exceſſus inter E G, G M, ſit L M. Deinde ipſi G M, poſt M, ſumatur proportio ipſi G M, æqualis, eique adijciatur idem exceſſus L M, fient tres partes Arithmeticè proportionales in linea E F, & tamen non habent eaſdem proportiones inter ſe, quas habent partes lineæ A B: e *quippe cùm minor ſit proportio E G, ad G M, quàm E G, ad G H,* e 8.
hoc eſt, quàm A B, ad C D. quinti.

INFERTVR hinc aliud hoc theorema.

SI duæ lineæ inæquales ad alias duas eandem habeant proportionem, minor ad minorem, & maior ad maiorem, erit quoque exceſſus priorum ad exceſſum poſteriorum, vt priorum vna ad vnam poſteriorum.

VT in ſuperiori figura, quoniam erat, vt A C, ad E G, hoc eſt, vt C I, ad G L, ita C D, ad G H; oſtenſum eſt, ita quoque eſſe exceſſum I D, ad exceſſum L H, vt C D, ad G H, Itaque ſi A C, C D, ſint dupla, aut dimidiatæ partes ipſarum E G, G H, erit quoq; I D, dupla, vel pars dimidiata ipſius L H, &c.

EX his quoque hoc problema abſoluemus.

LINEAM

LINEAM rectam datam in quotuis partes Arithmeticè proportionales ſecare.

SIT enim recta EF, ſecanda in tres partes Arithmeticè proportionales. Sumantur tres rectæ AC, CD, DB, quomodocunque Arithmeticè proportionales componentes rectam lineam AB. Si igitur a 10. ſexti. *data recta EF, a ſecetur ſimiliter in G, H, vt AB, in C D, ſecta eſt, erunt partes EG, GH, HF, Arithmeticè proportionales, vt demonſtratum eſt.*

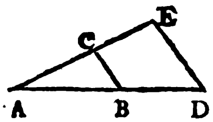
HÆC omnia vera etiam ſunt, in numeris, & in quibuſuis alijs magnitudinibus, cùm ſemper eadem ſit demonſtratio. Atque ex his deſumpſimus in 10. regula proportionalitatis Arithmeticæ poſtremam rationem diſtribuendi datum numerum in quotuis partes Arithmeticè proportionales. Nam per eam diuiditur datus numerus in partes, quæ eaſdem habent proportiones, quas aſſumpti numeri proportionalitatis Arithmeticæ, cùm ſemper fiat vt ſumma aſſumptorum numerorum, ad datum numerum, ita ſinguli numeri aſſumpti ad aliud. Hinc enim fit, numeros aſſumptos cum partibus dati numeri inuentis eandem habere proportionem. Quare vt hic oſtenſum eſt, partes inuentæ ſunt Arithmeticè proportionales.

x.

PROBL. 3. PROPOS. 11.

DVABVS datis rectis lineis tertiam proportionalem adinuenire.

SINT duæ rectæ AB, AC, ita diſpoſitæ, vt efficiant angulum A, quemcunque, ſitq; inuenienda illis tertia proportionalis, ſicut quidē AB, ad AC, ita AC, ad tertiam. Producatur AB, quam volumus eſſe antecedentem, & capiatur BD, æqualis ipſi AC, quæ conſequens eſſe debet, ſiue media. Deinde ducta recta BC, agatur illi ex D, parallela DE, occurrens ipſi AC, productæ in E. Dico CE, eſſe tertiam proportionalem, hoc eſt, eſſe vt AB, ad AC, ita AC, ad CE. Cùm enim in triangulo ADE, lateri DE, parallela ſit recta BC; *b* erit vt AB, ad BD, ita AC, ad CE. *c* Sed vt AB, ad BD, ita eadem AB, ad AC, æqualem ipſi BD. Vt igitur AB, ad AC, ita AC, ad CE: quod eſt propoſitum. Duabus ergo datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.



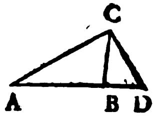
b 2. ſexti.

c 7. quinti.

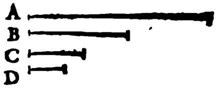
SCHOLIVM.

ALITER idem demonſtrabimus, hoc modo. Duæ rectæ datæ AB, BC, conſtituantur ad angulum rectum ABC, & coniungatur recta AC. Producta autem AB, antecedente, ducatur ex C, ad

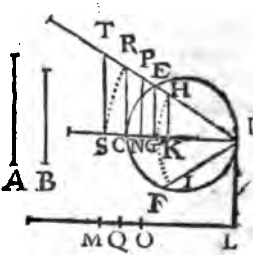
AC, per-



A C, perpendicularis C D, occurrens ipſi A B, producta in D. Dico B D, eſſe tertiam proportionalem. Cùm enim in triangulo A C D, angulus A C D, ſit rectus, & ab eo ad baſin A D, deducta perpendicularis C B; erit per coroll. propoſ. 8 huius lib. B C, media proportionalis inter A B, & B D, hoc eſt, vt A B, ad B C, ita erit B C, ad B D. Quod eſt propoſitum.



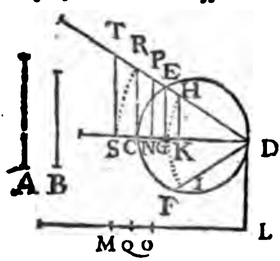
INVENTA autem tertia linea continuè proportionali, ſi primam omiſeris, & alijs duabus tertiam inueneris, habebis quatuor lineas continuè proportionales. Vt ſi lineis A, & B, adinuenatur tertia proportionalis C, & duabus B, & C, tertia proportionalis D, erunt quatuor lineæ A, B, C, D, continuè proportionales. Eadem arte reperietur quinta proportionalis, ſexta, ſeptima, octaua; & ſic in infinitum.



EXPEDITIVS reperiemus quotlibet lineas continuè proportionales in data proportione, hoc modo. Sit primùm data proportio lineæ A, maioris ad minorem B. Circa rectã C D, ipſi A, æqualem deſcribatur circulus C E D F, in quo applicentur D E, D F, ipſi B, æquales. Applicata autem regula punctis E, F, ducatur recta E G, quæ ad C D, perpẽdicularis erit. Cùm enim recta D G, per centrum tranſiens ſecet arcum E C F, bifariam, (ablatis enim æqualibus arcubus D E, D F, ex ſemicirculis æqualibus D E C, D F C, reliqui arcus C E, C F, æquales erunt) ſecabit eadem & rectam ductam E F, bifariam, per ea, quæ in ſcholio propoſ.
27. lib. 3. oſtendimus. a *Igitur & ad angulos rectos. Et quoniam, ſi* a 3. ter-
duceretur recta E C, b *angulus ad E, in ſemicirculo rectus eſſet;* tij.
erit ex coroll. propoſ. 8. huius lib. D E, media proportionalis inter b 31. ter
C D, D G: ac proinde D G, erit tertia proportionalis ipſis C D, D E, tij.
hoc eſt, datis duabus A, & B. Quòd ſi ex D, per G, arcus deſcribatur
ſecans rectas D E, D F, in H, I; applicataq; regula ad puncta H, I, c 27.
ducatur recta H K; erit D K, quarta proportionalis. Nam propter tertij.
angulos H D G, I D G, (qui c *ob æquales arcus E C, F C, æquales* d 26.
ſunt) d *arcus H G, I G, æquales erunt; ac propterea ex ſcholio pro-* tertij.
poſ. 27. lib. 3. recta ducta H I, bifariam ſecabitur in K; e *ideoque* e 3. ter-
& ad angulos rectos. f *Parallelæ ergo ſunt E G, H K.* g *Vt igitur* tij.
recta E D, ad D G, ita erit D H, hoc eſt, D G, ad D K. Sunt ergo qua- f 28. pri-
tuor lineæ C D, D E, D G, D K, continuè proportionales. Quòd ſi ex mi.
D, per K, alius arcus deſcribatur ſecans rectas D E, D F, inuenietur g 2. vel
eadem arte quinta proportionalis, atq; ita in infinitum. 4. ſe-
xti.

Digitized by Google

DEINDE ſit data proportio lineæ B, minoris, ad maiorem A.
Ductis duabus rectis B C, L M, ad D L, perpendicularibus, abſcin-
dantur rectæ D N, L O, minori B, æquales, applicataq; regula ad
a 29. pri- puncta O, N, ducatur recta N P, a qua ad D C, perpendicularis erit,
mi. b cùm ſit parallela ipſi D L. Sumpta deinde recta D C, æqualis ipſi
b 33. pri- A, maiori deſcribatur ex D, per C, arcus ſecans rectã N P, in P ex-
mi. tendaturque ex D, per P, recta D P T, eritq; D P, ipſi D C, hoc eſt, ipſi
A, æqualis. Abſciſſa quoque L Q, ipſi D C, æqualis, applicataq; ad
puncta Q, C, regula, ducatur recta C R, quæ eadem ratione ad D C,
c 2. vel perpendicularis erit, & ipſi N P, parallela. c Et quoniam eſt, vt
4. ſexti. N D, ad D P, hoc eſt, vt B, ad A, (quod N D, D P, ipſis B, A, acceptæ
ſint æquales) ita C D, ad D R, hoc eſt, ita D P, ad D R; erunt tres
rectæ N D, D P, D R, continuè proportionales; ideoque D R, ipſis B,
A, tertia proportionalis erit. Quòd ſi ex D, per R, arcus deſcribatur ſe-
cans D C, in S, & recta D S, æqualis auferatur L M, applicataq; regula
ad puncta M, S, recta ducatur S T, erit D T, quarta proportionalis.
Nam eadem ratione erit S T, ipſi C R, parallela, & ad D C, per-
d 2. vel pendicularis. d Quare erit, vt C D, ad D R, hoc eſt, vt A, ad D R, ita
4. ſexti. S D, id eſt, D R, ad D T. Sunt ergo quatuor lineæ N D, D P, D R,
D T, continuè proportionales. Quòd ſi ex D, per T, alius arcus deſcri-
batur ſecans rectam D C, protractam, inuenietur eadem arte quin-
ta proportionalis, atq; ita in infinitum.



EX his ſine magno labore inter duas rectas datas reperiemus duas medias proportionales, non quidem Geometricè omnino, ſed quaſi attentando, & praxin ipſarum iterum atq; iterum repetendo, donec id, quod quærimus, aſſequamur. Vt ſi inter C D, D K, inueniendæ ſint duæ mediæ proportionales, deſcripto circa maiorem C D, circulo C E D F, erigemus ex
K, ad C D, perpendicularem K H, ducemusq; D H, ea lege, vt ex pun-
cto E, (vbi D H, circumferentiæ occurrit) perpendicularis ad D G,
demiſſa E G, auferat rectam D G, rectæ D H, æqualem, hoc eſt, vt
arcus ex D, per H, deſcriptus tranſeat per punctum G. Hoc enim fa-
cto, erunt D E, D H, inter C D, D K, mediæ proportionales. Nam vt
oſtendimus, eſt vt C D, ad D E, ita D E, ad D G, ex coroll. propoſ. 8.
e 2. vel huius lib. e Et vt D E, ad D G, ita D H, hoc eſt, D G, ad D K. Sunt
4. ſexti. ergo quatuor rectæ C D, D E, D H, D K, continuè proportionales, ac
proinde D E, D H, inter C D, D K, mediæ proportionales ſunt. Quòd ſi
rectæ D H, D G, comperiantur non eſſe æquales, ſi quidem D H, fue-
rit minor, eleuanda erit D H, magis; ſi verò maior, magis deprimen-
da, donec deprehendantur æquales D H, D G.

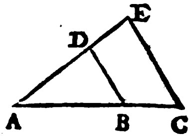
PROBL.

Digitized by Google

PROBL. 4. PROPOS. 12. x.

TRIBVS datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

SINT tres lineæ rectæ AB, BC, AD, quibus inuenienda ſit quarta proportionalis; ſicut quidē AB, ad BC, ita AD, ad quartam. Diſponantur primæ duæ AB, BC, ſecundum lineam rectam, quæ ſit AC: Tertia verò AD, cum prima AB, faciat angulum A, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur BD, cui per C, parallela ducatur CE, occurrens rectæ AD, productæ, in E, puncto. Dico DE, eſſe quartam proportionalem. Cùm enim in triangulo ACE, lateri CE, acta ſit parallela BD; a erit vt AB, ad BC, ita AD, ad DE. Quare DE, quarta eſt proportionalis; ac propterea tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenimus. Quod faciendum erat. a 2. ſe. xti.



SCHOLIVM.

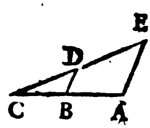
HINC faciliè elicimus, quonam pacto, datis duabus rectis lineis, duæ aliæ in eadem cum illis proportione reperiri poſſint. Si enim datæ ſint duæ rectæ lineæ A, B, in quacunque proportione, ſi tertia quælibet accipiatur C, & ei quarta proportionalis inueniatur D, vt ſit quemadmodum A, ad B, ita C, ad D; factum erit, quod proponitur. Eadem arte inuenientur ſex lineæ, octo, decem, duodecim, &c. quarum binæ ſemper eandem habeant proportionem.



OSTENDEMVS etiam cum Pappo ſequens problema. Videlicet.

TRIBVS datis rectis lineis, quartam inuenire, quæ ſit ad tertiam, vt prima ad ſecundam.

SINT tres rectæ AB, BC, CD, oporteatq; inuenire quartam, quæ ad CD, tertiam ſit, vt AB, prima ad BC, ſecundam. Diſponantur primæ duæ AB, BC, in directum, vt faciant rectam AC: Tertia verò CD, cum ſecunda BC, faciat angulum C, quemcunq;. Deinde ex B, ad D, recta ducatur BD, cui per A, parallela ducatur AE, occurrens rectæ CD, productæ in E. Dico ED, eſſe quartam, hoc eſt, eſſe ED, ad DC, tertiam, vt eſt AB, prima ad BC, ſecundam. Hoc autem manifeſtum eſt, b *cùm AC, EC, proportionaliter ſecentur in B, & D, punctis.* b 2. ſe. xti.

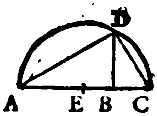


ALITER. Ex ſecunda CB, fiat prima, & ex prima AB, fiat ſecunda, c *atque inueniatur tribus CB, BA, CD, quarta proportionalis DE: Vt ſit ſecunda CB, ad primā BA, vt tertia CD, ad quar-* c 12. ſe. xti.

tam D E. Erit enim & conuertendo A B, prima ad B C, ſecundam, vt D E, quarta ad C D, tertiam.

ix. PROBL. 5. PROPOS. 13.

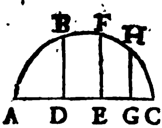
DVABVS datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire.



SINT duæ rectæ A B, B C, quibus media inuenienda eſt proportionalis, diſpoſitæ ſecundum lineam rectam A C. Diuiſa A C, bifariam in E, ex E, centro, & interuallo E A, vel E C, ſemicirculus deſcribatur A D C: Deinde ex B, ad A C, perpendicularis educatur B D, ad circumferentiam vſque. Dico B D, eſſe mediam proportionalem inter A B, & B C. Ductis enim rectis A D, C D; a erit angulus A D C, rectus in ſemicirculo. Cùm igitur ex angulo recto A D C, trianguli rectanguli A D C, deducta ſit ad baſin A C, perpendicularis D B; erit per corollarium propoſ. 8. huius lib. B D, media proportionalis inter A B, & B C. Duabus ergo datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.

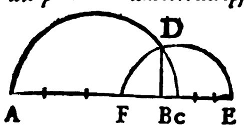
a 31. tertij.

SCHOLIVM.



PERSPICVVM hinc fit, lineam rectam, quæ in circulo à quouis puncto diametri ipſi diametro perpendicularis ducitur ad circumferentiam vſque, mediam eſſe proportionalem inter duo diametri ſegmenta, quæ à perpendiculari facta ſunt. Detur enim ſemicirculus A B C, & ex puncto D, diametri A C, ducatur ad circumferentiam recta D B, perpendicularis ipſi A C. Dico D B, eſſe proportionalem mediam inter A D, & D C: Id quod liquidò conſtat ex demonſtratione huius problematis. Si enim ducantur rectæ A B, C B; b fiet angulus A B C, rectus. Quare per coroll. propoſ. 8. conſtat propoſitum. Eadem ratione erit perpendicularis E F, media proportionalis inter A E, & E C. Item G H, inter A G, & G C, atque eodem modo de alijs quibuſcunque dicendum eſt, quæ ex quibuſuis punctis diametri ad ipſam diametrum perpendiculares ducentur.

b 31. tertij.



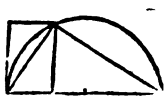
QVANDO minor data linea eſt valde exigua, ſecabit perpendicularis B D, nimis obliquè circumferentiam in D. Quare vt exquiſitiùs tunc punctum D, inueniatur, multiplicabimus minorem lineam B C, quoties libuerit. V. g. ſumemus B E, ipſius B C, quadruplam, maiorem verò lineam A B, in tot partes æquales ſecabimus, quotuplex eſt B E, ipſius B C: ſitque vna pars B F: ita vt

ea-

eandem proportionem habeat AB, ad BF, quam BE, ad BC. Ac tandem circa EF, circulus deſcribatur ſecans BD, in D: eritq; BD, media proportionalis inter BF, BE, vt in hoc ſcholio demonſtrauimus. Dico eandem eſſe mediam proportionalem inter AB, BC. Cùm enim ſit vt prima AB, ad ſecundam BF, ita tertia BE, ad
quartam BC; a *erit rectangulum ſub AB, prima, & BC, quarta,* a 16. *ſexti.*
æquale rectangulo ſub BF, ſecunda, & BE, tertia. b *Sed hoc æqua-*
le eſt quadrato BD. Igitur & illud. c *Quapropter BD, media pro-* b 17 *ſexti.*
portionalis eſt inter AB, BC. Non autem te moneat, quod citaue-
rimus propoſ. 16. & 17. huius, quæ nondum ſunt demonſtrata: quia c 14 *ſexti.*
hæc demonſtratio cum ſua conſtructione differri poteſt poſt propoſ. 17. huius, ita vt nullum periculum ſit petitionis principij, vt Philoſophi loquuntur.

EX PELETARIO.

DATA recta linea, aliam rectam, (quæ minor non ſit, quàm dupla illius) ita ſecare, vt data recta ſit media proportionalis inter ſegmenta huius.



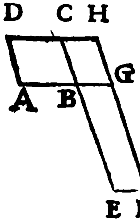
A F D B

SIT data recta AC, & diuidenda proponatur recta AB, (quæ minor non ſit, quàm dupla ipſius AC, ſed vel dupla, vel maior) ita vt inter huius ſegmenta, media proportionalis ſit AC. Diſponantur rectæ AB, AC, ad angulum rectum BAC, & diuiſa AB, bifariam in D, ex D, centro, interuallo autem DA, vel DB, ſemicirculus deſcribatur AEB. Deinde per C, ducatur ipſi AB, parallela CE, ſecans, vel tangens circumferentiam in E, puncto: (Secabit autem neceſſariò CE, circumferentiam, vel tanget. Nam ſi minor ſit quàm dimidium rectæ AB, hoc eſt, minor, quàm ſemidiameter ad angulos rectos erecta ex D, ſecabit circumferentiam; tanget autem eandem circumferentiam, ſi æqualis ſit dimidio rectæ AB, hoc eſt, æqualis ſemidiametro ex D, ad angulos rectos educta. Cùm ergo poſitum ſit, AC, non eſſe maiorem dimidio rectæ AB, ſecabit neceſſariò AC, circumferentiam, aut tanget) à quo demittatur ad AB, perpendicularis EF. Dico AC, eſſe mediam proportionalem inter ſegmenta AF, FB. Ductis enim rectis AE, BE, erit vt iam eſt demonſtratum, ex coroll. propoſ. 8. huius lib. EF, media proportionalis inter AF, & FB. d *Cùm igitur* d 37. *primi*
EF, æqualis ſit ipſi AC, eo quod parallelogrammum ſit ACEF;
(Eſt enim CE, ipſi AF, parallela per conſtructionem, e *& AC,* e 28 *primi.*
ipſi EF, propter angulos rectos CAF, & EFA,) erit & AC, media proportionalis inter AF, & FB. Quod eſt propoſitum.

Digitized by Google

xiij. **THEOR. 9. PROPOS. 14.**

ÆQVALIVM & vnum vni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum vnum angulum vni angulo æqualem habentium reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos; illa ſunt æqualia.



SINT duo parallelogramma æqualia ABCD, BEFG, habentia angulos ABC, EBG, æquales. Dico latera circum hoſce angulos eſſe reciproca, hoc eſt, eſſe vt AB, ad BG, ita EB, ad BC. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt AB, & BG, vnam efficiant lineam rectam. Quo facto, cùm anguli ABC, EBG, ſint æquales, erunt & EB, BC, vna recta linea, vt ad propoſ. 15. lib. 1. ex Proclo demonſtrauimus. Producantur iam DC, & FG, donec coeant in H.
a 7. quinti. Quoniam igitur æqualia ſint parallelogramma DB, BF: *a* erit
vt DB, ad BH, ita BF, ad idem BH: Sed vt DB, ad BH, *b* ita
b 1. ſext. eſt AB, baſis ad baſin BG, quòd parallelogramma ſint eiuſdem altitudinis; & ſimiliter vt BF, ad BH, ita eſt baſis EB, ad baſin BC. Igitur vt AB, ad BG, ita eſt EB, ad BC. Quod eſt propoſitum.

E CONTRARIO ſint iam latera circa æquales angulos ABC, EBG, reciproca, hoc eſt, vt AB, ad BG, ita EB, ad BC. Dico parallelogramma DB, BF, eſſe æqualia. Facta enim eadem con-
c 1. ſext. ſtructione; cùm ſit, vt AB, ad BG, ita EB, ad BC: *c* Vt autem AB, ad BG, ita DB, ad BH; & vt EB, ad BC, ita BF, ad idem BH; erit
d 9. quinti. quoque vt DB, ad BH, ita BF, ad idem BH. *d* Atque idcirco æqualia erunt parallelogramma DB, BF. Aequalium igitur, & vnum vni æqualem habentium angulum, &c. Quod erat demonſtrandum.

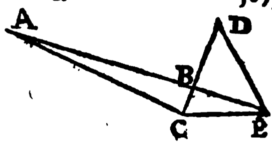
xiiij. **THEOR. 10. PROPOS. 15.**

ÆQVALIVM, & vnum vni æqualem habentium angulum, triangulorum, reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum vnum angulum vni æqualem habentium reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos, illa ſunt æqualia.

SINT duo triangula æqualia ABC, DBE, habentia angu-

los

los, qui ad B, æquales. Dico latera circa hoſce angulos eſſe reciproca, hoc eſt, eſſe vt A B, ad B E, ita D B, ad B C. Coniungantur enim triangula ad angulos æquales, ita vt A B, B E, vnam efficiant lineã rectam. Quo



facto, cùm anguli A B C, D B E, ſint æquales; erunt & D B, B C, vna recta linea, vt demonſtratum eſt ad propoſ. 15. lib. 1. ex Proclo. Ducta igitur recta C E, quoniam æqualia ſunt triangula A B C, D B E, *a* erit vt A B C, ad B C E, ita D B E, ad idem B C E. Sed vt triangulum A B C, ad triangulum B C E, *b* ita eſt baſis A B, ad baſin B E, quòd hæc triangula eiuſdem ſint altitudinis; & ſimiliter vt D B E, ad B C E, ita eſt baſis D B, ad B C. Quare vt A B, ad B E, ita eſt D B, ad B C. Quod eſt propoſitum. a 7. *quinti.* b 1. *ſext.*

IAM verò contrà, ſint latera circa angulos æquales, qui ad B, reciproca, hoc eſt, vt A B, ad B E, ita D B, ad B C. Dico triangula A B C, D B E, eſſe æqualia. Facta enim conſtructione eadem, cùm ſit vt A B, ad B E, ita D B, ad B C; vt autem A B, ad B E, *c* ita triangulum A B C, ad triangulum B C E; & vt D B, ad B C, ita triangulum D B E, ad triangulum idem B C E; Erit vt A B C, ad B C E, ita D B E, ad idem B C E, *d* proptereaq; æqualia erunt triangula A B C, D B E. Aequalium igitur, & vnum vni æqualem habentium angulum, &c. Quod oſtendendum erat. c 1. *ſext.* d 9. *quinti.*

THEOR. 11. PROPOS. 16. XV.

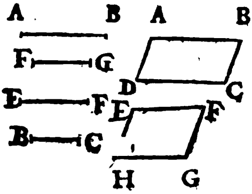
SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, quod ſub extremis comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei, quod ſub medijs comprehenditur, rectangulo. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale fuerit ei, quod ſub medijs continetur, rectangulo: illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT quatuor rectæ proportionales A B, F G, E F, B C; vt quidem A B, ad F G, ita E F, ad B C: Sitq; rectangulum A B C D, comprehenſum ſub extremis A B, B C; rectangulum verò E F G H, comprehenſum ſub medijs E F, F G: Dico rectangula A C, E G, eſſe æqualia. Cùm enim anguli recti B, & F, ſint æquales, & ſit vt A B, ad F G, ita E F, ad B C; erũt latera circa ęquales angulos B, & F, reciproca. *e* Quare parallelogramma A C, E G, æqualia erunt. Quod eſt propoſitũ. e 14. *ſexti.*

CONTRA verò, ſint iam æqualia rectangula A C, E G. Dico quatuor rectas lineas A B, F G, E F, B C, eſſe proportionales, hoc eſt, eſſe vt A B, ad F G, ita E F, ad B C. Cùm enim æqualia ſint rectangula A C, E G, habeantq; angulos æquales, nempe rectos B, & F, *f* erunt latera circa hoſce angulos reciproca; ſicut quidem A B, ad F G, ita E F, ad B C. Itaq; ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum. f 14. *ſexti.*

Digitized by Google

SCHOLIVM.

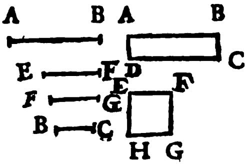


IDEM verum eſt, etiamſi parallelogramma A C, E G, non ſint rectangula, dummodo ſint æquiangula, ita vt anguli dictis rectis lineis comprehenſi ſint æquales. Veluti manifeſtum eſt in hac figura. Eadem enim prorſus eſt demonſtratio.

xvj.

THEOR. 12. PROPOS. 17.

SI tres rectæ lineæ ſint proportionales: quod ſub extremis comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei, quod à media deſcribitur, quadrato. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale ſit ei, quod à media deſcribitur, quadrato; illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.



SINT tres lineæ rectæ A B, E F, & B C, proportionales: vt quidem A B, ad E F, ita E F, ad B C: ſitque rectangulum A B C D, contentũ ſub extremis A B, B C, & quadratum mediæ E F, ſit E F G H. Dico æqualia eſſe rectangulum A C, & quadratũ E G. Sumpta enim recta F G, quæ æqualis ſit ipſi E F, erunt quatuor lineæ A B, E F, F G, B C, proportionales; vt quidem A B, ad E F, ita F G, ad B C; eritq; quadratũ E G, comprehenſum ſub medijs E F, F G, propter æqualitatem

a 16. ſexti. rectarum E F, F G. *a* Quare rectangulum A C, comprehenſum ſub extremis A B, B C, æquale eſt quadrato E G, hoc eſt, rectangulo ſub medijs E F, F G, comprehenſo. Quod eſt propoſitum.

SED ſint iam æqualia rectangulum A C, & quadratum E G. Dico eſſe vt A B, ad E F, ita E F, ad B C. Cùm enim æqualia ſint

b 16. ſexti. rectangula A C, & E G, *b* erit vt A B, ad E F, ita F G, ad B C: *c* Vt autem F G, ad B C, ita eſt E F, ipſi F G, æqualis ad eandem B C.

c 7. quinti. Quare vt A B, ad E F, ita eſt E F, ad B C. Si tres igitur rectæ lineæ ſint proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

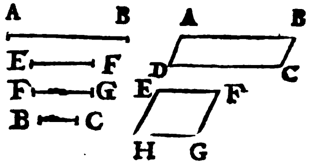
EX poſteriori huius theorematis parte efficitur, quamlibet rectam lineam eſſe mediam proportionalem inter quaſuis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato illius æquale. Ex eo enim quod rectæ A B, B C, comprehendunt rectangulum æquale quadrato rectæ E F, oſtenſum fuit, eſſe vt A B, ad E F, ita E F, ad B C. Quare E F, media eſt proportionalis inter A B, & B C.

SCHO-

Digitized by Google

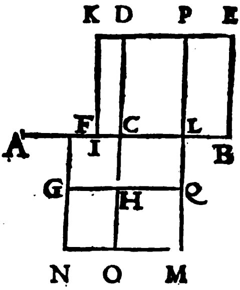
SCHOLIVM.

EADEM omnino conſequuntur, etiamſi parallelogramma non ſint rectangula, dummodo ſint æquiangula, ita vt E G, ſit Rhombus, & A C, Rhomboides. Non enim diſſimilis erit in his demonſtratio, vt figura indicat.



LIBET hoc loco cum Peletario demonſtrare problema non inutile ad lineas proportionales ſpectans: quod eſt eiuſmodi.

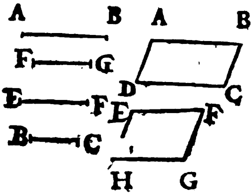
SECTA linea recta in duas partes vtcunque, alterutram earum ita rurſus partiri in duas partes, vt omnes tres partes ſint continuè proportionales.



SIT recta A B, diuiſa in C, vtcunque, oporteatque partem C B, ita ſecare in duas alias partes, vt omnes tres partes continuè proportionales ſint. Secetur A C, biſariam in F, & F C, iterum biſariam in I, vt C I, quarta pars ſit primæ partis A C; & ex B, I, erigantur duæ perpendiculares B E, I K, primæ parti A C, æquales, ducaturque recta E K, ita vt rectangulum I E, comprehenſum ſit ſub A C, prima parte, & recta I B, compoſita ex altera parte B C, & ex C I, quarta parte primæ partis. Et quoniam A C, diuiſa eſt biſariam in F, eique addita in rectum C B, a erit rectangulum ſub A B, B C, vna cum quadrato ex C F, æquale quadrato ex B F: Eſt autem rectangulum I E, minus rectangulo ſub A B, B C, vna cum quadrato ex C F. (Ducta enim C D, ad A B, perpendiculari, erit rectangulum C E, contentum ſub A C, C B, minus rectangulo ſub A B, B C: At rectangulum C K, quadrato ex C F, æquale, cum vtrumque quarta pars ſit quadrati ex A C; rectangulum quidem C K, b quia ſic eſt rectangulum C K, ad quadratum ex A C, hoc eſt, ad rectangulum ſub A C, C D, vt C I, ad C A; ac proinde cum C I, ſit quarta pars rectæ A C, erit & C K, quarta pars quadrati ex A C; At vero quadratum ex C F, quarta pars eſt eiuſdem quadrati ex A C, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2.) Igitur minus quoque erit quadrato ex B F. Si igitur c fiat quadratum rectangulo I E, æquale, erit eius latus minus recta F B, maius autem quam F C, quippe cum quadratum ex F C, æquale ſit oſtenſum rectangulo C K, ac propterea minus rectangulo I E. Sit ergo latus illud F L. Dico partem C B, ita ſectam eſſe in L, vt tres partes

a 6. ſecundi.
b 1. ſex.
c 14. ſecundi.

SCHOLIVM.

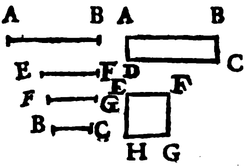


IDEM verum eſt, etiamſi parallelogramma A C, E G, non ſint rectangula, dummodo ſint æquiangula, ita vt anguli dictis rectis lineis comprehenſi ſint æquales. Velut manifeſtum eſt in hac figura. Eadem enim prorſus eſt demonſtratio.

xvj.

THEOR. 12. PROPOS. 17.

SI tres rectæ lineæ ſint proportionales: quod ſub extremis comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei, quod à media deſcribitur, quadrato. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale ſit ei, quod à media deſcribitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.



SINT tres lineæ rectæ A B, E F, & B C, proportionales: vt quidem A B, ad E F, ita E F, ad B C: ſitque rectangulum A B C D, contentũ ſub extremis A B, B C, & quadratum mediæ E F, ſit E F G H. Dico æqualia eſſe rectangulum A C, & quadratũ E G. Sumpta enim recta F G, quæ æqualis ſit ipſi E F, erunt quatuor lineæ A B, E F, F G, B C, proportionales; vt quidem A B, ad E F, ita F G, ad B C; eritq; quadratũ E G, comprehenſum ſub medijs E F, F G, propter æqualitatem

a 16. ſexti. rectarum E F, F G. *a* Quare rectangulum A C, comprehenſum ſub extremis A B, B C, æquale eſt quadrato E G, hoc eſt, rectangulo ſub medijs E F, F G, comprehenſo. Quod eſt propoſitum.

SED ſint iam æqualia rectangulum A C, & quadratum E G. Dico eſſe vt A B, ad E F, ita E F, ad B C. Cùm enim æqualia ſint

b 16. ſexti. rectangula A C, & E G, *b* erit vt A B, ad E F, ita F G, ad B C: *c* Vt autem F G, ad B C, ita eſt E F, ipſi F G, æqualis ad eandem B C.

c 7. quinti. Quare vt A B, ad E F, ita eſt E F, ad B C. Si tres igitur rectæ lineæ ſint proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

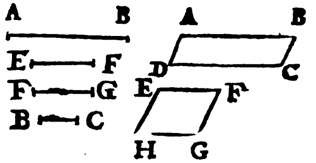
EX poſteriori huius theorematis parte efficitur, quamlibet rectam lineam eſſe mediam proportionalem inter quaſuis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato illius æquale. Ex eo enim quod rectæ A B, B C, comprehendunt rectangulum æquale quadrato rectæ E F, oſtenſum fuit, eſſe vt A B, ad E F, ita E F, ad B C. Quare E F, media eſt proportionalis inter A B, & B C.

SCHO-

Digitized by Google

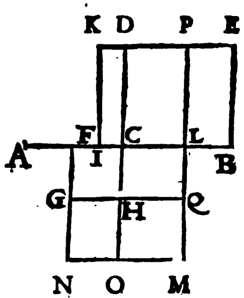
SCHOLIVM.

EADEM omnino conſequuntur, etiamſi parallelogramma non ſint rectangula, dummodo ſint æquiangula, ita vt E G, ſit Rhombus, & A C, Rhomboides. Non enim diſſimilis erit in his demonſtratio, vt figura indicat.



LIBET hoc loco cum Peletario demonſtrare problema non inutile ad lineas proportionales ſpectans: quod eſt eiuſmodi.

SECTA linea recta in duas partes vtcunque, alterutram earum ita rurſus partiri in duas partes, vt omnes tres partes ſint continuè proportionales.

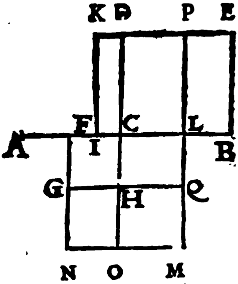


SIT recta A B, diuiſa in C, vtcunque, oporteatque partem C B, ita ſecare in duas alias partes, vt omnes tres partes continuè proportionales ſint. Secetur A C, bifariam in F, & F C, iterum bifariam in I, vt C I, quarta pars ſit primæ partis A C; & ex B, I, erigantur duæ perpendiculares B E, I K, primæ parti A C, æquales, ducaturque recta E K, ita vt rectangulum I E, comprehenſum ſit ſub A C, prima parte, & recta I B, compoſita ex altera parte B C, & ex C I, quarta parte primæ partis. Et quoniam A C, diuiſa eſt bifariam in F, eique addita in rectum C B, a erit rectangulum ſub A B, B C, vna cum quadrato ex C F, æquale quadrato ex B F: Eſt autem rectangulum I E, minus rectangulo ſub A B, B C, vna cum quadrato ex C F. (Ducta enim C D, ad A B, perpendiculari, erit rectangulum C E, contentum ſub A C, C B, minus rectangulo ſub A B, B C: At rectangulum C K, quadrato ex C F, æquale, cum vtrumque quarta pars ſit quadrati ex A C; rectangulum quidem C K, b quia ſic eſt rectangulum C K, ad quadratum ex A C, hoc eſt, ad rectangulum ſub A C, C D, vt C I, ad C A; ac proinde cum C I, ſit quarta pars rectæ A C, erit & C K, quarta pars quadrati ex A C; At vero quadratum ex C F, quarta pars eſt eiuſdem quadrati ex A C, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2.) Igitur minus quoque erit quadrato ex B F. Si igitur c fiat quadratum rectangulo I E, æquale, erit eius latus minus recta F B, maius autem quam F C, quippe cum quadratum ex F C, æquale ſit oſtenſum rectangulo C K, ac propterea minus rectangulo I E. Sit ergo latus illud F L. Dico partem C B, ita ſectam eſſe in L, vt tres partes

a 6. ſecundi.

b 1. ſexti.

c 14. ſecundi.



A C, C L, L B, ſint continuè proportionales. Deſcribatur enim ex F L, quadratum F M, rectaq; D C, extendatur ad O, & latus M L, ad P: ſumptiſq; duabus F G, I Q, ipſi C F, æqualibus, ducatur recta G Q, ſecans C Q, in H. Eritq; C G, quadratum rectæ C F, ob æqualitatem rectarum C F, F G. Et quia ablatis æqualibus F C, F G, ex æqualibus F L, F N, reliquæ C L, G N, æquales ſunt; a & eſt C L, ipſi H Q, & G N, ipſi H O, æqualis; æquales quoque erunt H Q, H O; ideoq; H M, quadratum erit rectæ C L. Rurſus quia tam rectangulum C Q, comprehenditur ſub C L, & C H, ſiue C F, ſemiſſe ipſius A C, quàm rectangulum G O, ſub G N, ſiue C L, & G H, ſiue C F, ſemiſſe eiuſdem A C, ſiue C D, b erunt duo rectangula C Q, G O, ſimul æqualia rectangulo C P, comprehenſo ſub eadem C L, & C D, quæ ipſis C H, G H, ſimul æqualis eſt. Itaq; cum rectangulum I E, quadrato F M, æquale ſit; & rectangulum C K, quadrato C G; & rectangulum C P, duobus rectangulis C Q, G O, ſimul: erit reliquum rectangulum L E, comprehenſum ſub B E, ſiue A C, & B L, reliquo quadrato H M, æquale. Quocirca, cum datis tribus rectis A C, C L, L B, rectangulum L E, ſub extremis A C, B L, comprehenſum æquale ſit quadrato H M, mediæ C L; c erunt ipſæ tres lineæ A C, C L, L B, continuè proportionales. Quod eſt propoſitum.

a 34. primi.

b 1. ſecundi.

c 17. ſexti.

IN numeris idem problema ita perficietur. Poſteriori parti numeri propoſiti adiiciatur prioris partis pars quarta, & conflatus numerus in priorem partem ducatur. Huius deinde producti numeri quadrata radix eruatur. Nam ſi ex radice inuenta dematur ſemiſſis prioris partis, reliqua fiet ſecunda pars proportionalis, quam ſi ex poſteriori parte dati numeri ſubtrahas, reliqua erit tertia pars. Veluti ſi linea A B, ponatur 76. pars autem A C, 36. & C B, 40. adiiciemus C I, hoc eſt, 9. quartã partem prioris partis 36. ad C B, id eſt, ad 40. poſteriorem partem, & conflatum numerum 49. lineam ſcilicet I B, in priorem partem 36. ſiue in lineam A C, ducemus, atq; ex producto numero 1764. hoc eſt, ex rectangulo I E, radicem quadratam eruemus 42. pro linea F L, ex qua ſi detrahemus C F, ſemiſſem partis A C, nimirum 18. reliqua erit pars C L, 24. Hac ablata ex tota poſteriori parte C B, 40. remanebit tertia pars L B, 16. Sunt ergo tres partes A C, C L, L B, numeri A B, 76. hæ tres, 36. 24. 16. continuè proportionales. Ex quo conſtat, quando radix quadrata extrahi nequit ex eo producto, problema eſſe non poſſe in numeris. Atque hinc intelligentur ea, quæ lib. 5. in tractatione proportionum prope finem ſcripſimus, cum de ortu proportionalitatis Geometricæ ex Arithmetica proportionalitate ageremus.

SED quando hactenus cum Euclide de lineis proportionalibus

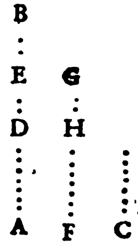
diſputa-

Digitized by Google

diſputauimus, non alienum erit à noſtro inſtituto, de eiſdem quoque cum Pappo Alexandrino diſſerere, qui datis duobus terminis ex tribus cuiuſcunque Medietatis, ſiue Arithmeticæ, ſiue Geometricæ, ſiue Harmonicæ, tertium inquirit: Et in Geometrica proportionalitate aliter, quàm ab Euclide factum eſt. Hoc autem exequemur ſequentibus propoſitionibus, quarum prima hæc ſit.

I.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Arithmetica proportionalitate inuenire.



SINT datæ duæ rectæ AB, & C, (quæ per vnitates in longum diſpoſitas hic repræſentantur) inter quas media proportionalitate Arithmetica ſit inuenienda. Minori C, ponatur æqualis FH, & ex maiore AB, abſcindatur alia æqualis AD: Diuiſo autem ſegmento BD, biſariam in E, ſumatur ipſi DE, æqualis HG. Dico FG, eſſe mediam Arithmeticè proportionalem inter AB, & C. Excedit enim AB, ipſam FG, exceſſu BE; & FG, ipſam C, exceſſu GH, ſiue DE. Cum ergo duo exceſſus BE, DE, ſint æquales, ex conſtructione, liquido conſtat rectas AB, FG, & C, Arithmeticè proportionales eſſe.

HINC efficitur, mediam lineam FG, eſſe ſemiſſem ſummæ ex extremis conflatæ. Cum enim tam AD, quam C, ipſi FH, ſit æqualis, erit ſumma ex AD, & C, ipſius FH, dupla: Eſt autem & DB, ipſius HG, dupla. a Igitur & ſumma ex AB, & C, totius FG, dupla erit; ac proinde FG, ſemiſſis erit ſummæ extremarum. Quod eſt propoſitum. a 1. quinti.

II.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Arithmetica proportionalitate inuenire.

SINT in eadem figura, datæ duæ rectæ AB, & FG, quibus inuenienda ſit tertia minor in Medietate Arithmetica. Ex minore FG, detrahatur recta GH, exceſſui BE, quo AB, ipſam FG, ſuperat, æqualis: & ipſi FH, ponatur æqualis C. Dico C, eſſe tertiã ꝓportionalem minorẽ. Excedit enim AB, ipſam FG, exceſſu BE; & FG, ipſam C, exceſſu GH: qui quidem duo exceſſus BE, GH, ex conſtructione, æquales ſunt.

III.

DATIS duabus rectis lineis, maiorem extremitatem in proportionalitate Arithmetica inuenire.

SINT in eadem figura datæ duæ rectæ C, & FG, quibus inuenienda ſit tertia maior in Medietate Arithmetica. Sumatur AE, ipſi FG, æqualis, eique addatur EB, exceſſui GH, quo FG, ipſam C, ſuperat, æqualis.

Digitized by Google

æqualis. Dico A B, eſſe tertiam proportionalem maiorem; ita vt tres A B, F G, & C, ſint proportionales Arithmeticè. Nam A B, excedit ipſam F G, exceſſu B E; & F G, ipſam C, exceſſu G H. Cum ergo duo exceſſus B E, G H, ex conſtructione, ſint æquales, patet propoſitum.

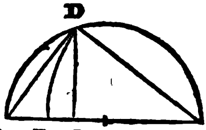
ITAQVE datis duobus numeris inæqualibus 30. 16. ſi ſemiſſis exceſſus, nimirum 7. minori 16. adiiciatur, conflabitur medius proportionalis Arithmeticè, 23. vt hic apparet, 30. 23. 16. Vel medius terminus habebitur, ſi ſummæ extremorum ſemiſſis ſumatur; vt in eodem exemplo patet. Summa enim extremorum eſt 46. & eius ſemiſſis 23. medium terminum conſtituit.

SI vero ex minore 16. detrahatur exceſſus 14. reliquum erit minus extremum 2. in Medietate Arithmetica, vt hic vides, 30. 16. 2.

SI denique maiori 30. adiiciatur exceſſus 14. conficietur maius extremũ 44. in proportionalitate Arithmetica, vt hic patet, 44. 30. 16.

IV.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Geometrica proportionalitate inuenire.



SINT datæ rectæ A B, B C, eundem terminum B, habentes, inter quas inuenienda ſit media Geometricè proportionalis. Deſcripto circa maiorem A B, ſemicirculo A D B, excitetur ex C, ad A B, perpendicularis C D; & ex B, per D, arcus deſcribatur ſecans A B, in E. Dico B E, mediam proportionalem eſſe inter A B, B C, in proportionalitate Geometrica:
a 31. tertij. *Ductis enim rectis A D, B D; a erit angulus A B D, rectus. Igitur ex coroll. propoſ. 8. huius lib. recta B D, hoc eſt, ipſi æqualis B E, media proportionalis erit inter A B, B C. Quod eſt propoſitum.*

V.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in proportionalitate Geometrica inuenire.

SINT in eadem figura datæ rectæ A B, B E, eundem poſſidentes terminum B, quibus inuenienda ſit minor tertia Geometricè proportionalis. Deſcripto circa maiorem A B, ſemicirculo A D B, deſcribatur ex B, per E, arcus ſecans circumferentiam A D B, in D, puncto, ex quo ad A B, perpendicularis demittatur D G. Dico B C, tertiam proportionalem eſſe ipſis A B, B E.
b 21. tertij. *Ductis enim rectis A D, B D; b erit angulus A D B, rectus. Igitur ex coroll. propoſ. 8. huius lib. erit B D, hoc eſt, ipſi æqualis B E, media proportionalis inter A B, B C: id eſt, erit A B, ad B E, vt B E, ad B C. Quod eſt propoſitum.*

DATIS

Digitized by Google

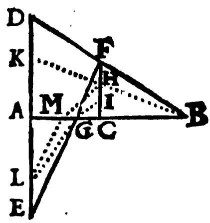
VI.

DATIS duabus lineis rectis, maiorem extremitatem in Geometrica proportionalitate inuenire.

SINT in eadem figura data recta C B, BE, eundem terminum B, poſſidentes, quibus inuenienda ſit maior tertia Geometricè proportionalis. Ex C, termino minoris excitetur ad E B, perpendicularis C D, quam arcus ex B, per E, deſcriptus ſecet in D. Ducta autem recta B D, excitetur ad eam in D, perpendicularis D A, ſecans B E, productam in A. Dico A B, tertiam proportionalem eſſe ipſis C B, B E. Quoniam enim angulus A D B, rectus eſt; erit ex coroll. propoſ. 8. huius lib. B D, hoc eſt, B E, ipſi æqualis, media proportionalis inter B C, & A B: Hoc eſt, erit C B, ad B E, vt B E, ad A B. Quod eſt propoſitum.

VII.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Harmonica proportionalitate inuenire.



SINT data recta A B, B C, eundem terminum B, poſſidentes, inter quas inuenienda ſit media Harmonicè proportionalis. Ducta per A, ad A B, perpendiculari D E, ponantur æquales A D, A E, quantacunq; Excitetur quoq; ex C, ad A B, perpendicularis C F, ſecans ductã rectã BD, in F, puncto, ex quo ad E, recta ducatur F E, ſecans A B, in G. Dico B G, eſſe mediam Harmonicè proportionalem inter A B, B C. Hoc eſt, eſſe A B, primam ad tertiam B C, vt A G, exceſſum inter primam A B, ac mediam B G, ad G C, exceſſum inter mediam B G, & tertiam B C. a Quoniam enim C F, parallela eſt ipſi D E, ob rectos angulos A, C, erit ex quinti ſcholio propoſ. 4. huius lib. triangulum B C F, triangulo B A D, ſimile: hoc eſt, erit vt A B, ad A D, ita B C, ad C F; & permutando, vt A B, ad B C, ita A D, ad C F, hoc eſt, ita A E, ad C F. Rurſus ob ſimilitudinem triangulorum A E G, C F G, b erit vt A E, ad A G, ita C F, ad C G; & permutando vt A E, ad C F, ita A G, ad G C. Erat autem vt A E, ad C F, ita A B, ad B C. Igitur erit quoque A B, ad B C, prima linea ad tertiam, vt A G, exceſſus inter primam A B, & mediam B G, ad G C, exceſſum inter mediam B G, & tertiam B C. Quod eſt propoſitum.

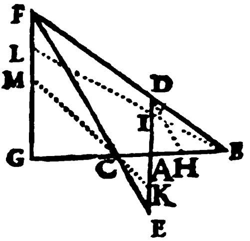
a 28. quinti.

b 4. ſexti

NON determinantur autem magnitudines rectarum A D, A E, quia vtcunque ſumantur ſiue maiores, ſiue minores, eadem media B G, inuenietur. Sint enim alia æquales A K, A L. Ducta autem recta B K, ſecet perpendicularem C F, in H, iungaturque recta L H: quam

Digitized by Google

a 27.pri alterni ſint; a erunt rectæ E C, H D, parallelæ; b ac proinde anguli
mi. interni D H C, H C F, duobus rectis æquales erunt. Cum ergo c an-
b 29.pri gulus D H C, maior ſit interno angulo B, erunt duo anguli B C F,
mi. C [illegible]F, duobus rectis minores. d Quocirca B D, E C, coibunt. Quod eſt
c 16.pri propoſitum.
mi. NON determinantur quoque hic magnitudines rectarum A D,
d 13.pro A E: quia vtcunque ſumantur ſiue maiores, ſiue minores, eadem ter-
num. tia B G, reperietur. Sint enim aliæ æquales A I, A K: Ducta autem recta B I, quæ producta ſecet perpendicularem F G, in L, ducatur K C, quam productam dico cadere in L. Si enim cadat infra, vt in M, oſtendemus eodem modo, eſſe vt G B, ad B A, ita G L, ad A I, id eſt, ad A K. Vt autem G B, ad B A, ita erat G C, ad C A. Erit igitur, vt G C, ad C A, ita G L, ad A K.



Et quia, ſi recta linea eſt K C M, ob ſimilitudinem triangulorum
e 4.ſex. G M C, A K C, e eſt vt G M, ad G C, ita K A, ad A C, erit permutando, vt G M, ad K A, ita G C, ad C A. Cum ergo oſtenſum ſit, eſſe vt G L, ad A K, ita G C, ad C A, erit quoque G M, ad A K, vt G L,
f 9. ad A K. f Æquales ſunt igitur G M, G L, pars & totum, quod eſt ab-
quinti. ſurdum. Non ergo cadet K C, infra L: eademque ratione neque ſupra cadet. Cadit ergo in L, vbi B I, producta perpendicularem F C, ſecat; ac proinde ex L, demiſſa perpendicularis L G, ad G B, cadet in G, exhibebitq; eandem tertiam G B, maiorem, Harmonicè proportionalem.

EX his perſpicuum eſt, quando duo numeri proportionem habent duplam, vel dupla maiorem, illis non poſſe adiungi tertium maiorem in proportionalitate Harmonica, vt in tractatione proportionum in 5. regula proportionalitatis Harmonicæ diximus. Quia enim oſtendimus, B A, minimam lineam eſſe maiorem exceſſu A C, quo media B C, minimam A B, ſuperat; erit A B, maior ſemiſſe ipſius B C; ac proinde B C, ad A B, media ad minimam, minorem proportionem habebit, quam duplam. Quod ſi B C, ad A B, eſſet dupla, vel maior quam dupla, eſſet A B, vel æqualis ipſi A C, vel minor. Quare vt oſtenſum eſt, non poſſet reperiri tertia maior in Harmonica proportionalitate: quia E C, cum B D, non coiret.

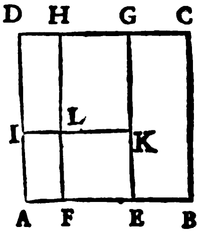
SED demonſtremus etiam cum Io. Baptiſta Benedicto, qua ratione iidem termini proportionalitatis Harmonicæ in numeris reperiantur. Hinc enim patebit ratio quarundam praxium, quas in tractatione proportionum in lib. 5. explicauimus. Vtemur autem nonnullis propoſitionibus libri 7. cum ea ex lib. 5. & 6. non pendeant, atque idcirco ante hos libros demonſtrari poſſint. Hinc igitur exordium ſumemus.

EX datis

X.

EX datis quibuſuis duobus numeris, tres numeros Harmonice proportionales, quorum extremi eandem proportionem habeant, quā dati duo numeri, reperire.

EX qualibet recta A B, deſcribatur quadratum A B C D, Sumptiſque duabus partibus æqualibus B E, E F, in latere A B, ducantur E G, F H, ipſis A D, B C, parallelæ. Item ſumpta recta A I, æquali ipſi B E, vel E F, agatur I K, ipſis A B, D C, parallela ſecans F H, in L. Erit rectangulum A G, contentum ſub A B, (id eſt, ſub ſumma rectarum A E, E B; a cum E G, ſit ipſi B C, ideoque ipſi A B, æqualis) & A E (maiore ſcilicet parte ſumma A B,) Rectangulum verò E C, continebitur ſub A B, (hoc eſt, ſub eadem ſumma rectarum A E, E B,) & E B, (minore videlicet parte eiuſdem ſumma A B) Tam deniq; rectangulum A K, quam G L, ſub partibus A E, E B, comprehendetur; propterea quod A I, ſumpta eſt ipſi E B, æqualis; & H L, L K, ipſis A E, E B, æquales. b *Cum enim F H, ipſi A D, hoc eſt, ipſi A B; & F L, ipſi A I, hoc eſt, ipſi E B, ſit æqualis: erit reliqua H L, reliquæ A E, æqualis: at* c *K L, ipſi E F, ſiue ipſi E B; æqualis eſt. Ex quo fit, duo rectangula A K, K H, ſimul continere duplum eius, quod ſub partibus A E, E B, continetur. Dico rectangulum A G; & ſummam duorum rectangulorum A K, K H; & rectangulum E C; conſtituere proportionalitatem Harmonicam: hoc eſt, vt eſt A G, primum, ad E C, tertium, ita eſſe I H, exceſſum inter primum A G, & ſecundum H L I A E G, ad A L, exceſſum inter ſecundum H L I A E G, & tertium E C, ſiue F G,* d *quod ipſi E C, æquale eſt. Nam cum H L, ipſi A E; & L F, ipſi E B, æqualis ſit, vt oſtendimus;* e *erit A E, ad E B, vt H L, ad L F. Vt autem A E, ad E B,* f *ita eſt A G, ad E C: Et vt H L, ad L F, ita eſt H I, ad A L. Igitur erit quoque A G, primum ad E C, tertium, vt H I, exceſſus inter primum ac medium, ad A L, exceſſum inter medium ac tertium. Quod eſt propoſitum.*



a 34. primi.
b 34. primi.
c 34. primi.
d 36. primi.
e 7. quinti.
f 1. ſexti.

ITAQVE ſi A E, ponatur 6 & E B, 4. erit ſumma A B, 10. quam ſi ducamus in A E, & E B, fiet A G, 60. & E C, 40. Duplum autem eius, quod fit ex A E, in E B, hoc eſt, H L I A E G, fiet 48. medium Harmonicum. Tres igitur numeri Harmonicè proportionales erunt 60. 48. 40. quorum extremi eandem proportionem habent, quam dati numeri 6. 4. Cum enim eadem ſumma 10. ex 6. & 4. collecta multiplicans vtrumque 6. 4. produxerit extremos 60. 40. g *erit 60. ad 40. vt 6. ad 4. Quod etiam patet ex figura.* h *Eſt enim A G, id eſt, 60. ad E C, id eſt, ad 40. vt A E, id eſt, 6. ad E B, id eſt, ad 4.*

g 17 ſeptimi.
h 1. ſexti.

HAC arte, ſi ſumma quorumlibet duorum numerorum datorum ducatur in vtrumque ſeorſum, gignentur extremi termini proportionalitatis Harmonicæ eandem habentes proportionem, quam dati duo numeri: Medius aũtem terminus erit numerus duplus eius, qui fit ex multiplicatione datorum duorum numerorum inter ſe.

EX his facile etiam inueniemus tres numeros Harmonicè proportionales, quorum extremi proportionem habeant datam, & medius ſit dato numero æqualis. Vt ſi extremi debeant habere proportionem quintuplam, mediuſque ſit 30. ſumendi ſunt 5. & 1. in data proportione, & eorum ſumma 6. in vtrumque ducenda, vt fiant 30 & 6. inter quos ſtatuatur medius 10. qui duplus eſt producti ex multiplicatione datorum numerorum 5. & 1. vnius in alterum: eruntq; 30. 10. 6. Harmonicè proportionales, vt dictum eſt. Deinde datus medius 30. diuidatur per medium inuentum 10. & Quotiens 3. per tres inuentos 30. 10. 6. multiplicetur. Ita enim fient tres numeri quæſiti 90. 30. 18.

ALITER.

INTER datos duos numeros 6. 4. ſtatuatur medius Arithmeticè proportionalis, 5. nimirum ſemiſſis eorum ſummæ, hoc modo, 6. 5. 4. Deinde medius 5. in extremos 6. & 4. ductus gignat 30. & 20. inter quos ſtatuatur medius 24. quem extremi inter ſe multiplicati producunt, hoc modo, 30. 24. 20. Dico hos tres eſſe Harmonicè proportionales. Quoniam enim tres numeri 60. 48. 40. qui fiunt ex ſumma 10. datorum numerorum 6. 4 in datos numeros 6. & 4. & ex 4. in 6. bis, dupli ſunt trium numerorum hic inuentorum, quòd hi producti ſint ex ſemiſſe ſummæ datorum numerorum in datos numeros, & ex 4. in 6. ſemel, vt perſpicuum eſt: erit quoque tam exceſſus inter 60. & 48. duplus exceſſus inter 30. & 24. quàm exceſſus inter 48. & 40. ipſius exceſſus inter 24. & 20. vt ad propoſ. 10. oſtendimus. Cum ergo tres numeri 60. 48. 40. ſint Harmonicè proportionales, vt in præcedenti problemate demonſtrauimus; erunt quoque eorum ſemiſſes, 30. 24. 20.

60. 48. 40.
30. 24. 20.

a 15. quinti. *a eaſdem habentes proportiones, Harmonicè proportionales: quandoquidem & exceſſus eandem proportionem habent, quam exceſſus numerorum, 60. 48. 40. quippe cum exceſſus numerorum 30. 24. 20. ſemiſſes ſint horum numerorum 60. 48. 40. exceſſuum, vt dictum eſt.*

XI.

DATIS duobus numeris, medium Harmonicè proportionalem inuenire.

SINT duo numeri dati AB, 15. & BC, 10. inter quos inueniendus ſit medius proportionalis Harmonicè. Dematur ex maiore AB, 15. numerus BD, minori BC, 10. æqualis, & reliquus numerus AD, 5. nimirum differentia datorum numerorum, ducatur in minorem

BC, 10.

C, 10. productuſque numerus 50. diuiſus per A C, 25. ſummam da-
tum numerorum, faciat Quotientem D E, 2. qui additus minori
D, 10. faciat D E, 12. Dico B E, eſſe medium proportionalem Har-
monicè inter A B,
C, hoc modo, 15. A ... E .. D .... B C
10. *Quoniam*
m numero, qui ex A D, in B C, fit, diuiſo per A C, Quotiens eſt D E;
ducetur idem numerus diuiſus ex D E, Quotiente in diuiſorem
C, vt conſtat ex defin. Diuiſionis. Quia igitur idem numerus fit ex
C, primo, in D E, quartum, qui ex B C, vel B D, ſecundo, in A D,
tium; a erit A C, primus ad B C, ſecundum, vt A D, tertius ad D E, a 19. ſe-
rtum: Et diuidendo, A B, ad B C, primus datus ad tertium da- ptimi
v, vt A E, exceſſus inter primum A B, & medium inuentum B E, vel 16.
D E, exceſſum inter medium B E, & B D, ſiue tertium B C. Sunt ſexti.
A B, B E, B C, nimirum 15. 12. 10. Harmonicè proportionales.
od eſt propoſitum.

ITAQVE ſi differentia datorum numerorum ducatur in mino-
numeruſque productus diuidatur per datorum numerorum ſum-
m, ac denique Quotiens minori adiiciatur, conſtabitur medius
minus Harmonicæ proportionalitatis.

XII.

DATIS duobus numeris, minorem extremum in
oportionalitate Harmonica inuenire.

SINT duo numeri dati A B, 15. & A C, 12: quibus inueniendus
minor Harmonicè proportionalis. Addatur B D, æqualis ipſi B C,
ceſſui inter datos nume-
Per hanc ſummã A D, A .... E .. C ... B ... D
collectam ex maiore
mero, & differentia datorum numerorum, diuidatur numerus 36.
tus ex minore dato A C, in B C, differentiam datorum numero-
m; & Quotiens C E, ex minore dato A C, detrahatur. Dico reli-
um A E, 10. eſſe terminum tertium minorem quæſitum, hoc mo-
15. 12. 10. Quoniam enim numero, qui ex A C, in B C, fit, diuiſo
A D, Quotiens eſt C E, producetur idem numerus diuiſus ex C E,
otiente in diuiſorem A D, multiplicato, vt ex Diuiſionis defin. ma-
feſtum eſt. Quia igitur idem numerus gignitur ex A D, primo, in
E, quartum, qui ex
C, ſecundo in A C, A .... E .. C ... B ... D
tium; b erit A D, b 19. ſe-
mus ad B C, ſecundum, hoc eſt, ad B D, vt A C, tertius ad C E, ptimi.
rtum. Et diuidendo, A B, ad B D, hoc eſt, ad B C, vt A E, ad vel 16.
E: Et permutando, A B, primus datus ad A E, tertium inuentum, ſexti.
B C, exceſſus inter primum A B, & medium A C, ad C E, ex-

Digitized by Google

ceſſum inter medium A C, & tertium A E. Sunt igitur tres nu AB, A C, A E, id eſt, 15. 12. 10. Harmonicè proportionales. Quod e propoſitum.

ITAQVE ſi per ſummam ex maiore numero, & ex differen datorum numerorum collectam diuidatur numerus ex mino n mero in differentiam eandem datorum numerorum procreatus, Qu tienſque ex minore dato detrahatur, reliquus fiet minor extremus proportionalitate Harmonica.

ALITER.

SINT rurſum dati duo numeri A B, 15. & A C, 12. quibus i ueniendus ſit minor in Harmonica Medietate. Maiori A B, addat B D, æqualis differentiæ B C, 3. datorum numerorum. Et per ſu mam A D, 18. d

A . . . . E . . C . . . B . . . D

uidatur numeru 180. ex multipli catione datorum numerorum A B, A C, hoc eſt, 15. 12. inter ſe pr creatus, ſitque Quotiens A E, 10. Dico A E, numerum extremum eſ in Medietate Harmonica. Quoniam enim numero, qui ex A B, in AC, gignitur, diuiſo per A D, Quotiens fit A E, producetur idem numeru diuiſus ex A E, Quotiente in diuiſorem A D, multiplicato, vt ex i ſin. Diuiſionis conſtat. Quia igitur idem numerus fit ex A D, prim a19. ſep. vel 16. ſexti. *in A E, quartum, qui ex A B, ſecundo in A C, tertium; a erit AD, pr mus ad A B, ſecundum, vt A C, tertius ad A E, quartum; ac prop cum A D, maior ſit, quam A B, erit quoque A C, maior quam AE. Quare erit & diuidendo B D, id eſt, B C, ad A B, vt C E, ad A E: & conuertendo A B, ad B C, vt A E, ad C E; Et permutando A B, pr mus ad A E, tertium inuentum, vt B C, exceſſus inter primum AB, & medium A C, ad C E, exceſſum inter medium A C, & tertium A E. Sunt igitur tres numeri A B, A C, A E, hoc eſt, 15. 12. 10. Har monicè proportionales. Quod eſt propoſitum.*

ITAQVE ſi per ſummam ex maiore numero, & ex differen datorum numerorum collectam diuidatur numerus ex multiplica ne datorum numerorum inter ſe procreatus, erit Quotiens minor minus extremus Harmonicæ Medietatis.

XIII.

DATIS duobus numeris, maiorem extremum Harmonica proportionalitate inuenire.

SINT dati duo numeri A B, 10. & A C, 12. quibus inueni ſit tertius maior in Medietate Harmonica. Ex minore A B, detra tur B D, æqualis differentiæ B C, 2. datorum numerorum. Et per r quum numerum A D, 8. diuidatur numerus 24. factus ex m numero A C, 12 in differentiam datorum numerorum B C, 2. vel

Digitized by Google

Quotiens autem CE, 3. maiori numero AC, 12. adiiciatur. Dico
ſummam AE, 15. eſſe terminum maiorem in proportionalitate, ſiue
Medietate Harmonica, hoc eſt, tres numeros AE, AC, AB, nimirum
15. 12. 10. eſſe Harmonicè pro-
portionales. Quoniam enim
numero, qui ex AC, in BD,

A .... D .. B .. C ... E

fit diuiſo per AD, Quotiens fit CE, producetur idem numerus diuiſus
ex CE, Quotiente in diuiſorem AD, multiplicato. Quia igitur idem
numerus gignitur ex AC, primo in BD, quartum, qui ex CE, ſecundo
in AD, tertium, a erit AC, primus ad CE, ſecundum, vt AD, ter- a 19. ſep.
tius ad BD, quartum: Et componendo AE, ad CE, vt AB, ad BD, Vel 16.
hoc eſt, ad BC: Et permutando AE, primus ad AB, tertium, vt CE, ſexti.
exceſſus inter primum AE, & medium AC, ad exceſſum BC, inter
medium AC, & tertium AB. Sunt ergo tres numeri AE, AC, AB,
nimirum 15. 12. 10. Harmonicè proportionales. Quod eſt propoſitum.

ITAQVE datis duobus numeris, ſi eorum differentia ex minore
auferatur, & per reliquum numerum diuidatur numerus ex maiore
numero in differentiam datorum numerorum procreatus, Quotienſq;
maiori numero adiiciatur, conflabitur maior terminus extremus Me-
dietatis Harmonicæ.

ALITER.

SINT rurſum duo dati numeri AB, 10. & AC, 12. quibus in-
ueniendus ſit maior in Harmonica Medietate. Ex minore AB, de-
trahatur BD, æqualis exceſſui BC, datorum numerorum: Et per reli-
quum numerum AD, 8. diuidatur numerus 120. factus ex multipli-
catione datorum numerorum AB, 10. & AC, 12. procreatus, Quo-
tienſque ſit AE, 15. Dico AE, eſſe terminum maiorem in proportio-
nalitate Harmonica. Quoniam
enim numero, qui fit ex AB, in
AC, diuiſo per AD, Quotiens

A .... D .. B .. C ... E

eſt AE, producetur idem numerus diuiſus ex AE, Quotiente in diui-
ſorem AD, ex defin. Diuiſionis. Quia igitur idem numerus gignitur
ex AB, primo in AC, quartum, qui ex AD, ſecundo in AE, tertium;
b erit AB, primus ad AD, ſecundum, vt AE, tertius ad AC, quar- b 19. ſep.
tum; ac proinde cum AB, maior ſit quam AD, erit & AE, maior Vel 16.
quam AC. Et cum ſit, vt AE, ad AC, ita AB, ad AD, erit per con- ſexti.
uerſionem rationis AE, ad CE, vt AB, ad BD, hoc eſt, ad BC: Et
permutando AE, primus inuentus ad AB, tertium, vt CE, exceſſus
inter primum AE, & medium AC, ad BC, exceſſum inter medium
AC, & tertium AB. Igitur tres numeri AE, 15. AC, 12. AB, 10.
Harmonicè proportionales ſunt. Quod eſt propoſitum.

ITAQVE datis duobus numeris, ſi eorum differentia ex minore
auferatur, & per reliquum numerum diuidatur numerus ex multi-

Digitized by Google

plicatione duorum numerorum inter ſe genitus, dabit Quotiens maiorem terminum extremum Medietatis Harmonicæ.

POSTREMO libet quoque ex Pappo praxes illas demonſtrare, quibus ad finem tractationis proportionum ex æqualitatis proportione omnes proportiones rationales, & viciſſim ex inæqualitatis proportione qualibet æqualitatem, ac deniq; ex quauis proportionalitate Geometrica & Geometricam, & Arithmeticam, & Harmonicam erui docuimus. Sic ergo ex proportionalitate Geometrica tam æqualium terminorum, quam inæqualium, gignitur proportionalitas alia Geometrica inæqualium terminorum.

XIV.

PROPOSITIS tribus terminis Geometricè proportionalibus ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus: Summa ex primo ſemel, ſecundo bis, & tertio ſemel collecta: ac ſumma conflata ex ſecundo & tertio ſemel: ac tertius ſemel, ſunt Geometricè proportionales.

SINT tres termini continuè proportionales Geometricè, A, B, C: ſitque D, ſumma ex A, ſemel, & B, bis, & C, ſemel collecta: At E, ſumma ex B, & C, ſemel conflata, ac denique F, ipſi C, æqualis. Dico

A, 1.	B, 1,	C, 1.	A, 12.	B, 6.	C, 3.
D, 4.	E, 2.	F, 1.	D, 27.	E, 6.	F, 3.

D, E, F, Geometricè quoque proportionales eſſe. Cum enim ſit A, ad B, vt B, ad C; erit quoque componendo A, B, ſimul ad B, vt B C, ſimul ad C. a *Igitur omnes antecedentes ſimul, nimirum A, B, & B, C, ad omnes conſequentes ſimul, nimirum ad B, C, vt vna antecedens, hoc eſt, B, C, ad vnam conſequentem C. Eſt autem D, æqualis ipſis A, B, & B, C: Et E, ipſis B, C: ac denique F, ipſi C. Igitur erit quoque D, ad E, vt E, ad F: ac proinde D, E, F, Geometricè ſunt proportionales. Quod eſt propoſitum.*

a 12. quinti.

A.	B.	C.
1.	1.	1.
D.	E.	F.
4.	2.	1.

HINC manifeſtum eſt, ſi termini A, B, C, ſint æquales; D, E, F, eſſe duplos, Nam B, C, ſimul dupli erunt ipſius C; ac propterea & E, ipſius F: quod E, ipſis B, C; & F, ipſi C, ſit æqualis. Cum ergo D, E, F, ſint continuè proportionales, ipſi erunt in dupla proportione. Quod ſi termini æquales A, B, C, ſint vnitates, generabitur dupla proportionalitas D, E, F, in minimis terminis 4. 2. 1. propterea quòd F, æqualis eſt ipſi C, hoc eſt, vnitati.

SI vni

SI verò A, B, C, ſint dupli, erunt geniti D, E, F, tripli. Nam ſi B, ipſius C, duplus eſt; erit ſumma ex B, C, collecta, id eſt, E, ipſius C, hoc eſt, ipſius F, triplus: ac proinde D, E, F, continuam proportionem triplã habebunt. Atq; eodem modo ex triplis orientur quadrupli, ex quadruplis quintupli, & ſic in infinitũ.

A.	B.	C.
4.	2.	1.
D.	E.	F.
9.	3.	1.

AT ſi termini A, B, C, ſint dupli inuerſo ordine, erunt D, E, F, geniti, ſeſquialteri. Nam cum B, ſit ſemiſſis ipſius C; erit ſumma ex B, C, collecta, hoc eſt, E, ipſius C, ſiue ipſius F, ſeſquialtera. Eodem modo, ſi A, B, C, ſint conuerſo ordine tripli, erunt procreati D, E, F, ſeſquitertij. Nam B, erit ipſius C, tertia pars. Igitur ſumma ex B, C, conflata, id eſt, E, continebit C, ſiue F, ſemel, & inſuper eius partem tertiam: ac propterea D, E, F, habebunt continuam proportionem ſeſquitertiam. Pari ratione ex quadruplis inuerſis naſcentur ſeſquiquarti, & ex inuerſis quintuplis ſeſquiquinti, atque ita in infinitum. Non aliter monſtrabimus, aliarum proportionum generationes ex aliis proportionibus rectè eſſe praſcriptas in tractatione proportionum. Item rectè quamcunque proportionem inæqualitatis ad æqualitatem reuocari: quippe cum in ea reductione retexamus quodammodo operationem, qua inæqualitatis proportionem ex æqualitate gigni tradidimus.

A.	B.	C.
1.	2.	4.
D.	E.	F.
9.	6.	4.

A.	B.	C.
1.	3.	9.
D.	E.	F.
16.	12.	9.

XV.

PROPOSITIS tribus terminis ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, Geometricè proportionalibus; Summa ex primo bis, ſecundo bis, & tertio ſemel collecta: ac ſumma ex primo, ſecundo, & tertio ſemel conflata: ac deniq; tertius ſemel, ſunt Arithmeticè proportionales.

SINT tres termini Geometricè proportionales A, B, C: ſitque D, ſumma collecta ex A, bis, ex B, bis, & ex C, ſemel: At E, ſumma con-

A, 1.	B, 1.	C, 1.	A, 12.	B, 6.	C, 3.
D, 5.	E, 3.	F, 1.	D, 39.	E, 21.	F, 3.

flata ex A, B, C, ſemel: Ac denique F, ipſi C, æqualis. Dico D, E, F, eſſe Arithmeticè proportionales. Quoniam enim ſumma ex A, bis, & B, bis, & C, ſemel, hoc eſt, terminus D, ſuperat ſummam ex A, B, C, ſemel, hoc eſt, terminum E, aggregato ex A, B, ſemel collecto. Item ſumma ex A, B, C, hoc eſt, terminus E, ſuperat terminũ C, ſiue F, eodem aggregato ex A, B, ſemel collecto; erit idem exceſſus inter D, & E, qui inter E, & F; ac propterea D, E, F,

A.	B.	C.
3.	20.	1.
D.	E.	F.
47.	24.	1.

Arithmeticam proportionalitatem, ſiue Medietatem conſtituent. Quod eſt propoſitum.

EADEM prorſus ratione oritur proportionalitas Arithmetica ex tribus terminis quibuſcunque, etiamſi non ſint proportionales: vt in hoc exemplo perſpicuum eſt.

XVI.

PROPOSITIS tribus terminis ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, Geometricè proportionalibus; Summa collecta ex primo bis, ex ſecundo ter, & tertio ſemel: ac ſumma conflata ex ſecundo bis, & tertio ſemel: & denique ſumma ex ſecundo ſemel, & tertio ſemel coaceruata, Harmonicè proportionales ſunt.

SINT tres termini Geometrice proportionales A, B, C: ſitque D, ſumma collecta ex A, bis, ex B, ter, & ex C, ſemel: At E, ſumma ex B, bis, & C, ſemel conflata: Ac denique F, ſumma ex B, ſemel, & C, ſemel collecta. Dico D, E, F, conſtituere proportionalitatem, ſiue Me-

A, 1.	B, 1.	C, 1.	A, 12.	B, 6.	C, 3.
D, 6.	E, 3.	F, 2.	D, 45.	E, 15.	F, 9.

dietatem Harmonicam. Quoniam enim eſt, vt A, ad B, ita B, ad C; erunt ex ſcholio propoſ. 22. lib. 5. vt A, bis, ad B, ita B. bis, ad C. Igitur componendo, vt A, bis, & B. ſemel, ad B, ita B, bis, & C, ſemel ad C.
a 12. quinti. *a Igitur vt omnes antecedentes ſimul, nimirum A, bis, & B, ter, & C, ſemel, hoc eſt, terminus D, ad omnes conſequentes ſimul, nimirum ad ſummam ex B, C, id eſt, ad F, ita vnum antecedens, nimirum A, bis, & B, ſemel ad B. Eſt autem A, bis, & B, ſemel exceſſus, quo A, bis, & B, ter, & C, ſemel, ſuperant B, bis, & C, ſemel, hoc eſt, exceſſus inter D, primum terminum, & medium E: At B, exceſſus, quo B, bis, & C, ſemel, ſuperant ſummam ex B, C, hoc eſt, exceſſus inter E, medium, & F, tertium. Igitur erit vt D, primus ad F, tertium, ita exceſſus inter primum & medium, ad exceſſum inter medium ac tertium; ideoque D, E, F, Harmonicè proportionales erunt. Quod eſt propoſitum.*

SEMPER autem minimi termini procreantur D, E, F, quando dati termini A, B, C, ſunt vnitates; vt in exemplis prolatis manife-

A, 9.	B, 6.	C, 4.	A, 1.	B, 4.	C, 16.	A, 9.	B, 12.	C, 16.
D, 40.	E, 16.	F, 10.	D, 30.	E, 24.	F, 20.	D, 70.	E, 40.	F, 28.

ſtum eſt. Quando autem A, B, C, non ſunt vnitates, etiamſi in ſua proportione minimi ſint, non ſemper creantur minimi termini D, E, F.

Id quod

Digitized by Google

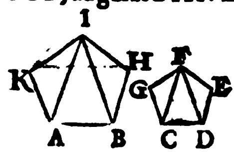
Id quod liquidò conſtat in his exemplis. In primo enim exemplo, ex minimis terminis proportionis ſeſquialteræ, & in ſecundo ex minimis terminis ſubquadruplæ proportionis, & in tertio ex minimis terminis ſubſeſquitertiæ proportionis, gignuntur tres in proportionalitate Harmonica non minimi. Quod ſi termini inuertantur, tum demum, (quod mirum eſt) minimi termini Medietatis Harmonicæ procreabuntur, vt hæc exempla demonſtrant.

A, 4. *B*, 6. *C*, 9.	*A*, 16. *B*, 4. *G*, 1.	*A*, 16. *B*, 12. *C*, 9.
D, 35. *E*, 21. *F*, 15.	*D*, 45. *E*, 9. *F*, 5.	*D*, 77. *E*, 33. *F*, 21.

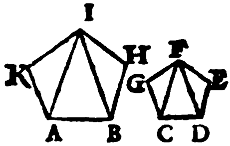
PROBL. 6. PROPOS. 18. xix.

A DATA recta linea dato rectilineo ſimile, ſimiliterq; poſitum rectilineum deſcribere.

SIT data recta A B, ſuper quam deſcribendum ſit rectilineum rectilineo C D E F G, ſimile ſimiliterque poſitum. Ducantur ex quolibet angulo, vt ex F, ad ſingulos angulos oppoſitos rectæ lineæ, quæ rectilineum reſoluant in triangula C D F, D E F, F G C. Deinde angulo D C F, æqualis fiat angulus B A I; & angulo C D F, angulus A B I, coeantq; rectæ A I, B I, in puncto I; (coibunt enim omnino, propterea quòd duo anguli I A B, I B A, duobus rectis minores ſint, cùm æquales ſint duobus angulis F C D, F D C, *a* qui duobus rectis ſunt minores.) *b* eritque reliquo angulo C F D, reliquus angulus A I B, æqualis; totumque triangulum A I B, toti triangulo C F D, æquiangulum. Rurſus angulo F D E, æqualis fiat angulus I B H; & angulo D F E, angulus B I H: Et *c* quia duo anguli E D F, E F D, minores ſunt duobus rectis; erunt quoq; duo anguli H B I, H I B, duobus rectis minores; ac proinde rectæ B H, I H, coibunt. Coeant ergo in puncto H, eritq; eadem ratione triangulum B H I, triangulo D E F, æquiangulum. Præterea angulo C F G, fiat æqualis angulus A I K; & angulo F C G, angulus I A K: *d* Et quia duo anguli G C F, G F C, minores ſunt duobus rectis: erunt & duo anguli K A I, K I A, duobus rectis minores; atque idcirco rectæ A K, I K, conuenient in aliquo puncto. Conueniant ergo in K: eritque triangulum quoque A K I, triangulo C G F, æquiangulum. Atque ita procedatur, donec abſoluantur omnia triangula rectilinei propoſiti, ſi plura extiterint. Dico igitur, rectilineum A B H I K, rectilineo C D E F G, ſimile eſſe, ſimiliterque poſitum. Cùm enim angulus I A B, conſtitutus ſit æqualis angulo



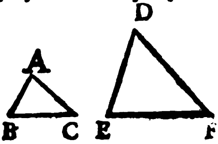
a 17. primi.
b 32. primi.
c 17. primi.
d 17. primi.



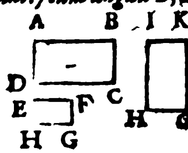
FCD; & angulus I A K, angulo FCG, erit totus angulus B A K, toti angulo D C G, æqualis: Eademque ratione angulus A B H, angulo C D E, æqualis erit; & reliqui reliquis, vt conſtat ex conſtructione; cùm ſingulæ partes vnius ſingulis partibus alterius factæ ſint æquales. Quam æquiangulum erit rectilineum A B H I K, rectilineo C D E F G.
a 4. ſexti. Quoniam verò *a* ita eſt A B, ad B I, vt C D, ad D F: & ita B I, ad
B H, vt D F, ad D E: *b* erit ex æquo ita A B, ad B H, vt C D, ad
b 22. quinti. D E. Quare latera circa æquales angulos A B H, C D E, propor-
tionalia ſunt. *c* quemadmodũ & latera circa æquales angulos H,
c 4. ſexti. & E, proportionalia ſunt, ob triangula æquiangula B H I, D E F.
d Rurſus ita eſt H I, ad I B, vt E F, ad F D: & ita I B, ad I A, vt F D,
d 4. ſexti. ad F C: & ita I A, ad I K, vt F C, ad F G. *e* Igitur ex æquo erit ita
H I, ad I K, vt E F, ad F G, & ideo latera quoq; circa æquales an-
e 22. quinti. gulos H I K, E F G, proportionalia erunt, & ſic de cæteris. Quam-
obrem rectilinea, cùm ſint æquiangula, habeantq; latera circa æ-
quales angulos proportionalia, ſimilia ſunt, ſimiliterq; deſcripta.
A data ergo recta linea, dato rectilineo ſimile ſimiliterq; poſitum rectilineum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

DICVNTVR autem rectilinea ſuper lineas rectas deſcripta eſſe ſimilia & ſimiliter poſita, quando anguli æquales conſtituuntur ſuper ipſas rectas lineas, & tam reliqui æquales anguli, quàm latera proportionalia ſemper ordine ſeſe conſequuntur. Vt triangula A B C, D E F, non ſolùm erunt ſimilia, ſed etiã ſuper rectas B C, E F, ſimiliterq; deſcripta, ſi anguli B, C, æquales fuerint angulis E, F; & ita ſit A B, ad B C, vt D E, ad E F, &c.



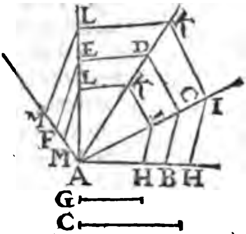
At ſupra rectas B C, D E, non dicentur ſimiliter eſſe deſcripta, (quanquam ſimilia ſint.) cùm anguli B, C, nõ ſint æquales angulis D, E. Similiter rectangula A C, E G, ſimilia, dicentur ſimiliter eſſe deſcripta ſuper rectas D C, H G, quoniam vt A D, ad D C, ita eſt E H, ad H G, &c. At verò rectangula A C, I G, non dicentur ſimiliter deſcripta ſuper rectas D C, H G, quamuis ſint ſimilia, vt manifeſtũ eſt. Eadem tamen ſimiliter erũt deſcripta ſuper rectas D C, I H, vel ſuper rectas A D, H G.



CÆTERVM omnes figuræ ſecundum conſtructionem huius problematis deſcriptæ, ſunt neceſſariò ſimiliter poſitæ, vt patet in rectilineis A B H I K, C D E F G. ſuper lineas A B, & CD, deſcriptis. Item omnes æquilateræ figuræ. & æquiangulæ, ſunt quoq; poſitæ ſimiliter ſuper quaslibet earum latera.

FOR-

FORTASSIS autem expeditius Problema propoſitũ conficiemus ad hunc modum. Sit dato rectilineo A B C D E F, ſuper datam rectã G, vel aliam ei æqualem, deſcribendum ſimile rectilineum, ſimiliterq; poſitum. Productis duobus lateribus A B, A F, circa angulum A, educantur ex A, per omnes alios angulos rectæ A C A D, A E, quantumlibet. Deinde ex A B, abſcindatur A H, æqualis datæ rectæ G, vel certè ex ipſa A B, vlterius producta, ſi fortè G, fuerit maior, quàm A B. Poſthac per H, agatur recta H I, lateri B C, parallela, & per I, recta I K, lateri C D, parallela, & ſic deinceps, donec omnia latera ſuas habeant parallelas, demptis duobus lateribus productis A B, A F, factumq; erit, quod proponitur: hoc eſt, figura A H I K L M; ſuper rectam A H, datæ rectæ G, æqualem, ſimilis erit. ſimiliterq; poſita figuræ propoſitæ A B C D E F, ſuper rectam A B, conſtitutæ. Cùm enim angulus H A M, ſit cõmunis; & angulis A B C, A F E, a æquales ſint anguli A H I, A M L; Item angulis A C B, A C D, æquales ſint anguli A I H, A I K, hoc eſt, toti angulo B C D, æqualis ſit angulus totus H I K; Eodemq; modo angulis C D E, D E F, æquales ſint anguli I K L, K L M: Aequiangula erunt rectilinea A B C D E F, A H I K L M. Sed & latera circum æquales angulos habent proportionalia. Cùm enim triangula A H I, A I K, A K L, A L M, ſimilia ſint per coroll propoſ 4. huius lib. triangulis A B C, A C D, A D E, A E F; Erit, b vt A B, ad B C, ita A H, ad H I. Rurſus, vt B C, ad C A, ita H I, ad I A. Et vt C A, ad C D, ita I A, ad I K: ac proinde ex æquo, vt B C, ad C D, ita H I, ad I K, &c. Igitur ex defin. ſimilia ſunt rectilinea A B C D E F, A H I K L M, atq; adeò ſimiliter poſita, per ea, quæ proximè hoc ſcholio ſcripſimus.



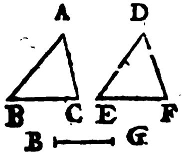
a 29. primi.

b 4. ſexti.

THEOR. 13. PROPOS. 19. xvij.

SIMILIA triangula inter ſe ſunt in duplicata ratione laterum homologorum.

SINT triangula ſimilia A B C, D E F, habentia angulos æquales B, & E: Item C, & F, &c. Et ſit vt A B, ad B C, ita D E, ad E F, &c. Dico triangula inter ſe rationem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa B C, & E F, vel A B, & D E, vel A C, & D F: Hoc eſt, ſi homologis lateribus B C, E F, inueniatur tertia proportionalis B G: ita eſſe triangulum A B C, ad triangulum D E F, vt rectam B C, ad rectã B G: ac proinde cùm ex defin. 10. lib. 5. proportio B C, ad B G, dicatur duplicata proportionis B C, ad E F: proportionem



ceſſum inter medium A C, & tertium A E. Sunt igitur tres numeri A B, A C, A E, id eſt, 15. 12. 10. Harmonicè proportionales. Quod eſt propoſitum.

ITAQVE ſi per ſummam ex maiore numero, & ex differentia datorum numerorum collectam diuidatur numerus ex minore numero in differentiam eandem datorum numerorum procreatus, Quotiensque ex minore dato detrahatur, reliquus fiet minor extremus in proportionalitate Harmonica.

ALITER.

SINT rurſum dati duo numeri A B, 15. & A C, 12. quibus inueniendus ſit maior in Harmonica Medietate. Maiori A B, addatur B D, æqualis differentia B C, 3. datorum numerorum. Et per ſummam A D, 18. diuidatur numerus 180. ex multiplicatione datorum numerorum A B, A C, hoc eſt, 15. 12. inter ſe procreatus, ſitque Quotiens A E, 10. Dico A E, minorem extremum eſſe in Medietate Harmonica. Quoniam enim numero, qui ex A B, in A C, gignitur, diuiſo per A D, Quotiens fit A E, producetur idem numerus diuiſus ex A E, Quotiente in diuiſorem A D, multiplicato, vt ex diuiſion. Diuiſionis conſtat. Quia igitur idem numerus fit ex A D, primo in A E, quartum, qui ex A B, ſecundo in A C, tertium; a erit A D, primus ad A B, ſecundum, vt A C, tertius ad A E, quartum; ac proinde cum A D, maior ſit, quam A B, erit quoque A C, maior quam A E. Quare erit & diuidendo B D, id eſt, B C, ad A B, vt C E, ad A E: & conuertendo A B, ad B C, vt A E, ad C E; Et permutando A B, primus ad A E, tertium inuentum, vt B C, exceſſus inter primum A B, & medium A C, ad C E, exceſſum inter medium A C, & tertium A E. Sunt igitur tres numeri A B, A C, A E, hoc eſt, 15. 12. 10. Harmonicè proportionales. Quod eſt propoſitum.

A . . . . E . . C . . . B . . . D

a 19. ſep. vel 16. ſexti.

ITAQVE ſi per ſummam ex maiore numero, & ex differentia datorum numerorum collectam diuidatur numerus ex multiplicatione datorum numerorum inter ſe procreatus, erit Quotiens minor terminus extremus Harmonicæ Medietatis.

XIII.

DATIS duobus numeris, maiorem extremum in Harmonica proportionalitate inuenire.

SINT dati duo numeri A B, 10. & A C, 12. quibus inueniendus ſit tertius maior in Medietate Harmonica. Ex minore A B, detrahatur B D, æqualis differentiæ B C, 2. datorum numerorum. Et per reliquum numerum A D, 8. diuidatur numerus 24. factus ex maiore numero A C, 12 in differentiam datorum numerorum B C, 2. vel B D.

Quo-

*Quotiens autem C E, 3. maiori numero A C, 12. adiiciatur. Dico
ſummam A E, 15. eſſe terminum maiorem in proportionalitate, ſiue
Medietate Harmonica, hoc eſt, tres numeros A E, A C, A B, nimirum
15. 12. 10. eſſe Harmonicè proportionales. Quoniam enim*

A . . . . D . . B . . C . . . E

*numero, qui ex A C, in B D,
ſit diuiſo per A D, Quotiens ſit C E, producetur idem numerus diuiſus
ex C E, Quotiente in diuiſorem A D, multiplicato. Quia igitur idem
numerus gignitur ex A C, primo in B D, quartum, qui ex C E, ſecundo
in A D, tertium, a erit A C, primus ad C E, ſecundum, vt A D, ter-* a 19. ſep.
tius ad B D, quartum: Et componendo A E, ad C E, vt A B, ad B D, vel 16.
hoc eſt, ad B C: Et permutando A E, primus ad A B, tertium, vt C E, ſexti.
*exceſſus inter primum A E, & medium A C, ad exceſſum B C, inter
medium A C, & tertium A B. Sunt ergo tres numeri A E, A C, A B,
nimirum 15. 12. 10. Harmonicè proportionales. Quod eſt propoſitum.*

ITAQVE datis duobus numeris, ſi eorum differentia ex minore auferatur, & per reliquum numerum diuidatur numerus ex maiore numero in differentiam datorum numerorum procreatus, Quotienſque maiori numero adiiciatur, conflabitur maior terminus extremus Medietatis Harmonicæ.

ALITER.

SINT rurſum duo dati numeri A B, 10. & A C, 12. quibus inueniendus ſit maior in Harmonica Medietate. Ex minore A B, dematur B D, æqualis exceſſui B C, datorum numerorum: Et per reliquum numerum A D, 8. diuidatur numerus 120. factus ex multiplicatione datorum numerorum A B, 10. & A C, 12. procreatus, Quotienſque ſit A E, 15. Dico A E, eſſe terminum maiorem in proportionalitate Harmonica. Quoniam enim numero, qui ſit ex A B, in A C, diuiſo per A D, Quotiens

A . . . . D . . B . . C . . . E

*eſt A E, producetur idem numerus diuiſus ex A E, Quotiente in diuiſorem A D, ex defin. Diuiſionis. Quia igitur idem numerus gignitur
ex A B, primo in A C, quartum, qui ex A D, ſecundo in A E, tertium,
b erit A B, primus ad A D, ſecundum, vt A E, tertius ad A C, quar-* b 19. ſep.
tum; ac proinde cum A B, maior ſit quam A D, erit & A E, maior vel 16.
quam A C. Et cum ſit, vt A E, ad A C, ita A B, ad A D, erit per con- ſexti.
*uerſionem rationis A E, ad C E, vt A B, ad B D, hoc eſt, ad B C: Et
permutando A E, primus inuentus ad A B, tertium, vt C E, exceſſus
inter primum A E, & medium A C, ad B C, exceſſum inter medium
A C, & tertium A B. Igitur tres numeri A E, 15. A C, 12. A B, 10.
Harmonice proportionales ſunt. Quod eſt propoſitum.*

ITAQVE datis duobus numeris, ſi eorum differentia ex minore auferatur, & per reliquum numerum diuidatur numerus ex multi-

Digitized by Google

plicatione duorum numerorum inter ſe genitus, dabit Quotiens maiorem terminum extremum Medietatis Harmonicæ.

POSTREMO libet quoque ex Pappo praxes illas demonſtrare, quibus ad finem tractationis proportionum ex æqualitatis proportione omnes proportiones rationales, & viciſſim ex inæqualitatis proportione qualibet æqualitatem, ac deniq; ex quauis proportionalitate Geometricâ & Geometricam, & Arithmeticam, & Harmonicam eruí docuimus. Sic ergo ex proportionalitate Geometrica tam æqualium terminorum, quam inæqualium, gignitur proportionalitas alia Geometrica inæqualium terminorum.

XIV.

PROPOSITIS tribus terminis Geometricè proportionalibus ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus: Summa ex primo ſemel, ſecundo bis, & tertio ſemel collecta: ac ſumma conflata ex ſecundo & tertio ſemel: ac tertius ſemel, ſunt Geometricè proportionales.

SINT tres termini continuè proportionales Geometricè, A, B, C: ſitque D, ſumma ex A, ſemel, & B, bis, & C, ſemel collecta: At E, ſumma ex B, & C, ſemel conflata, ac denique F, ipſi C, æqualis. Dico

A, 1.	B, 1.	C, 1.	A, 12.	B, 6.	C, 3.
D, 4.	E, 2.	F, 1.	D, 27.	E, 6.	F, 3.

D, E, F, Geometricè quoque proportionales eſſe. Cum enim ſit A, ad B, vt B, ad C; erit quoque componendo A, B, ſimul ad B, vt B C, ſimul ad C. a 12. quinti. *a Igitur omnes antecedentes ſimul, nimirum A, B, & B, C, ad omnes conſequentes ſimul, nimirum ad B, C, vt vna antecedens, hoc eſt, B, C, ad vnam conſequentem C. Eſt autem D, æqualis ipſis A, B, & B, C: Et E, ipſis B, C: ac denique F, ipſi C. Igitur erit quoque D, ad E, vt E, ad F: ac proinde D, E, F, Geometricè ſunt proportionales. Quod eſt propoſitum.*

A.	B.	C.
1.	1.	1.
D.	E.	F.
4.	2.	1.

HINC manifeſtum eſt, ſi termini A, B, C, ſint æquales; D, E, F, eſſe duplos. Nam B, C, ſimul dupli erunt ipſius C; ac propterea & E, ipſius F: quod E, ipſis B, C; & F, ipſi C, ſit æqualis. Cum ergo D, E, F, ſint continuè proportionales, ipſi erunt in dupla proportione. Quod ſi termini æquales A, B, C, ſint vnitates, generabitur dupla proportionalitas D, E, F, in minimis terminis 4. 2. 1. propterea quòd F, æqualis eſt ipſi C, hoc eſt, vnitati.

SI Vni

SI verò A, B, C, ſint dupli, erunt geniti D, E, F, tripli. Nam ſi B, ipſius C, duplus eſt; erit ſumma ex B, C, collecta, id eſt, E, ipſius C, hoc eſt, ipſius F, triplus: ac proinde D, E, F, continuam proportionem triplã habebunt. Atq; eodem modo ex triplis orientur quadrupli, ex quadruplis quintupli, & ſic in infinitũ.

A.	B.	C.
4.	2.	1.
D.	E.	F.
9.	3.	1.

AT ſi termini A, B, C, ſint dupli inuerſo ordine, erunt D, E, F, geniti, ſeſquialteri. Nam cum B, ſit ſemiſſis ipſius C; erit ſumma ex B, C, collecta, hoc eſt, E, ipſius C, ſiue ipſius F, ſeſquialtera. Eodem modo, ſi A, B, C, ſint conuerſo ordine tripli, erunt procreati D, E, F, ſeſquitertij. Nam B, erit ipſius C, tertia pars. Igitur ſumma ex B, C, conflata, id eſt, E, continebit C, ſiue F, ſemel, & inſuper eius partem tertiam: ac propterea D, E, F, habebunt continuam proportionem ſeſquitertiam. Pari ratione ex quadruplis inuerſis naſcentur ſeſquiquarti, & ex inuerſis quintuplis ſeſquiquinti, atque ita in infinitum. Non aliter monſtrabimus, aliarum proportionum generationes ex aliis proportionibus rectè eſſe præſcriptas in tractatione proportionum. Item rectè quamcunque proportionem inæqualitatis ad æqualitatem reuocari: quippe cum in ea reductione retexamus quodammodo operationem, qua inæqualitatis proportionem ex æqualitate gigni tradidimus.

A.	B.	C.
1.	2.	4.
D.	E.	F.
9.	6.	4.

A.	B.	C.
1.	3.	9.
D.	E.	F.
16.	12.	9.

XV.

PROPOSITIS tribus terminis ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, Geometricè proportionalibus; Summa ex primo bis, ſecundo bis, & tertio ſemel collecta: ac ſumma ex primo, ſecundo, & tertio ſemel conflata: ac deniq; tertius ſemel, ſunt Arithmeticè proportionales.

SINT tres termini Geometricè proportionales A, B, C: ſitque D, ſumma collecta ex A, bis, ex B, bis, & ex C, ſemel: At E, ſumma con-

A, 1.	B, 1.	C, 1.	A, 12.	B, 6.	C, 3.
D, 5.	E, 3.	F, 1.	D, 39.	E, 21.	F, 3.

flata ex A, B, C, ſemel: Ac denique F, ipſi C, æqualis. Dico D, E, F, eſſe Arithmeticè proportionales. Quoniam enim ſumma ex A, bis, & B, bis, & C, ſemel, hoc eſt, terminus D, ſuperat ſummam ex A, B, C, ſemel, hoc eſt, terminum E, aggregato ex A, B, ſemel collecto. Item ſumma ex A, B, C, hoc eſt, terminus E, ſuperat terminũ C, ſiue F, eodem aggregato ex A, B, ſemel collecto; erit idem exceſſus inter D, & E, qui inter E, & F; ac propterea D, E, F,

A.	B.	C.
3.	20.	1.
D.	E.	F.
47.	24.	1.

Arithmeticam proportionalitatem, ſiue Medietatem conſtituent. Quod eſt propoſitum.

EADEM prorſus ratione orietur proportionalitas Arithmetica ex tribus terminis quibuſcunque, etiamſi non ſint proportionales: vt in hoc exemplo perſpicuum eſt.

XVI.

PROPOSITIS tribus terminis ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, Geometricè proportionalibus; Summa collecta ex primo bis, ex ſecundo ter, & tertio ſemel: ac ſumma conflata ex ſecundo bis, & tertio ſemel: & denique ſumma ex ſecundo ſemel, & tertio ſemel coaceruata, Harmonicè proportionales ſunt.

SINT tres termini Geometrice proportionales A, B, C: ſitque D, ſumma collecta ex A, bis, ex B, ter, & ex C, ſemel: At E, ſumma ex B, bis, & C, ſemel conflata: Ac denique F, ſumma ex B, ſemel, & C, ſemel collecta. Dico D, E, F, conſtituere proportionalitatem, ſiue Me-

A, 1.	B, 1.	C, 1.	A, 12.	B, 6.	C, 3.
D, 6.	E, 3.	F, 2.	D, 45.	E, 15.	F, 9.

dietatem Harmonicam. Quoniam enim eſt, vt A, ad B, ita B, ad C; erunt ex ſcholio propoſ. 22. lib. 5. vt A, bis, ad B, ita B. bis, ad C. Igitur componendo, vt A, bis, & B. ſemel, ad B, ita B, bis, & C. ſemel ad C.
a 12. quinti. *a Igitur vt omnes antecedentes ſimul, nimirum A, bis, & B, ter, & C, ſemel, hoc eſt, terminus D, ad omnes conſequentes ſimul, nimirum ad ſummam ex B, C, id eſt, ad F, ita vnum antecedens, nimirum A, bis, & B, ſemel ad B. Eſt autem A, bis, & B, ſemel exceſſus, quo A, bis, & B, ter, & C, ſemel, ſuperant B, bis, & C, ſemel, hoc eſt, exceſſus inter D, primum terminum, & medium E: At B, exceſſus, quo B, bis, & C, ſemel, ſuperant ſummam ex B, C, hoc eſt, exceſſus inter E, medium, & F, tertium. Igitur erit vt D, primus ad F, tertium, ita exceſſus inter primum & medium, ad exceſſum inter medium ac tertium; ideoque D, E, F, Harmonicè proportionales erunt. Quod eſt propoſitum.*

SEMPER autem minimi termini procreantur D, E, F, quando dati termini A, B, C, ſunt vnitates; vt in exemplis prolatis manife-

A, 9.	B, 6.	C, 4.	A, 1.	B, 4.	C, 16.	A, 9.	B, 12.	C, 16.
D, 40.	E, 16.	F, 10.	D, 30.	E, 24.	F, 20.	D, 70.	E, 40.	F, 28.

ſtum eſt. Quando autem A, B, C, non ſunt vnitates, etiamſi in ſua proportione minimi ſint, non ſemper creantur minimi termini D, E, F.

Id quod

Id quod liquidò conſtat in his exemplis. In primo enim exemplo, ex minimis terminis proportionis ſeſquialteræ, & in ſecundo ex minimis terminis ſubquadruplæ proportionis, & in tertio ex minimis terminis ſubſeſquitertiæ proportionis, gignuntur tres in proportionalitate Harmonica non minimi. Quod ſi termini inuertantur, tum demum, (quod mirum eſt) minimi termini Medietatis Harmonicæ procreabuntur, vt hæc exempla demonſtrant.

A, 4. *B*, 6. *C*, 9. | *A*, 16. *B*, 4. *C*, 1. | *A*, 16. *B*, 12. *C*, 9.

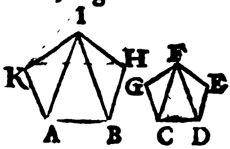
D, 35. *E*, 21. *F*, 15. | *D*, 45. *E*, 9. *F*, 5. | *D*, 77. *E*, 33. *F*, 21.

PROBL. 6. PROPOS. 18.

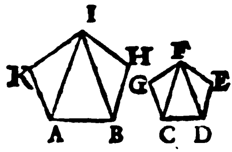
xix.

A DATA recta linea dato rectilineo ſimile, ſimiliterq; poſitum rectilineum deſcribere.

SIT data recta A B, ſuper quam deſcribendum ſit rectilineum rectilineo C D E F G, ſimile ſimiliterque poſitum. Ducantur ex quolibet angulo, vt ex F, ad ſingulos angulos oppoſitos rectæ lineæ, quæ rectilineum reſoluant in triangula C D F, D E F, F G C. Deinde angulo D C F, æqualis fiat angulus B A I; & angulo C D F, angulus A B I, coeantq; rectæ A I, B I, in puncto I; (coibunt enim omnino, propterea quòd duo anguli I A B, I B A, duobus rectis minores ſint, cùm æquales ſint duobus angulis F C D, F D C, *a* qui duobus rectis ſunt minores.) *b* eritque reliquo angulo C F D, reliquus angulus A I B, æqualis; totumque triangulum A I B, toti triangulo C F D, æquiangulum. Rurſus angulo F D E, æqualis fiat angulus I B H; & angulo D F E, angulus B I H: Et *c* quia duo anguli E D F, E F D, minores ſunt duobus rectis; erunt quoq; duo anguli H B I, H I B, duobus rectis minores; ac proinde rectæ B H, I H, coibunt. Coeant ergo in puncto H, eritq; eadem ratione triangulum B H I, triangulo D E F, æquiangulum. Præterea angulo C F G, fiat æqualis angulus A I K; & angulo F C G, angulus I A K: *d* Et quia duo anguli G C F, G F C, minores ſunt duobus rectis: erunt & duo anguli K A I, K I A, duobus rectis minores; atque idcirco rectæ A K, I K, conuenient in aliquo puncto. Conueniant ergo in K: eritque triangulum quoque A K I, triangulo C G F, æquiangulum. Atque ita procedatur, donec abſoluantur omnia triangula rectilinei propoſiti, ſi plura extiterint. Dico igitur, rectilineum A B H I K, rectilineo C D E F G, ſimile eſſe, ſimiliterque poſitum. Cùm enim angulus I A B, conſtitutus ſit æqualis angulo



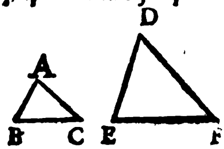
a 17. primi.
b 32. primi.
c 17. primi.
d 17. primi.



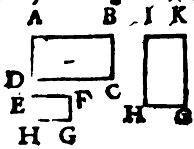
F C D; & angulus I A K, angulo F C G, erit totus angulus B A K, toti angulo D C G, æqualis: Eademque ratione angulus A B H, angulo C D E, æqualis erit; & reliqui reliquis, vt conſtat ex conſtructione; cùm ſingulæ partes vnius ſingulis partibus alterius factæ ſint æquales. Quare æquiangulum erit rectilineum A B H I K, rectilineo C D E F G. (a 4. ſexti.) Quoniam verò *a* ita eſt A B, ad B I, vt C D, ad D F: & ita B I, ad B H, vt D F, ad D E: (b 22. quinti.) *b* erit ex æquo ita A B, ad B H, vt C D, ad D E. Quare latera circa æquales angulos A B H, C D E, proportionalia ſunt, (c 4. ſexti.) *c* quemadmodũ & latera circa æquales angulos H, & E, proportionalia ſunt, ob triangula æquiangula B H I, D E F. (d 4. ſexti.) *d* Rurſus ita eſt H I, ad I B, vt E F, ad F D: & ita I B, ad I A, vt F D, ad F C: & ita I A, ad I K, vt F C, ad F G. (e 22. quinti.) *e* Igitur ex æquo erit ita H I, ad I K, vt E F, ad F G, & ideo latera quoq; circa æquales angulos H I K, E F G, proportionalia erunt, & ſic de cæteris. Quamobrem rectilinea, cùm ſint æquiangula, habeantq; latera circa æquales angulos proportionalia, ſimilia ſunt, ſimiliterq; deſcripta. A data ergo recta linea, dato rectilineo ſimile ſimiliterq; poſitum rectilineum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

DICVNTVR autem rectilinea ſuper lineas rectas deſcripta eſſe ſimilia & ſimiliter poſita, quando anguli æquales conſtituuntur ſuper ipſas rectas lineas, & tam reliqui æquales anguli, quàm latera proportionalia ſemper ordine ſeſe conſequuntur. Vt triangula A B C, D E F, non ſolùm erunt ſimilia, ſed etiã ſuper rectas B C, E F, ſimiliterq; deſcripta, ſi anguli B, C, æquales fuerint angulis E, F; & ita ſit A B, ad B C, vt D E, ad E F, &c.



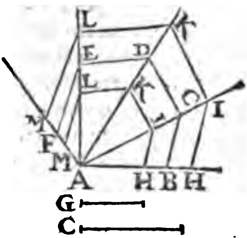
At ſupra rectas B C, D E, non dicentur ſimiliter eſſe deſcripta, (quanquam ſimilia ſint.) cùm anguli B, C, nõ ſint æquales angulis D, E. Similiter rectangula A C, E G, ſimilia, dicentur ſimiliter eſſe deſcripta ſuper rectas D C, H G, quoniam vt A D, ad D C, ita eſt E H, ad H G, &c. At verò rectangula A C, I G, non dicentur ſimiliter deſcripta ſuper rectas D C, H G, quamuis ſint ſimilia, vt manifeſtũ eſt. Eadem tamen ſimiliter erũt deſcripta ſuper rectas D C, I H, vel ſuper rectas A D, H G.



CÆTERVM omnes figuræ ſecundum conſtructionem huius problematis deſcriptæ, ſunt neceſſariò ſimiliter poſitæ, vt patet in rectilineis A B H I K, C D E F G. ſuper lineas A B, & CD, deſcriptis. Item omnes æquilateræ figuræ. & æquiangulæ, ſunt quoq; poſitæ ſimiliter ſuper quælibet earum latera.

FOR-

FORTASSIS autem expeditius Problema propoſitũ conficiemus ad hunc modum. Sit dato rectilineo A B C D E F, ſuper datam rectã G, vel aliam ei æqualem, deſcribendum ſimile rectilineum, ſimiliterq; poſitum. Productis duobus lateribus A B, A F, circa angulum A, educantur ex A, per omnes alios angulos rectæ A C A D, A E, quantumlibet. Deinde ex A B, abſcindatur A H, æqualis datæ rectæ G, vel certè ex ipſa A B, vlterius producta, ſi fortè G, fuerit maior, quàm A B. Poſthac per H, agatur recta H I, lateri B C, parallela, & per I, recta I K, lateri C D, parallela, & ſic deinceps, donec omnia latera ſuas habeant parallelas, demptis duobus lateribus productis A B, A F, factumq; erit, quod proponitur: hoc eſt, figura A H I K L M, ſuper rectam A H, datæ rectæ G, æqualem, ſimilis erit, ſimiliterq; poſita figuræ propoſitæ A B C D E F, ſuper rectam A B, conſtitutæ. Cùm enim angulus H A M, ſit communis; & angulis A B C, A F E, a æquales ſint anguli A H I, A M L; Item angulis A C B, A C D, æquales ſint anguli A I H, A I K, hoc eſt, toti angulo B C D, æqualis ſit angulus totus H I K; Eodemq; modo angulis C D E, D E F, æquales ſint anguli I K L, K L M: Aequiangula erunt rectilinea A B C D E F, A H I K L M. Sed & latera circum æquales angulos habent proportionalia. Cùm enim triangula A H I, A I K, A K L, A L M, ſimilia ſint per coroll. propoſ. 4. huius lib. triangulis A B C, A C D, A D E, A E F; Erit, b vt A B, ad B C, ita A H, ad H I. Rurſus, vt B C, ad C A, ita H I, ad I A. Et vt C A, ad C D, ita I A, ad I K: ac proinde ex æquo, vt B C, ad C D, ita H I, ad I K, &c. Igitur ex defin. ſimilia ſunt rectilinea A B C D E F, A H I K L M, atq; adeò ſimiliter poſita, per ea, quæ proximè hoc ſcholio ſcripſimus.



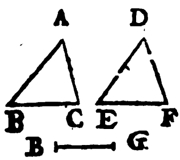
a 29. primi.

b 4. ſexti.

THEOR. 13. PROPOS. 19. xvij.

SIMILIA triangula inter ſe ſunt in duplicata ratione laterum homologorum.

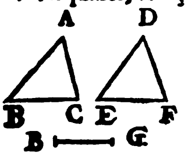
SINT triangula ſimilia A B C, D E F, habentia angulos æquales B, & E: Item C, & F, &c. Et ſit vt A B, ad B C, ita D E, ad E F, &c. Dico triangula inter ſe rationem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa B C, & E F, vel A B, & D E, vel A C, & D F: Hoc eſt, ſi homologis lateribus B C, E F, inueniatur tertia proportionalis B G: ita eſſe triangulum A B C, ad triangulum D E F, vt rectam B C, ad rectã B G: ac proinde cùm ex defin. 10. lib. 5. proportio B C, ad B G, dicatur duplicata proportionis B C, ad E F: proportionem



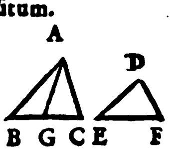
Digitized by Google

tionem trianguli ad triangulum dici quoque duplicatam proportionis laterum homologorum B C, E F. Ita vt nihil aliud ſit, triangula duo, vel duas quaslibet figuras ſimiles, ſimiliterque poſitas, habere proportionem duorum laterum homologorum duplicatam, quàm ita eſſe triangulum ad triangulum, vel figuram ad figuram, vt eſt prima linea ad tertiam, cùm tres lineæ fuerint continuè proportionales in proportione duorum laterum homologorum: quales hic ſunt tres lineæ rectæ B C, E F, B G, continuè proportionales in proportione homologorum laterum B C, E F. Sint ergo primùm latera B C, E F, æqualia, ac proinde & tertia proportionalis B G, illis æqualis: ita vt proportio B C, ad B G, quæ duplicata dicitur proportionis lateris B C, ad latus E F, ſit proportio æqualitatis. Quoniam igitur triangula A B C, D E F, habent quoque proportionem æqualitatis, a quòd ipſa inter ſe æqualia ſint, ob angulos B, C, angulis E, F, æquales, & æqualitatem laterum B C, E F, quibus adiacent:

a 26. primi.



erit triangulum ad triangulum, vt recta B C, ad rectam B G. Cùm ergo hæc proportio dicatur duplicata proportionis laterum homologorum B C, E F; dicetur quoque proportio trianguli A B C, ad triangulum D E F, proportionis, quam latus B C, ad latus E F, habet, duplicata. Quod etiam hinc conſtare poteſt. Quoniam, vt dictum eſt, triangula A B C, D E F, æqualia ſunt, hoc eſt, proportionem æqualitatis habent, ſicut & latera homologa B C, E F: Proportio autem æqualitatis duplicata ſolùm efficit proportionem æqualitatis: (Poſitis enim tribus magnitudinibus æqualibus, dicetur prima ad tertiam habere proportionem duplicatam proportionis, quam habet prima ad ſecundam, vt conſtat ex definitione 10. lib. 5. cùm tamen prima ad tertiam habeat proportionem æqualitatis, ſicuti & prima ad ſecundam,) habebit triangulum A B C, ad triangulum D E F, proportionem duplicatam eius, quam habet latus B C, ad latus E F. Quod eſt propoſitum.



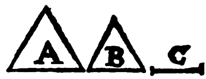
SIT deinde B C, latus latere E F, maius; & ex B C, b abſcindatur rectis B C, E F, tertia proportionalis B G, ducaturq; recta A G. Quia igitur eſt vt A B, ad B C, ita D E, ad E F; erit permutando vt A B, ad D E, ita B C, ad E F: Vt autem B C, ad E F, ita eſt per conſtructionem E F, ad B G. Vt ergo A B, ad D E, c ita erit E F, ad B G. Quare cùm triangula A B G, D E F, habeant latera circa angulos B, E, æquales reciproca, d ipſa inter ſe æqualia erunt; & propterea vt triangulum A B C, ad triangulum D E F, e ita erit idem

b 11. ſexti.
c 11. quinti.
d 15. ſexti.
e 7. quinti.

idem triangulum A B C, ad triangulum A B G. Vt autem triangulum A B C, ad triangulum A B G, eiuſdem altitudinis, a ita eſt baſis B C, ad baſin B G. Igitur vt triangulum A B C, ad triangulum D E F, ita eſt B C, ad B G. Atqui cùm tres lineæ B C, E F, B G, ſint continuè proportionales, proportio primæ B C, ad tertiam B G, duplicata dicitur proportionis B C, primæ ad E F, ſecundam. Igitur & triangulum A B C, ad triangulum D E F, proportionem habet duplicatam proportionis lateris B C, ad latus E F. Similia igitur triangula inter ſe ſunt, &c. Quod erat demonſtrandum. a 1. ſext.

COROLLARIVM.

HINC manifeſtum eſt, ſi tres rectæ lineæ proportionales fuerint; vt eſt prima ad tertiam, ita eſſe triangulum ſuper primam deſcriptum ad triangulum ſupra ſecundam ſimile ſimiliterq; deſcriptum.



SINT enim tres rectæ proportionales A, B, C; & ſuper primam A, & ſecundam B, conſtituta triangula A, & B, ſimilia, ſimiliterq; deſcripta. Dico, vt eſt recta A, prima ad rectam C, tertiam, ita eſſe triangulum A, ad triangulum B. Nam proportio rectæ A, ad rectam C, eſt, per definitionem, duplicata proportionis rectæ A, ad rectam B. b *Cùm igitur triangulum A, ad triangulum B, habeat quoque proportionem duplicatam rectæ A, ad rectam B; erit vt recta A, ad rectam C, ita triangulum A, ad triangulum B.* b 19. ſexti.

EODEM modo oſtendes, ita eſſe triangulum ſupra ſecundam ad triangulum ſupra tertiam ſimile ſimiliterque deſcriptum, vt eſt prima linea ad tertiam. Sint enim proportionales tres C, B, A, & ſuper B, ſecundam, & A, tertiam conſtituantur triangula ſimilia ſimiliterq; poſita B, & A. Dico, vt eſt recta C, ad rectam A, ita eſſe triangulum B, ad triangulum A. Nam proportio C, ad A, duplicata eſt proportionis C, ad B, hoc eſt, rectæ B, ad rectam A. c *Cùm igitur & triangulum B, ad triangulum A, habeat proportionem duplicatam rectæ B, ad rectam A, quoniam B, & A, ſunt latera homologa: Erit vt C, recta ad rectam A, ita triangulum B, ad triangulum A.* c 19. ſexti.

SCHOLIVM.

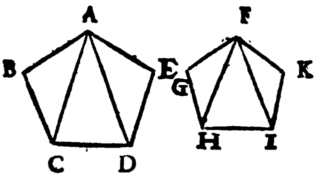
ITAQVE ſi proportio lateris B C, ad latus E F, nota ſit in numeris, nimirum vt 6. ad 5. cognoſcemus quoque ex hac propoſ. 19. in numeris, quam proportionem habeat triangulum A B C, ad triangulum D E F. Si enim proportio 6. ad 5. continuetur in tribus numeris, hoc modo 36. 30. 25. erit triangulum ad triangulum, vt 36. ad 25. hoc eſt, habebit proportionem, cuius denominator eſt $1\frac{1}{2}\frac{1}{5}$. *Quia enim proportio 36. ad 25. eſt duplicata proportionis 36. ad 30. ſiue 6. ad 5. quam latera homologa ponuntur habere: Habent autem & triangula*

gula proportionem laterum homologorum duplicatam, ut hoc theoremate oſtenſum eſt; erit triangulum ad triangulum, ut 36. ad 25. Eandem proportionem triangulorum cognoſcemus, ſi denominatorem proportionis laterum homologorum, nimirum 1 $\frac{1}{5}$. in ſe multiplicemus. Productus enim numerus $\frac{36}{25}$. id eſt, 1 $\frac{11}{25}$. erit denominator proportionis, quæ duplicata eſt proportionis laterum, ac proinde & denominator proportionis triangulorum, quòd hæc etiam duplicata ſit eiuſdem proportionis laterum.

SIC etiam, ſi latera homologa haberent proportionem, quam 10. *ad* 1 *haberent triangula proportionem, quam* 100. *ad* 1. *cùm hæc illius ſit duplicata, ut hic apparet,* 100.10.1 *Vel etiam quia denominator decuplæ proportionis, id eſt,* 10. *in ſe multiplicatus gignit* 100. *denominatorem proportionis, quæ decupla duplicata eſt.*

xviij. THEOR. 14. PROPOS. 20.

SIMILIA polygona in ſimilia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis: Et polygona duplicatam habent eam inter ſe rationem, quam latus homologum ad homologum latus.



SINT polygona ſimilia A B C D E, F G H I K, habentia angulos æquales B A E, G F K; Item angulos B, G, & ſic deinceps: habeant autem latera proportionalia circa angulos æquales; vt quidem A B, ad B C, ita F G, ad G H; & vt B C, ad C D, ita G H, ad H I, &c. Dico primum, hæc polygona diuidi in triangula ſimilia, quæ ſint numero æqualia. Ab angulis enim B A E, G F K, rectæ educantur ad ſingulos angulos oppoſitos, quæ ſint A C, A D, F H, F I; diuiſaque erunt polygona in triangula numero æqualia. Quoniam verò angulus B, æqualis eſt angulo G, ex hypotheſi, & circa ipſos latera proportionalia; *a* æquiangula erunt triangula A B C, F G H, habentia angulos B A C, G F H, æquales; Item angulos A C B, F H G, lateribus homologis oppoſitos: *b* Ideoq; latera habebunt circa æquos angulos proportionalia, ac propterea inter ſe ſimilia erũt. Eadem ratione erunt ſimilia triangula A E D, F K I, habentia angulos E A D, K F I, & angulos A D E, F I K, æquales. Deinde *c* quia eſt vt A C, ad C B, ita F H, ad H G, ob ſimilitudinem triangulorum A B C, F G H; vt autẽ C B, ad C D, ita eſt, ex hypotheſi, H G, ad H I, ob ſimilitudinem polygonorum: *d* erit ex æquo vt A C, ad C D, ita F H, ad H I. Et quoniam angulus B C D, æqualis ponitur

a 6. ſexti.
b 4. ſexti.
c 4. ſexti.
d 22. quinti.

Digitized by Google

aitur angulo G H I; eſt autem & ablatus A C B, oſtenſus æqualis ablato F H G; erit & reliquus A C D, reliquo F H I, æqualis. *a* Quare triangula A C D, F H I, cùm habeant latera circa æquales angulos A C D, F H I, proportionalia, æquiangula erunt, ideoque ſimilia. Eademque ratio eſt de alijs omnibus triangulis, ſi plura fuerint. a 6. ſexti.

DICO præterea, triangula hæc eſſe homologa totis polygonis, hoc eſt, ita eſſe quodlibet triangulum in vno polygono ad ſuum correſpondens triangulum in altero polygono, vt polygonum ad polygonũ. Quoniam enim ſimilia ſunt triangula A B C, F G H, erit eorum proportio duplicata proportionis homologorum laterum A C, F H. Atque eodem argumento proportio triangulorum A C D, F H I, duplicata erit proportionis eorundem laterum homologorum A C, F H. Quare vt triangulum A B C, ad triangulum F G H, ita erit triangulum A C D, ad triangulum F H I, cùm vtraque hæc proportio triangulorum ſit duplicata eiuſdem proportionis lateris A C, ad latus F H. Neq; diſſimili ratione concludetur quoq; eſſe triangulum A D E, ad triangulum F I K, vt A C D, ad F H I. Atque ita deinceps, ſi plura fuerint triangula. Sunt igitur proportionalia triangula vnius polygoni cum triangulis alterius, ita vt triangula vnius ſint antecedentia, & triangula alterius conſequentia proportionum. Vt autem vnum antecedens ad vnum conſequens, *b* ita ſunt omnia antecedentia ad omnia conſequentia. Igitur vt quodlibet triangulum vnius polygoni ad ſibi reſpondens triangulum alterius, ita erit totum polygonum ad totum polygonum; ideoque triangula homologa erunt totis polygonis. b 12. quinti.

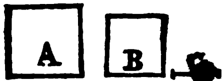
DICO poſtremò, polygona inter ſe proportionem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa, hoc eſt, ſi homologis lateribus, verbi gratia, A B, F G, inueniatur tertia linea proportionalis, ita eſſe polygonum A B C D E, ad polygonum F G H I K. vt eſt prima linea A B, ad tertiam inuentam: ac proinde, cùm proportio A B, ad illam tertiam, dicatur duplicata proportionis A B, ad F G, dici quoque proportionem polygoni ad polygonum duplicatam proportionis laterum homologorum A B, F G. Cùm enim ſit, vt triangulum A B C, ad triangulum F G H, ita polygonum A B C D E, ad polygonum F G H I K; Triangulum verò A B C, ad triangulum F G H, *c* habeat proportionem duplicatam eius, quam habent latera homologa A B, F G, hoc eſt, eandem quam habet A B, ad illam tertiam inuentam; habebunt quoque polygona inter ſe proportionem duplicatam proportionis eorundem laterum homologorum A B, F G, hoc eſt, eandem quam habet A B, ad illam tertiam inuentam. Itaque ſimilia polygona c 19. ſexti.

in ſi-

Digitized by Google

in ſimilia triangula diuiduntur, &c. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.



HINC manifeſtum eſt, ſi fuerint tres rectæ proportionales, vt eſt prima ad tertiam, ita eſſe polygonum ſuper primam deſcriptum, ad polygonum ſuper ſecundam ſimile ſimiliterque deſcriptum: Vel ita eſſe polygonum ſuper ſecundam deſcriptum ad polygonum ſuper tertiam ſimile ſimiliterq; deſcriptum.

HOC non aliter demonſtrabitur ex hoc theoremate, quam oſtenſum fuit corollarium præcedentis theorematis ex ſuo theoremate. Vt perſpicuum eſt in hac figura appoſita.

SCHOLIVM.

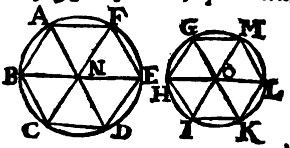
QVANDO polygona ſimilia ſunt pentagona, vt in figura demonſtrabitur etiam hoc modo triangula media A C D, F H I, ſimilia eſſe. Quoniam anguli A C B, F G H, æquales ſunt, ob ſimilitudinem triangulorum A B C, F G H; ſi auferantur ex angulis B C D, G H I, qui æquales etiam ſunt, ob ſimilitudinem polygonorum: æquales erunt & reliqui anguli A C D, F H I. Eademque ratione
a 32. *æquales oſtendentur anguli A D C, F I H: ac propterea* a *& reliqui*
primi. *C A D, H F I, æquales erunt. Igitur cùm æquiangula ſint triangula*
b 4. ſe- *A C D, F H I,* b *habebunt latera circa angulos æquales proportiona-*
xti. *lia, ac proinde ſimilia erunt.*

AT verò quando polygona habent plures angulos, demonſtrandum eſt, triangula media ſimilia eſſe, ex æqualitate, & propoſ. 6 huius lib. vt in propoſitione factum eſt: quia non poſſunt probari anguli æquales, præter vnum, qui videlicet propè præcedens triangulum ſimile exiſtit, qualis eſt angulus A C D, & F H I. Nam angulus A D C, oſtendi non poteſt æqualis angulo F I H; quòd tunc alia adhuc triangula ſuperſint vſque ad triangula ſimilia A E D, F K I &c. Hoc ideo dixerim, ne quis exiſtimet, fruſtra in propoſ. nos dixiſſe, ita eſſe A C, ad C B, vt F H, ad H G: Et ita C B, ad C D, vt H G, ad H I; ac proinde ex æqualitate ita A C, ad C D, vt F H, ad H I; ideoque cùm anguli A C D, F H I, ſint æquales, ſimilia eſſe triangula A C D, F H I. Hæc enim demonſtratio eſt omnino neceſſaria, communiſq; omnibus polygonis quotcunque angulorum; cùm omnia triangula media eo modo oſtendantur eſſe ſimilia, vt perſpicuum eſt. Nam ſi triangula A D E, F I K, non eſſent vltima, demonſtrarentur ſimilia hoc modo. Quoniam eſt vt A D, ad D C, ita F I, ad I H, ob ſimilitudinem triangulorum A C D, F H I: Item vt D C, ad D E, ita I H, ad I K, ob ſimilitudinem polygonorum; erit ex æquo, vt A D, ad D E, ita F I, ad I K: Et quia angulus C D E, æqualis ponitur angulo H I K: Eſt autem & ablatus A D C, oſtenſus ablato F I H,

Digitized by Google

F I H, æqualis; erit & reliquus A D E, reliquo F I K, æqualis. a Quare triangula A D E, F I K, ſimilia erunt, cùm habeant latera circa æquales angulos A D E, F I K, proportionalia. Atq; ita deinceps, ſi fuerint plura triangula. a 6. ſext.

QVOD ſi polygona ſimilia, fuerint æquilatera, & æquiangula, diuidentur quoque in ſimilia triangula, & numero æqualia, & homologa totis; ductis è centris circulorum ipſa circumſcribentium ad omnes angulos rectis lineis. Sint enim polygona ſimilia, æquilatera, & æquiangula A B C D E F, G H I K L M, quæ circumſcribantur à circulis circa centra N, O, ex quibus rectæ ducantur N A, N B, &c. Dico triangula N C D, O I K, ſimilia eſſe, & homologa totis polygonis.

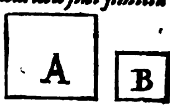


Quoniam enim anguli C N D, I O K, æquales ſunt; (quod æquè ſubmultiplices ſint quatuor rectorum. Nam vtrumq; ſpatium N, & O, quatuor rectis æquiualens, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. diuiditur in angulos & numero, & magnitudine æquales. Cùm enim anguli in centro N, inſiſtant æqualibus arcubus, b ipſi inter ſe æquales erunt: eademque ratione anguli in centro O, æquales erunt.) Sunt autem & latera circum ipſos proportionalia, cùm vtrobiq; ſit proportio æqualitatis; c Similia erunt triangula N C D, O I K. Eademq; eſt ratio de cæteris. At verò hæc triangula eſſe homologa totis polygonis, nullo negotio demonſtrabitur. Cùm enim tota polygona ſint ipſorum triangulorum æquè multiplicia, vt patet, d habebunt vtique eandem cum ipſis proportionem. b 27. tertij. c 6. ſexti. d 15. quinti.

PORRO ex hoc theoremate perfacilè demonſtrabimus theorema illud, quod iam aliter in ſcholio propoſ. 4. lib. 2. oſtendimus. Nimirum.

SI linea recta dupla fuerit lineæ rectæ, quadratum illius quadruplum erit quadrati huius: Et contrà, ſi quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum erit lateris huius.

SIT primùm recta A, dupla rectæ B. Dico quadratum A, quadruplum eſſe quadrati B. Cùm enim omnia quadrata ſint ſimilia, vt conſtat ex defin. 1. huius lib. erit, per hanc propoſ. proportio quadrati A, ad quadratum B, duplicata proportionis laterum homologorum A, & B; quæ cùm inter ſe proportionem habeant duplam; erit proportio quadratorum quadrupla. Quadrupla enim proportio duplicata eſt duplæ proportionis, vt hic apparet. 1. 2. 4.



SIT deinde quadratum A, quadruplum quadrati B. Dico latus A, duplum eſſe lateris B. Cùm enim proportio quadratorum, quæ po-

Digitized by Google

nitur quadrupla, duplicata ſit proportionis laterum homologorum; vt dictum eſt; habebunt latera homologa A, & B, proportionem duplam. Nam quadrupla proportio duplicata eſt proportionis dupla, vt in exemplo adducto ſuperius apparet.

ITAQVE ſi proportio lateris A B, ad latus F G, in polygonis, quæ in propoſ. deſcripſimus, nota ſit in numeris, nimirum vt 5. ad 4. cognoſcemus quoque ex hac propoſ. 20. in numeris, quam proportionem habeat polygonum A B C D E, ad polygonum F G H I K. Si enim proportio 5. ad 4. continuetur in tribus numeris, hoc modo, 25. 20. 16. erit polygonum ad polygonum, vt 25. ad 16. hoc eſt, habebit proportionem, cuius denominator eſt $1\frac{9}{16}$. *Quia enim proportio 25. ad 16. eſt duplicata proportionis 25. ad 20. ſiue 5. ad 4. quam homologa latera A B, F G, ponuntur habere; demonſtratumq; eſt hoc theoremate, polygona quoque habere duplicatam proportionem eius, quam latera homologa habent, erit polygonum ad polygonum, vt 25. ad 16. Idem denominator proportionis polygonorum, cognoſcetur, ſi denominator proportionis laterum homologorum, nimirum* $1\frac{1}{4}$. *in ſe multiplicetur. Productus enim numerus* $\frac{25}{16}$. *id eſt,* $1\frac{9}{16}$. *erit denominator proportionis, quæ duplicata dicitur eius, quam latera homologa habent, ex iis, quæ in defin. 10. lib. 5. ſcripſimus; ac proinde & denominator proportionis polygonorum, cùm hæc ſit etiam duplicata eiuſdem proportionis laterum homologorum.*

SIC etiam, ſi latera homologa haberent proportionem decuplam, haberent polygona proportionem centuplam, cùm hæc illius ſit duplicata, vt hic apparet, 100. 10. 1. *Vel etiam quia denominator* 10. *proportionis decuplæ in ſe multiplicatus gignit denominatorem* 100. *proportionis centuplæ, quæ decuplæ duplicata dicitur.*

XX. THEOR. 15. PROPOS. 21.

QVÆ eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia.



SINT rectilinea A B C, D E F, rectilineo G H I, ſimilia. Dico & ipſa inter ſe eſſe ſimilia. Cùm enim propter ſimilitudinem, anguli rectilinei A B C, æquales ſint angulis rectilinei G H I; Item eandem de cauſa anguli rectilinei D E F, æquales angulis eiuſdem rectilinei G H I; *a* erunt anguli rectilinei A B C, æquales angulis rectilinei D E F. Ruſus cùm ob eandem ſimilitudinem, latera rectilinei A B C, proportionalia ſint lateribus rectilinei G H I, videlicet ijs, quæ circum æquales ſunt angulos: Item eandem ob cauſam, latera rectilinei D E F, proportionalia lateribus eiuſdem rectilinei G H I; *b* erunt quoq; latera rectilinei A B C, lateribus rectilinei

a 1. *pronun.*

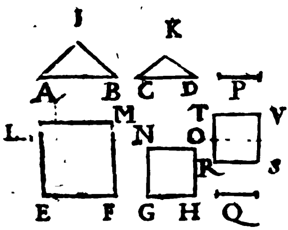
b 11. *quinti.*

Digitized by Google

rectilinei D E F, proportionalia, ea nimirum ijs, quæ angulos ambiunt æquales. Atq; adeò per definitionem, ſimilia exiſtent rectilinea A B C, D E F. Quæ igitur eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 16. PROPOS. 22. xxij.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea ſimilia ſimiliterq; deſcripta, proportionalia erunt. Et ſi à rectis lineis ſimilia ſimiliterq; deſcripta rectilinea, proportionalia fuerint: ipſæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.



SINT primum quatuor rectæ A B, C D, E F, G H, proportionales, vt quidem A B, ad C D, ita E F, ad G H; Conſtituanturq; ſuper A B, C D, duo quæcunq; rectilinea ſimilia ſimiliterq; deſcripta A B I, C D K; Item ſuper E F, G H, alia duo quæcunq; rectilinea ſimilia ſimiliterq; deſcripta, E F M L, G H O N. Dico & hæc rectilinea eſſe proportionalia, vt quidem A B I, ad C D K, ita E M, ad G O. *a* Inueniatur enim rectis A B, C D, tertia proportionalis P; & rectis E F, G H, tertia proportionalis Q, *b* eritq; ex æquo, vt A B, ad P, ita E F, ad Q: Vt autem A B, ad P, ita eſt rectilineum A B I, ad rectilineum C D K, ſimile ſimiliterq; deſcriptum, ex corollario quinti propoſitionis 20. huius lib. vel ſi fuerint triangula, ex coroll. propoſ. 19. Et eadem ratione, vt E F, ad Q, ita rectilineum E M, ad rectilineum G O. *c* Igitur vt A B I, ad C D K, ita erit E M, ad G O. Quod eſt propoſitum.

a 11. ſexti.
b 22. quinti.
c 11. quinti.

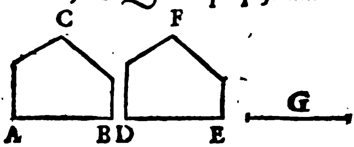
DEINDE ſint A B I, C D K, E M, G O, rectilinea proportionalia. Dico quatuor rectas A B, C D, E F, G H, eſſe quoque proportionales, vt quidem A B, ad C D, ita E F, ad G H. *d* Inueniatur enim tribus rectis A B, C D, E F, quarta proportionalis R S, ſuper quam deſcribatur rectilineum R S V T, ſimile rectilineo E M, ſimiliterq; poſitum; *e* & ob id rectilineo G O. Quoniam igitur eſt, vt A B, ad C D, ita E F, ad R S; erit quoque, vt iam eſt oſtenſum, vt A B I, ad C D K, ita E M, ad R V. Vt autem A B I, ad C D K, ita quoq; ponitur E M, ad G O. *f* Igitur erit vt E M, ad R V, ita E M, ad G O; *g* Atq; idcirco æqualia erunt R V, G O. Quæ cùm ſint ſimilia ſimiliterq; poſita, conſiſtent neceſſariò, vt mox oſtendemus ſuper rectas R S, G H, æquales. *h* Quare erit vt E F, ad R S, ita E F, ad G H. Ponitur autem E F, ad R S, vt A B, ad C D. *i* Igitur erit quoque vt A B, ad C D, ita E F, ad G H. Quamobrem ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

d 12. ſexti.
e 21. ſexti.
f 11. quinti.
g 9. quinti.
h 7. quinti.
i 11. quinti.

Digitized by Google

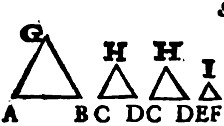
LEMMA.

QVOD autem æqualia rectilinea ſimilia ſimiliterque de-ſcripta, qualia ſunt G O, R V, conſiſtant ſuper rectas æquales, ita oſtendetur. Si enim inæquales ſunt G H, R S; ſit G H, maior. Cùm igitur ob ſimilitudinem rectilineorum, ſit vt G H, ad H O, ita R S, ad S V, ponatur autem G H, maior quàm R S, erit quoq; H O, maior quàm S V, & propterea rectilineum G O, maius rectilineo R V, cùm hoc intra ipſum poßit conſtitui; quod eſt abſurdum, cùm ſit contra hypotheſin. Non ergo inæquales ſunt rectæ G H, R S. Quod eſt propoſitum.



ALITER. Sint duo rectilinea A B C, D E F, æqualia, & ſimilia ſimiliterq; poſita. Dico latera homologa, cuiuſmodi ſunt rectæ A B, D E, eſſe æqualia. Si enim non credantur æqualia, ſit A B, maius, quàm D E, inueniaturq; rectis A B, D E, tertia proportionalis G. Quoniam ergo eſt, vt A B, ad D E, ita D E, ad G. Eſt autem AB, maior quàm D E, Erit quoq; DE, maior, quàm G, ac propterea multò maior A B, quàm G. Vt verò A B, ad G, ita eſt rectilineum A B C, ad rectilineum C E F, per coroll. propoſ. 19. vel 20. huius lib. Igitur cùm A B, maior ſit, quàm G, erit quoq; rectilineum A B C, maius rectilineo D E F, quod eſt abſurdum, cùm poſitum ſit æquale. Non ergo maior eſt A B, recta quàm recta D E. Sed neq; maior erit eadem ratione; quia & rectilineum A B C, minus oſtenderetur rectilineo D E F, quod eſt contra hypotheſin. Quare æquales ſunt rectæ A B, D E.

SCHOLIVM.

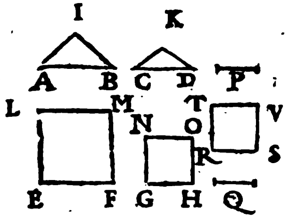


EODEM modo, ſi fuerint tres rectæ proportionales; erunt & rectilinea ſimilia ſimiliterq; deſcripta ab eis, proportionalia, &c. Si enim ſumatur linea media, eiuſq; rectilineum bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor rectilinea proportionalia, vt hic Euclides demonſtrauit. Cùm igitur id, quod à ſecunda eſt deſcriptum, æquale ſit ei, quod à tertia, immò idem; manifeſtum eſt, quod proponitur.

BREVIVS tota hæc propoſitio demonſtrabitur, hoc modo. Ponatur primum eſſe vt A B, ad C D, ita E F, ad G H. Dico eſſe quoq; vt

A B I,

Digitized by Google

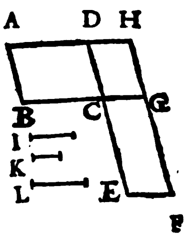


ABI, ad CDK, ita EM, ad GO. a Cùm enim ſit proportio rectilinei ABI, ad CDK, duplicata proportionis AB, ad CD. Item proportio rectilinei EM, ad rectilineum GO, duplicata proportionis EF, ad GH, erunt proportiones ABI, ad CDK, & EM, ad GO, æquales; quandoquidem duplicatæ ſunt proportionũ æqualium AB, ad CD, & EF, ad GH. Quod eſt primum. a 19. vel 20. ſexti.

PONATVR deinde eſſe vt ABI, ad CDK, ita EM, ad GO. Dico eſſe quoq; vt AB, ad CD, ita EF, ad GH. b Cùm enim ſit proportio ABI, ad CDK, duplicata proportionis AB, ad CD: Item proportio EM, ad GO, duplicata proportionis EF, ad GH: Erunt proportiones AB, ad CD, & EF, ad GH, æquales; quandoquidem earum proportiones duplicatæ ABI, ad CDK, & EM, ad GO, æquales ponuntur. Quod eſt ſecundum. b 19. vel 20. ſexti.

THEOR. 17. PROPOS. 23. xxiiij.

ÆQVIANGVLA parallelogramma inter ſe rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.



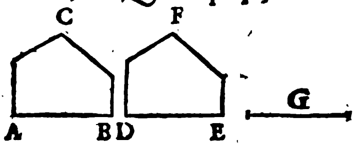
SINT parallelogramma æquiangula AC, CF, habentia angulos BCD, ECG, æquales. Dico proportionem eorum eſſe compoſitam ex duabus proportionibus, quas habent duo latera vnius circa angulũ æqualem, ad duo latera alterius circa angulum æqualem, ita vt antecedentia proportionum ſint in vno parallelogrammo, & conſequentia in altero; hoc eſt, proportionem AC, parallelogrammi ad parallelogrammum CF, compoſitam eſſe ex proportionibus rectæ BC, ad CG, rectam, & rectæ DC, ad rectam CE; Vel etiam ex proportionibus rectæ BC, ad rectam CE, & rectæ DC, ad rectam CG. Id eſt, ſi ſumantur tres lineæ I, K, L, ita vt I, ad K, ſit, ſicut BC, latus ad latus CG, & K, ad L, vt latus DC, ad latus CE; ita eſſe parallelogrammum AC, ad parallelogrammum CF, vt eſt recta I, ad rectam L: ac proinde cùm ex defin. 5. huius lib. proportio I, ad L, componi dicatur ex proportionibus I, ad K, & K, ad L; proportionem quoq; parallelogrammi AC, ad paralellogrammum CF, dici compoſitam eſſe ex eiſdem proportionibus, hoc eſt, ex proportionibus BC, ad CG, & DC, ad CE. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt BC, CG, efficiant vnam lineam rectam: Quo poſito, cùm anguli BCD, ECG, ſint æquales, erunt & DC,

 CE, vna

Digitized by Google

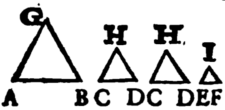
LEMMA.

QVOD autem æqualia rectilinea ſimilia ſimiliterque deſcripta, qualia ſunt G O, R V, conſiſtant ſuper rectas æquales, ita oſtendetur. Si enim inæquales ſunt G H, R S; ſit G H, maior. Cùm igitur ob ſimilitudinem rectilineorum, ſit vt G H, ad H O, ita R S, ad S V, ponatur autem G H, maior quàm R S, erit quoq; H O, maior quàm S V, & propterea rectilineum G O, maius rectilineo R V, cùm hoc intra ipſum poßit conſtitui; quod eſt abſurdum, cùm ſit contra hypotheſin. Non ergo inæquales ſunt rectæ G H, R S. Quod eſt propoſitum.



ALITER. Sint duo rectilinea A B C, D E F, æqualia, & ſimilia ſimiliterq; poſita. Dico latera homologa, cuiuſmodi ſunt rectæ A B, D E, eſſe æqualia. Si enim non credantur æqualia, ſit A B, maius, quàm D E, inueniaturq; rectis A B, D E, tertia proportionalis G. Quoniam ergo eſt, vt A B, ad D E, ita D E, ad G. Eſt autem AB, maior quàm D E, Erit quoq; DE, maior, quàm G, ac propterea multò maior A B, quàm G. Vt verò A B, ad G, ita eſt rectilineum A B C, ad rectilineum C E F, per coroll. propoſ. 19. vel 20. huius lib. Igitur cùm A B, maior ſit, quàm G, erit quoq; rectilineum A B C, maius rectilineo D E F, quod eſt abſurdum, cùm poſitum ſit æquale. Non ergo maior eſt A B, recta quàm recta D E. Sed neq; maior erit eadem ratione; quia & rectilineum A B C, minus oſtenderetur rectilineo D E F, quod eſt contra hypotheſin. Quare æquales ſunt rectæ A B, D E.

SCHOLIVM.

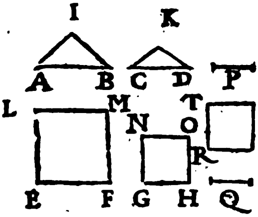


EODEM modo, ſi fuerint tres rectæ proportionales; erunt & rectilinea ſimilia ſimiliterq; deſcripta ab eis, proportionalia, &c. Si enim ſumatur linea media, eiuſq; rectilineum bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor rectilinea proportionalia, vt hic Euclides demonſtrauit. Cùm igitur id, quod à ſecunda eſt deſcriptum, æquale ſit ei, quod à tertia, immò idem; manifeſtum eſt, quod proponitur.

BREVIVS tota hæc propoſitio demonſtrabitur, hoc modo. Ponatur primum eſſe vt A B, ad C D, ita E F, ad G H. Dico eſſe quoq; vt

A B I,

Digitized by Google

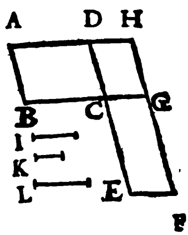


A B I, ad C D K, ita E M, ad G O, a Cùm enim ſit proportio rectilinei A B I, ad C D K, duplicata proportionis A B, ad C D. Item proportio rectilinei E M, ad rectilineum G O, duplicata proportionis E F, ad G H, erunt proportiones A B I, ad C D K, & E M, ad G O, æquales; quandoquidem duplicata ſunt proportionis æqualium A B, ad C D, & E F, ad G H. Quod eſt primum. a 19. vel 20. ſexti.

PONATVR deinde eſſe vt A B I, ad C D K, ita E M, ad G O. Dico eſſe quoq; vt A B, ad C D, ita E F, ad G H. b Cùm enim ſit proportio A B I, ad C D K, duplicata proportionis A B, ad C D: Item proportio E M, ad G O, duplicata proportionis E F, ad G H: Erunt proportiones A B, ad C D, & E F, ad G H, æquales; quandoquidem earum proportiones duplicatæ A B I, ad C D K, & E M, ad G O, æquales ponuntur. Quod eſt ſecundum. b 19. vel 20. ſexti.

THEOR. 17. PROPOS. 23. xxiiij.

ÆQVIANGVLA parallelogramma inter ſe rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.

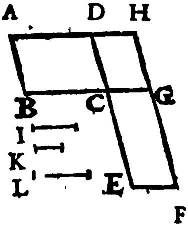


SINT parallelogramma æquiangula A C, C F, habentia angulos B C D, E C G, æquales. Dico proportionem eorum eſſe compoſitam ex duabus proportionibus, quas habent duo latera vnius circa angulũ æqualem, ad duo latera alterius circa angulum æqualem, ita vt antecedentia proportionum ſint in vno parallelogrammo, & conſequentia in altero; hoc eſt, proportionem A C, parallelogrammi ad parallelogrammum C F, compoſitam eſſe ex proportionibus rectæ B C, ad C G, rectam, & rectæ D C, ad rectam C E; Vel etiam ex proportionibus rectæ B C, ad rectam C E, & rectæ D C, ad rectam C G. Id eſt, ſi ſumantur tres lineæ I, K, L, ita vt I, ad K, ſit, ſicut B C, latus ad latus C G, & K, ad L, vt latus D C, ad latus C E; ita eſſe parallelogrammum A C, ad parallelogrammum C F, vt eſt recta I, ad rectam L: ac proinde cùm ex defin. 5. huius lib. proportio I, ad L, componi dicatur ex proportionibus I, ad K, & K, ad L; proportionem quoq; parallelogrammi A C, ad paralellogrammum C F, dici compoſitam eſſe ex eiſdem proportionibus, hoc eſt, ex proportionibus B C, ad C G, & D C, ad C E. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt B C, C G, efficiant vnam lineam rectam: Quo poſito, cùm anguli B C D, E C G, ſint æquales, erunt & D C,

Digitized by Google

C E, vna recta linea, vt ad propoſ. 15. lib. 1. ex Proclo demonſtrauimus. Producatur deinde A D, F G, donec conueniant in H; Sumptaq; recta I, quacunque, *a* inueniatur tribus B C, C G & I, quarta proportionalis K: Itẽ tribus D C, C E, & K, quarta proportionalis L. Quoniam igitur eſt, *b* vt B C, ad C G, ita A C, ad C H. Vt autem B C, ad C G, ita poſita eſt I, ad K, *c* erit quoq; vt A C, ad C H, ita I, ad K. Eodemq; argumẽto oſtendes eſſe, vt H C, ad C F, ita K, ad L. Nam vt D C, ad C E, *d* ita eſt H C, ad C F. Cùm ergo poſita ſit K, ad L, vt D C, ad C E, erit quoq; H C, ad C F, vt K, ad L: *e* Ex æquo igitur erit vt A C, ad C F, ita I, ad L. Sed proportio I, ad L, per 5. defin. huius lib. componitur ex proportionib. B C, ad C G; & D C, ad C E. Ex his eiſdem ergo proportionibus componetur quoq; proportio parallelogrammi A C, ad parallelogrammum C F. Eademq; ratione oſtendemus, proportionem A C, ad C F, componi ex proportionibus B C, ad C E, & D C, ad C G, dummodò parallelogramma ita coniungantur ad angulos æquales, vt B C, C E, efficiant vnam rectam lineam, &c. Aequiangula itaq; parallelogramma inter ſe rationem habent, &c. Quod erat oſtendendum.

[a 12. ſexti.] [b 1. ſexti.] [c 11. quinti.] [d 1. ſexti.] [e 22. quinti.]



SCHOLIVM.

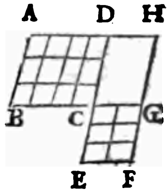
EXPEDITIVS idem demonſtrabitur hoc modo. Coniunctis
[f 1. ſext.] *parallelogrammis, vt prius; f Cùm ſit vt A C, ad C H, ita B C, ad C G, & vt C H, ad C F, ita D C, ad C E; Proportio autem A C, ad C F, componatur, per definitionem, ex intermedijs proportionibus A C, ad C H, & C H, ad C F; componetur quoq; eadem proportio A C, ad C F, ex proportionibus B C, ad C G, & D C, ad C E, quæ illis intermedijs ſunt æquales. Quod eſt propoſitum.*

HANC porrò propoſ. demonſtrat Euclides in numeris lib. 8. propoſ. 5.

ITAQVE ſi proportiones laterum, nimirum B C, ad C G, & D C, ad C E, notæ ſint in numeris, veniemus quoq; ex hac propoſ. 23. in cognitionem proportionis parallelogrammi A C, ad parallelogrammum C F, in numeris, hoc modo. Sit proportio B C, ad C G, eadem, quæ 11. ad 5. & D C, ad C E, eadem, quæ 7. ad 11. atq; hæ duæ proportiones continuentur in tribus numeris 77. 35. 55. ita vt ſit 77. ad 35. ſicut 11. ad 5. & 35. ad 55. vt 7. ad 11. Et quia proportio 77. ad 55. componitur ex proportionibus 77. ad 35. & 35. ad 55, hoc eſt, ex proportionibus laterum, erit vt 77. ad 55. ita parallelogrammũ A C, ad parallelogram-
[g 23. ſexti.] *mum C F, g quòd proportio parallelogrammorũ ſit etiam compoſita ex eiſdem proportionibus laterum: hoc eſt, proportio parallelogrammorum denominabitur à* $1\frac{22}{55}$*. Continuabuntur autem duæ datæ proportiones in tribus numeris vel ex ijs, quæ propoſ. 4. lib. 8. demonſtrantur,*

tur, vel certè hoc modo. Poſita priore proportione 11. ad 5 fiat vt 7. ad 11. (quæ eſt poſterior proportio) ita 5. ad aliud, inuenieturq́ numerus 7 $\frac{6}{7}$. Ita ergo ſtabunt tres numeri habentes duas illas proportiones, 11. 5. 7 $\frac{6}{7}$. Quod ſi tertius reuocetur ad hanc vnicã fractionem $\frac{55}{7}$. & alij duo numeri per denominatorem 7. multiplicentur, erunt duo producti numeri 77. 35. & numerator 55. tres numeri integri in eiſdem proportionibus.

SIC etiam ſi proportiones laterum ſint, vt 4. ad 2. & 3. ad 3. continuabuntur duæ hæ proportiones in hiſce tribus numeris 4. 2. 2. Vel in hiſce minimis 2. 1. 1. Et quia primus ad tertiũ eſt duplus, erit quoq́ parallelogrammorum proportio dupla. Id quod ex hac figura perſpicuum eſt. Nam ſi latus B C, diuidatur in 4. partes æquales, & C G, in 2. At D C, in 3. & C E, in 3. ita vt B C, ad C G, proportionem habeat duplam, at D C, ad C E, proportionem æqualitatis, vt poſitum eſt: ducantur autem per puncta diuiſionum lateribus parallelæ, continebit parallelogrammum A C, 12. rhombos æquales, at C F, ſolùm 6. atq́ adeò parallelogrammum A C, ad parallelogrammum C F, duplam proportionem habebit, vt dictum eſt.



PERSPICVVM autem eſt, alteram proportionum componentium poſſe eſſe maiorem proportione compoſita, & æqualem. In priori enim exemplo proportio lateris B C, ad C G, eſt vt 11. ad 5. hoc eſt, cuius denominator eſt 2 $\frac{1}{5}$. quæ maior eſt proportione parallelogrammorum, cùm huius denominator ſit 1 $\frac{2}{5}$ $\frac{2}{5}$. In poſteriori verò exemplo proportio lateris B C, ad C G, eſt dupla, quemadmodum & proportio parallelogrammorum. Vt vel hinc etiam conſtare poſſit, hanc proportionum compoſitionem non eſſe additionem, vt nonnulli interpretes volunt: Item proportionem maioris inæqualitatis poſſe componi tum ex proportione minoris inæqualitatis, tum ex æqualitatis proportione, quod ijdem interpretes negant. In exemplo namq́ priori proportio lateris D C, ad C E, eſt minoris inæqualitatis, in poſteriori verò, æqualitatis. Sed hac de re plura ſcribemus ad finem libri 9.

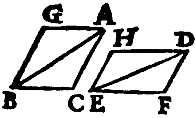
DEMONSTRAT hoc loco Federicus Commandinus nonnulla alia, quæ vel ad compoſitionem proportionum pertinent, vel ex ea demonſtrantur, non inutilia, quæ nos quoq́ afferre decreuimus, mutatis tamen nonnihil demonſtrationibus; Sunt autem ea, quæ ſequuntur.

I.

TRIANGVLA, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habent, proportionem habent ex lateribus æqualem angulum comprehendentibus compoſitam.

SINT triangula A B C, D E F, angulũ C, angulo F, habentia æqualẽ.

Digitized by Google



Dico proportionem trianguli A B C, ad triangulum D E F, compoſitam eſſe ex lateribus, hoc eſt, ex proportione B C, ad E F, & ex proportione A C, ad D F; Vel ex proportione B C, ad D F, & ex proportione A C, ad E F. Completis enim parallelogrammis C G, F H, erunt ea æquiangula, atque adeò eorum proportio ex lateribus componetur. Cùm ergo triangula A B C, D E F, cum ipſis, b quorum ſunt dimidia, c eandem habeant proportionem; Erit quoque proportio trianguli A B C, ad triangulum D E F, compoſita ex proportionibus laterum B C, A C, ad latera E F, D F.

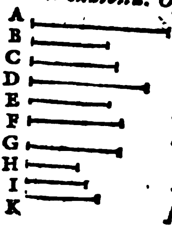
a 23. ſexti.
b 34. primi.
c 15. quinti.

II.

PROPORTIONEM ex duabus proportionibus, vel pluribus componere.

HOC, quo modo fiat, facilè colligitur ex demonſtratione huius propoſ. 23. Sint enim tres proportiones A, ad B; C, ad D; & E, ad F, in lineis exhibitæ. Oportet iam ex ipſis vnam proportionem componere.

d 12. ſexti.



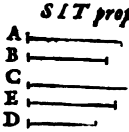
d Fiat vt A, ad B, ita G, ad H; & vt C, ad D, ita H, ad I; & vt E, ad F, ita I, ad K. Dico proportionem G, ad K, compoſitam eſſe ex tribus datis proportionibus. Cùm enim ea compoſita ſit ex proportionibus G, ad H: H, ad I: & I ad K, per defin. 5. huius lib. compoſita etiam erit ex proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F; quòd his illa ſumpta ſint æquales.

III.

PROPORTIONEM minorem ex maiore auferre.

e 12. ſexti.

SIT proportio A, ad B, minor auferenda ex proportione maiore C, ad D.



e Fiat, vt A, ad B, ita C, ad E; ſtatuaturq́ E, terminus medius inter C, & D. Dico ablatam eſſe proportionem A, ad B, ex proportione C, ad D, reliquamq́ eſſe proportionem E, ad D. Cùm enim proportio C, ad D, componatur ex proportionibus C, ad E, & E, ad D: Si proportio C, ad E, hoc eſt, A, ad B, auferatur, relinquetur proportio E, ad D.

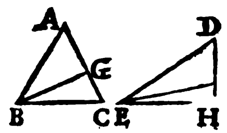
VERVM hæc compoſitio, & detractio proportionum non eſt additio, & ſubtractio propriè, quia aliàs totum eſſet æquale parti, & minus, & maior proportio poſſet detrahi ex minore, vt ad finem lib. 9. oſtendemus.

IV.

TRIANGVLA, quæ vnum angulum vni angulo æqua-

æqualem habent, eandem proportionem habent, quam rectangula, quæ ſub lateribus æqualem angulum comprehendentibus continentur.

SINT triangula A B C, D E F, angulum A, angulo D, habentia æqualem. Dico eſſe triangulum A B C, ad triangulum D E F, vt rectangulum ſub A B, A C, ad rectangulum ſub D E, D F. Ductis enim ad A C, D F, perpendicularibus B G, E H; erunt triangula A B G, D E H, æquiangula, vt conſtat ex coroll. 1. propoſ. 32. lib. 1. cum duo anguli A, A G B, duobus angulis D, D H E, ſint æquales. a Igitur erit, vt a 4. ſe…
G B, ad B A, ita H E, ad E D: Vt autem G B, ad B A, b ita eſt rectangulum ſub B G, A C, ad rectangulum ſub A B, A C, (Nam ſi baſes ponantur G B, B A, erit eorum eadem altitudo A C,) Et eadem ratione, vt H E, b 1. ſex.



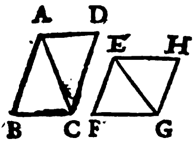
ad E D, ita eſt rectangulum ſub E H, D F, ad rectangulum ſub D E, D F. c Rectangulum igitur ſub B G, A C, ad rectangulum ſub A B, A C, eſt vt rectangulum ſub E H, D F, ad rectangulum ſub D E, D F; & permutando, rectangulum ſub B G, A C, ad rectangulum ſub E H, D F, vt rectangulum ſub A B, A C, ad rectangulum ſub D E, D F. Sed vt rectangulum ſub B G, A C, ad rectangulum ſub E H, D F, d ita eſt triangulum A B C, ad triangulum D E F, e quod hæc triangula ſint rectangulorum illorum dimidia. (Habent enim eaſdem cum illis baſes A C, D F, altitudineſque eaſdem B G, E H; ac proinde inter eaſdem cum illis parallelas ſunt conſtituta) Igitur erit quoque triangulum A B C, ad triangulum D E F, vt rectangulum ſub A B, A C, ad rectangulum ſub D E, D F. Quod eſt propoſitum. c 11. quinti. d 11. quinti. e 41. primi.

ALITER, & facilius. Ex theoremate 1. huius ſcholij, proportio trianguli A B C, ad triangulum D E F, compoſita eſt ex proportionibus A B, ad D E, & A C, ad D F: f Sed & proportio rectanguli ſub A B, A C, ad rectangulum ſub D E, D F, ex eiſdem proportionibus A B, ad D E, & A C, ad D F, compoſita eſt. Igitur erit triangulum A B C, ad triangulum D E F, vt rectangulum ſub A B, A C, ad rectangulum ſub D E, D F, quod eſt propoſitum. f 23. ſexti.

V.

PARALLELOGRAMMA inter ſe æquiangula, eandem habent proportionem, quam rectangula ſub lateribus ipſorum æqualem angulum continentibus comprehenſa.

SINT parallelogramma A B C D, E F G H, æquiangula inter ſe, quorum anguli B, & F, ſint æquales. Dico eſſe, vt parallelogram-

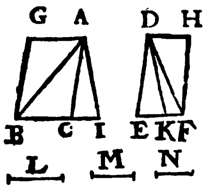


mum B D, ad parallelogrammum F H, ita rectangulum ſub A B, B C, ad rectangulum ſub E F, F G. Ductis enim diametris A C, E G, quæ angulos æquales B, F, ſubtendant; habebunt triangula A B C, E F G, angulum B, angulo F, æqualem. Quare, vt iam demonſtrauimus, erit, vt triangulum A B C, ad triangulum E F G,
a 15. quinti. *ita rectangulum ſub A B, B C, ad rectangulum ſub E F, F G.* a *Cum ergo parallelogramma B D, F H, eandem habeant proportionem,*
b 34. primi. *quam triangula A B C, E F G:* b *quòd hæc ipſorum ſint dimidia;*
c 11. quinti. c *Erit quoque vt parallelogrammum B D, ad F H, parallelogrammum, ita rectangulum ſub A B, B C, ad rectangulum ſub E F, F G. Quod eſt propoſitum.*

VI.

TRIANGVLA, & parallelogramma inter ſe proportionem habent compoſitam ex proportione baſium, & proportione altitudinum.

SINT triangula A B C, D E F, & parallelogramma C G, E H, quorum altitudines A I, D K. Dico eorum proportionem compoſitam eſſe ex proportione baſis B C, ad baſin E F, & proportione altitudinis A I, ad altitudinem D K. Sint enim primum altitudines æquales, baſes verò vel æquales etiam, vel inæquales: Fiatque, vt B C, ad E F, ita L, ad M; Vt autem A I, ad D K, ita M, ad N. Quo facto erit M, ipſi N, æqualis, quòd & A I, ipſi D K, æqualis ponatur:



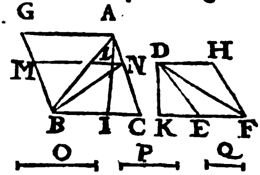
d 7. quinti. d *Ac proinde erit L, ad N, vt L, ad M, hoc eſt, vt B C, ad E F.*
e 1. ſex. e *At verò, vt B C, ad E F, ita eſt triangulum A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammum C G, ad parallelogrammum E H.*
f 11. quinti. f *Igitur quoque erit, vt L, ad N, ita triangulum A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammum C G, ad parallelogrammum E H: Sed proportio L, ad N, compoſita eſt ex proportione L, ad M, hoc eſt, ex proportione baſis B C, ad baſin E F, & ex proportione M, ad N, hoc eſt, altitudinis A I, ad altitudinem D K. Proportio ergo trianguli A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammi C G, ad parallelogrammum E H, ex eiſdem proportionibus eſt compoſita. Quod eſt propoſitum.*

SINT iam altitudines A I, D K, inæquales, & A I, maior; baſes verò B C, E F, vel æquales, vel etiam inæquales. Fiat, vt A I, ad D K, ita O, ad P; & vt B C, ad E F, ita P, ad Q. Abſciſſa deinde I L, æqualis ipſi D K; ducatur per L, ipſi B C, parallela L M, ſecans A C, in N, iungaturque recta B N. Quoniam igitur eſt triangulum

A B C,

Digitized by Google

ABC, ad triangulum NBC; & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum CM, vt altitudo AI, ad altitudinem IL, vel ad DK, ipſi IL, æqualem, hoc eſt, vt O, ad P, per ea, quæ ad 1. propoſ. huius lib. ex Commandino oſtendimus; quòd triangulorum, & parallelogrammorum eadem ſit baſis BC: Et vt triangulum NBC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CM, ad parallelogrammum EH, a ita eſt baſis BC, ad baſin EF, (cum eadem ſit altitudo) hoc eſt, ita P, ad Q: b erit ex æquo ABC, ad DEF, & CG, ad EH, vt O, ad Q. a 1. ſex. b 22. quinti.



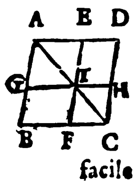
Quare cum proportio O, ad Q, componatur ex proportione O, ad P, hoc eſt, ex proportione altitudinis AI, ad altitudinem DK; & ex proportione P, ad Q, hoc eſt, ex proportione baſis BC, ad baſin EF. Ex eiſdem proportionibus componetur proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammi CG, ad parallelogrammum EH. Quod eſt propoſitum.

EODEM pacto oſtendetur proportio trianguli DEF, cuius altitudo minor eſt, ad triangulum ABC, & parallelogrammi EH, ad parallelogrammum CG, compoſita eſſe ex proportione baſis EF, ad baſin BC, & proportione altitudinis DK, ad altitudinem AI. Si enim fiat, vt EF, ad BC, ita Q, ad P; & vt DK, ad AI, ita P, ad O, & reliqua fiant, vt prius; c erit triangulum DEF, ad triangulum NBC, & parallelogrammum EH, ad parallelogrammum CM, vt EF, ad BC, hoc eſt, vt Q, ad P. Item triangulum NBC, ad triangulum ABC, & parallelogrammum CM, ad parallelogrammum CG, vt LI, ſeu DK, ad AI, hoc eſt, vt P, ad O; ex iis, quæ ad propoſ. 1. huius lib. ex Commandino demonſtrauimus. d Ex æquo igitur erit, vt DEF, ad ABC, & EH, ad CG, ita Q, ad O. Quocirca cum proportio Q, ad O, componatur ex proportione Q, ad P, hoc eſt, ex proportione baſis EF, ad baſin BC; & ex proportione P, ad O, id eſt, ex proportione altitudinis DK, ad altitudinem AI; componetur etiam proportio DEF, ad ABC, & EH, ad CG, ex eiſdem proportionibus. Quod eſt propoſitum. c 1. ſex. d 22. quinti.

THEOR. 18. PROPOS. 24. xxiij.

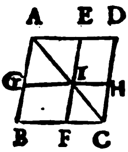
IN omni parallelogrammo, quæ circa diametrum ſunt, parallelogramma & toti, & inter ſe ſunt ſimilia.

ESTO parallelogrammum ABCD, in quo ducatur diameter AC, & per quodlibet eius punctum I, ducantur duæ rectæ EF, GH, parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico parallelogramma FG, FH, circa diametrum, ſimilia eſſe & toti parallelogrammo, & inter ſe ſe. Quod enim æquiangula ſint toti,



facile

facile oſtendetur. Nam angulus G A E, idem eſt, qui angulus
a 29. pri BAD; a & angulus externus A E I, æqualis interno A D C; & an-
mi. gulus A G I, externus interno A B C, & angulus E I G, exter-
nus interno B F I; & hic externus interno B C D. Quare æqui-
angulum eſt E G, parallelogrammum parallelogrammo B D:

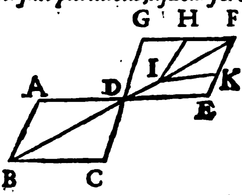


Et eadem ratione eidem B D, æquiangulum erit F H. Quod autem latera circa æquales angulos habeant proportionalia lateribus totius, hoc modo demonſtrabimus. Cum triangulum A G I, æquiangulum ſit triangulo A B C, & triangulum A E I, triangulo A D C, vt perſpicuum eſt ex 29. propoſ. lib. 1. vel etiam ex co-
b 4. ſex. roll. propoſ. 4. huius lib. b erit vt A B, ad B C, ita A G, ad G I, at-
que ita latera circa æquales angulos B, & G, proportionalia ſunt.
c 4. ſex. Rurſus c erit, vt B C, ad C A, ita G I, ad I A; Item vt C A, ad C D,
d 22. ita I A, ad I E. d Ex æquo igitur, vt B C, ad C D, ita eſt G I, ad I E,
quinti. ac propterea & latera circa æquales angulos B C D, G I E, propor-
tionalia exiſtunt. Non aliter demonſtrabuntur latera circa reli-
quos angulos æquales, eſſe proportionalia. Quare per definitio-
nem, ſimile erit parallelogrammum E G, toti parallelogrammo
B D. Eadem arte oſtendes parallelogrammum F H, ſimile eſſe ei-
e 21. ſex dem parallelogrammo B D; e atque adeo & ipſa inter ſe ſimilia
ti. erunt. In omni ergo parallelogrammo, quæ circa diametrum
ſunt, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

INTELLIGENDA autem ſunt parallelogramma circa diametrum totius eſſe talia, quæ habeant vnum angulum cum toto parallelogrammo communem, vt manifeſtum eſt ex forma demonſtrationis.

QVOD ſi circa diametrum alicuius parallelogrammi productam conſiſtat parallelogrammum aliud, ita vt duo huius latera rectas duas componant lineas cum duobus lateribus alterius, vel certe illa his ſint parallela, iiſdem fere mediis oſtendetur, hoc illi eſſe ſimile. Parallelogrammi enim A B C D, diameter B D ſit producta ad F, circa quam conſiſtat parallelogrammum D E F G, cuius duo latera D E, D G, rectas lineas efficiant cum A D, D C, lateribus parallelogrammi A C. Dico parallelogrammum G E, ſimile eſſe parallelogrammo A C. Quod enim ambo inter ſe ſint æquiangula, facile



f 29. pri *oſtendetur. f Nam quia angulus A, æqualis eſt angulo alterno A D G,*
mi. *huic autem æqualis quoque eſt alternus angulus G; erunt æquales*
anguli

Digitized by Google

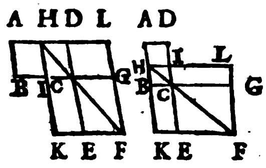
anguli A, & G. a Quare his oppoſiti C, & E, æquales quoque erunt. a 34. primi.
b Rurſus quia anguli A D C, G D E, ad verticem, ſunt æquales, b 15. primi.
c erunt hi quoque oppoſiti A B C, G F E, æquales. Igitur æquiangula ſunt G E, A C, parallelogramma. Quod autem latera habeant proportionalia circum æquales angulos, hac ratione fiet perſpicuum. Cum triangulum B A D, æquiangulum ſit triangulo D G F, & triangulum B C D, triangulo D E F, vt conſtat ex propoſ. 29. lib. 1. d Erit vt B A, ad A D, ita D G, ad G F. Rurſus vt A D, ad D B, ita G F, ad F D, & vt D B, ad D C, ita F D, ad F E, e ac propterea ex æquo vt A D, ad D C, ita G F, ad F E. Sunt igitur latera circa angulos A, A D C, proportionalia lateribus circa angulos G, G F E, qui illis æquales ſunt. Non ſecus oſtendes, reliqua latera circa angulos æquales proportionalia eſſe. Quare ſimilia ſunt parallelogramma A C, G E. c 34 primi. d 4. ſex. e 22. quinti.

QVOD ſi circa eandem diametrum conſiſtat parallelogrammum H I K F, habens latera parallela lateribus parallelogrammi A C, idem demonſtrabitur. Nam productis A D, C D, donec occurrant rectis F K, F H, productis in E, & G; erit H K, ſimile ipſi G E, f vt Euclides demonſtrauit: Atqui eidem G E, ſimile eſt quoque A C, vt nunc oſtendimus. g Igitur & H K, A C, inter ſe ſimilia ſunt. Quod eſt propoſitum. f 24. ſexti. g 21. ſexti.

SED & abſoluemus cum Peletario ſequens problema.

DATIS duobus parallelogrammis æquiangulis, ſed non ſimilibus: ex quouis illorum alteri ſimile reſecare.

DVO parallelogramma æquiangula, ſed non ſimilia, ſint A B C D, C E F G, & ex A B C D, abſcindendum ſit parallelogrammum ipſi C E F G, ſimile. Coniungantur ambo ad angulos æquales B C D, E C G, ita vt ſit vna linea recta B C G, & propterea, vt ad propoſ. 15. lib. 1. demonſtratum eſt, E C D, quoque vna recta linea. Deinde ducta diameter F C, producatur, donec in H, ſecet vel

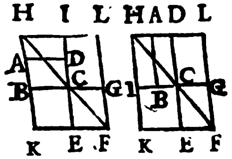


latus A D, vel latus A B, (Neque enim in punctum A, cadet: quia A C, eſſet ſimile ipſi C F, vt demonſtratum eſt, quod eſt contra hypotheſim) & per H, ducatur H I, parallela ipſi A B, vel ipſi A D. Dico parallelogrammum abſciſſum H C, ſimile eſſe ipſi C F. Si enim totum parallelogrammum K L, compleatur, erunt H C, C F, circa diametrum. Quare inter ſe ſimilia erunt, vt Euclides demonſtrauit in hac propoſitione.

EADEM autem arte fere alterutrum ipſorum augeri poterit, vt fiat ſimile alteri. Sit enim augendum A B C D, vt fiat ipſi C E F G, ſimile. Coniungantur vti prius, & diameter F C, extendatur, donec in H, ſecet vel latus B A, protractum, vel latus D A, protractum.

Neque

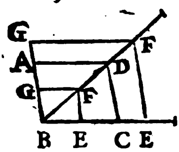
Digitized by Google



Neque enim in punctum A, cadet: quia A C, eſſet ipſi C F, ſimilis, vt demonſtratum eſt, quod non ponitur. Deinde per H, ducatur H I, parallela ipſi A D, vel ipſi A B, donec ſecet vel latus C D, protractum, vel C B, protractum in I. Dico parallelogrammum auctum H C, ſimile eſſe parallelogrammo C F. Nam ſi compleatur totum parallelogrammum K L, conſiſtent H C, C F, circa diametrum; a *Quare ſimilia inter ſe erunt.*

a 24. ſexti.

PERSPICVVM autem eſt ex demonſtratione huius theorematis facta ab Euclide, & ex probatione theorematis à nobis propoſiti in hoc ſcholio, parallelogramma circa eandem diametrum non ſolum eſſe ſimilia, verum etiam ſimiliter poſita. Vnde propoſito quouis parallelogrammo A B C D, ſi maius debeat deſcribi illi ſimile ſimiliterque poſitum, producendum erit latus vnum, nempe B C; Atque ex E, quolibet puncto vltra C, ipſi C D, parallela E F, ducenda, ſecans diametrum B D, productam in F, & per F, ducenda F G, parallela ipſi A D, occurrens rectæ B A, productæ in G. b *Erit enim parallelogrammum G E, ſimile ſimiliterq; poſitum ipſi A C, & maius eodem. Quod ſi minus debeat deſcribi, ſumendum erit punctum E, citra C, & reliqua peragenda, vt prius, vt figura indicat.*



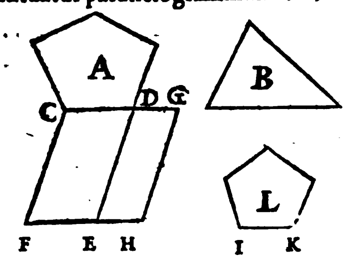
b 24. ſexti.

xxv. PROBL. 7. PROPOS. 25.

DATO rectilineo ſimile ſimiliterque poſitum, & alteri dato æquale idem conſtituere.

SINT data duo rectilinea A, & B; ſitq; conſtituendum aliud rectilineum, quod ſimile quidem ſit ipſi A, æquale vero ipſi B. Super C D, vnum latus rectilinei, cum ſimile debet conſtitui, c conſtituatur parallelogrammum C E, in quouis angulo, æquale rectilineo A; Et ſuper rectam D E, in angulo E D G, qui æqualis ſit angulo D C F, parallelogrammum D H, æquale ipſi B, eritque tam C D G, quam F E H, linea vna recta, vt demonſtratum eſt propoſ. 45. lib. 1. d Inueniatur iam inter rectas C D, D G, media proportionalis I K; e ſuper quam conſtituatur rectilineum L, ſimile ipſi A, ſimiliterq; poſitum. Dico L, æquale eſſe alteri rectilineo B.

c 44. vel 45. primi.



d 13. ſexti.
e 18. ſexti.

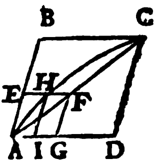
Cum

Cum enim ſint proportionales tres rectæ C D, I K, D G; erit per coroll. propoſ. 19. vel 20. huius lib. vt C D, prima ad D G, tertiam, ita A, rectilineum ſuper primam C D, ad rectilineum L, ſuper I K, ſecundam ſimile ſimiliterq; deſcriptum: *a* Vt autem C D, ad D G, ita eſt parallelogrammum C E, ad parallelogrammum D H, eiuſdem altitudinis. *b* Igitur erit vt C E, ad D H, ita A, ad L. *c* Vt autem C E, ad D H, ita eſt A, ad B: propterea quod parallelogrammum C E, rectilineo A; & parallelogrammum D H, rectilineo B, conſtructum eſt æquale. *d* Quare erit vt A, ad B, ita A, ad L; *e* proptereaque æqualia erunt rectilinea B, & L: Eſt autem & L, ſimile ipſi A, ſimiliterque poſitum per conſtructionem. Dato igitur rectilineo ſimile ſimiliterque poſitum, & alteri dato æquale idem conſtituimus. Quod erat faciendum.

a 1. *ſext.* b 11. *quinti.* c 7. *quinti.* d 11. *quinti.* e 9. *quinti.*

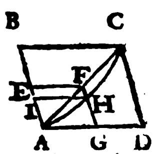
THEOR. 19. PROPOS. 26. xxiiij.

SI à parallelogrammo parallelogrammum ablatum ſit, & ſimile toti, & ſimiliter poſitum, communem cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum conſiſtit.



EX parallelogrammo B D, abſciſſum ſit parallelogrammum E G, ſimile ei ſimiliterq; poſitum, habens cum ipſo angulum communem E A G. Dico E G, conſiſtere circa diametrum totius B D. Ducantur enim rectæ A F, C F, quæ ſi fuerint vna linea recta, perſpicuum eſt, cum A F, ſit diameter ipſius E G, & A C, diameter ipſius B D, parallelogrammum E G, conſiſtere circa diametrum A F C, totius parallelogrammi. Quod ſi A F, C F, non dicantur efficere lineam rectam, ducatur totius parallelogrammi diameter A C, ſecans latus E F, in H, puncto, per quod ipſi F G, parallela agatur H I. Quoniam igitur parallelogramma B D, E I, ſunt circa eandem diametrum A H C; *f* ipſa erunt ſimilia, ſimiliterque poſita. *g* Quare erit vt B A, ad A D, ita E A, ad A I. Sed vt B A, ad A D, ita quoque eſt E A, ad A G, quod parallelogramma B D, E G, ponantur etiam ſimilia, ſimiliterque poſita. *h* Igitur erit vt E A, ad A I, ita E A, ad A G. *i* Ac propterea æquales erunt rectæ A I, A G, pars, & totum: quod eſt abſurdum.

f 24. *ſexti.* g 1. *def. ſexti.* h 11. *quinti.*

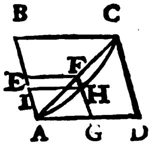


QVOD ſi dicatur recta A H C, ſecare alterum latus F G. Tunc ducta H I, parallelā ipſi E F, *k* erunt rurſus ſimilia parallelogramma B D, I G, ſimiliterque poſita. *l* Quare erit vt D A, ad A B, ita G A, ad A I: Sed vt D A, ad A B, ita quoq; eſt G A, ad A B, ob ſimilitudinem parallelogram-

i 9. *quinti.* k 24. *ſexti.* l 2. *def. ſexti.*

morum

Digitized by Google

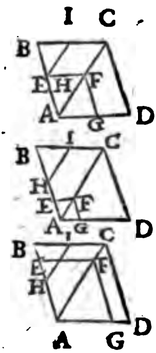


a 11. quinti. b 9. quinti.

morum B D, E G. *a* Igitur erit vt G A, ad A I, ita G A, ad A E, *b* ideoque æquales erunt rectæ A I, A E; pars & totum: Quod eſt abſurdum. Conſtituunt ergo rectæ A F, F C, vnam rectam lineam; hoc eſt, ducta diameter A C, tranſit per punctum F; & ducta diameter A F, cadit in punctum C. Itaque ſi à parallelogrammo parallelogrammum ablatum ſit, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

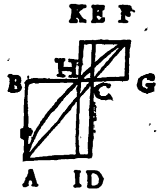
ALITER idem theorema demonſtrabimus oſtenſiue, hoc modo. Diuiſis lateribus A B, B C, biſariam in punctis H, I, ſiue punctum H, cadat in punctum E, ſiue ſupra ſiue infra, ducantur rectæ H I, A F.



Quoniam igitur, propter ſimilitudinem parallelogrammorum, eſt vt A B, ad B C, ita A E, ad E F; c 15. quinti. *Vt autem tota A B, ad totam B C, ita eſt dimidia H B, ad dimidiam B I;* d 11. quinti. *d Erit vt H B, ad B I, ita A E, ad E F. Triangula igitur H B I, A E F, cum habeant circa angulos B, E, (qui æquales ſunt, ob ſimilitudinem parallelogrammorum B D, E G: Vel quia vnus eſt internus, &* e 30. primi. *alter externus in parallelis B C, E F, e quæ parallelæ ſunt, cum vtraque parallela ſit ipſi A D,)* f 6. ſex. *latera proportionalia, f erunt æquiangula, habebuntq; æquales angulos B H I, E A F, externum,* g 28. primi. *& internum inter rectas H I, A F. g Quare parallelæ erunt rectæ H I, A F. Quoniam verò re-* h 2. ſex. *cta, quæ ex puncto A, ad punctum C, duci concipitur, h parallela quoque eſt recta H I, propterea quod latera A B, B C, trianguli tunc conſtituti A B C, proportionaliter eſſent ſecta in H, & I, vtpote biſariam; efficitur, vt ducta recta A C, eadem fiat quæ A F, tranſeatq; per punctum F, cum ex puncto A, ſolum vna linea parallela rectæ H I, poſſit duci, vt manifeſtum eſt. Conſiſtunt ergo B D, E G, parallelogramma ſimilia, ſimiliterque poſita circa eandem diametrum A F C. Quod eſt propoſitum.*

QVOD ſi duo parallelograma ſimilia ſimiliterque poſita non habeant angulum communem, ſed vnum ſit extra aliud, hac tamen lege, vt ita ſint connexa inter ſe ſecundum duos eorum angulos æquales, vt duo latera vnius cum duobus lateribus alterius duas rectas lineas conſtituant; demonſtrabimus iiſdem fere mediis, ea circa eandem conſiſtere diametrum. Sint enim duo parallelogramma ſimilia ſimiliterque poſita B D, E G, quæ ad angulos æquales B C D, G C E, ita coniungantur, vt lineæ B C, C G, in directum iaceant, & ob id, per ea, quæ ad propoſ. 15. lib. 1. oſtendimus, lineæ D C, C E, vnam quoque

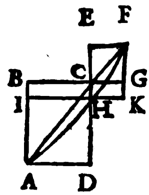
lineam



lineam rectam componant. Dico parallelogramma B D, E G, circa eandem conſiſtere diametrum, hoc eſt, diametrum A C, cum diametro F C, vnam rectam lineam conficere. Si enim A C, F C, non faciunt vnam lineam rectam, ducatur ex A, ad F, linea recta ſecans B C, in H, puncto, per quod agatur H I, parallela ipſi C D, occurrens rectæ F E, productæ in K. Quoniam igitur parallelogramma B I, K G, circa eandem diametrum A H F, producta conſiſtunt, efficiuntque duæ rectæ B H, H I, cum duabus rectis H G, H K, duas lineas rectas, ipſa erunt ſimilia ſimiliterque poſita, per ea, quæ ad propoſ. 24. huius lib. demonſtrauimus. Quare erit vt H B, ad B A, ita F K, ad K H. a *Habet autem C B, maior ad B A, proportionem maiorem, quam H B, minor ad eandem B A; & eſt vt C B, ad B A, ita F E, ad E C, eo quod parallelogramma B D, E G, ponuntur ſimilia ſimiliterque deſcripta. Igitur & F E, ad E C, hoc eſt, ad ſibi æqualem K H, maiorem habebit proportionem, quam H B, ad B A, hoc eſt, quam F K, ad K H. Quam ob rem ſi F E, ad K H, maiorem habeat proportionem, quam F K, ad eandem K H;* b *erit E F, maior quam F K; pars quam totum. Quod eſt abſurdum.*

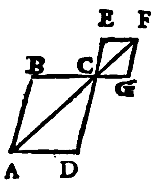
a 8. quinti.
b 10. quinti.

QVOD ſi quis dicat, rectam A H F, ſecare latus C D. Tunc per H, ducta recta B C, parallela H I, quæ occurrat rectæ F G, protractæ in K; erunt rurſus ſimilia ſimiliterque poſita parallelogramma I D, E K, per ea, quæ ad propoſ. 24. huius lib. oſtendimus. Quare erit vt H D, ad D A, ita F K, ad K H. c *Habet autem C D, ad D A, maiorem proportionem, quam H D, ad D A; Et eſt vt C D, ad D A, ita F G, ad G C; propterea quod parallelogramma B D, E G, ſimilia ſimiliterque poſita ſunt conceſſa. Igitur & F G, ad G C, hoc eſt, ad ſibi æqualem K H, maiorem habebit proportionem, quam F K, ad K H;* d *ideoque F G, maior erit, quam F K; pars quam totum: Quod eſt abſurdum.*



c 8. quinti.
d 1. quinti.

OSTENSIVE idem hac ratione oſtendetur. Quoniam propter ſimilitudinem parallelogrammorum B D, F G, anguli, B, E, ſunt æquales, eſtque vt A B, ad B C, ita C E, ad E F; e *habebunt triangula A B C, C E F, circa angulos æquales B, & E, latera proportionalia; atque idcirco æquiangula erunt, habebuntque angulos B C A, E F C, æquales. Addito ergo communi angulo B C F, erunt duo anguli B C A, B C F, duobus angulis E F C, B C F, æquales:* f *Sed hi inter parallelas B C, E F, æquales ſunt duobus rectis. Igitur & B C A, B C F, duobus erunt rectis æquales;* g *Ac propterea*

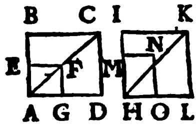


e 6. ſex.
f 29. primi.
g 14. primi.

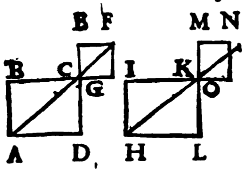
propterea A C, F C, vnam component rectam lineam. Quod eſt propoſitum.

RECTE autem Euclides in theoremate voluit, parallelogrammum à toto ablatum non ſolum eſſe toti ſimile, verum etiam ſimiliter poſitum, vt oſtendatur circa eandem eſſe cum toto diametrum. Nam ſi ex altera parte longiori B D, abſcindatur altera parte longius E G, circa eandem cum toto diametrum conſiſtens, a erit E G, ſimile ſimiliterque poſitum. At verò ſi in rectangulo I L, quod ſit æquilaterum, & æquiangulum ipſi B D, ſumatur H M, æqualis ipſi E F, & M N, æqualis ipſi A E, &c. erit quidem rectangulum M O, æquale & ſimile rectangulo E G, propter æqualitatem laterum, & angulorũ, qui ſunt recti; & ob id ſimile rectangulo I L; ſed tamen quia non eſt ſimiliter poſitum, non conſiſtit circa eandem cum toto I L, diametrum.

a 24. *ſexti.*



IDEM quoque hic perſpicitur in rectangulis ſimilibus, quorum vnum eſt extra alterum, ſecundum tamen angulos eorum ita inter ſe connexa, vt duo latera vnius in directum iaceant cum duobus lateribus alterius, qualia ſunt parallelogramma rectangula B D, E G; & I L, M O; in quibus E G, quidem conſiſtit circa eandem diametrum cum rectangulo BD, quoniam eſt ſimiliter poſitum: At verò M O, minime conſiſtit circa eandem diametrum cum rectangulo I L, quia non eſt ſimiliter poſitum, quamuis ſimile ſit, cum prorſus ſit æquale ipſi E G. Nam K M, æqualis eſt ipſi E F, & M N, ipſi F C, &c.



xxvj. THEOR. 20. PROPOS. 27.

OMNIVM parallelogrammorum ſecundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumque figuris parallelogrammis ſimilibus ſimiliterque poſitis, ei, quod à dimidia deſcribitur; maximum id eſt, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammum ſimile exiſtens defectui.

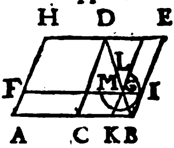
DETVR recta A B, diuiſa bifariam in C, ſuperque eius dimidiam B C, conſtituatur quodcunq; parallelogrammum C D E B, cuius diameter B D. Si igitur compleatur totum parallelogrammum A B E H, erit parallelogrammum A D, ſuper dimidiam A C, conſiſtens, applicatum ſecundum A B, deficiens parallelogrammo C E, & exiſtens ſimile defectui C E. Dico parallelogrammum A D, ad dimidiam A C, applicatum deficienſq; parallelogrammo C E, maximum eſſe omnium, quæ ſecundum A B, rectam applicantur.

cantur.

Digitized by Google

tantur, deficiuntq; parallelogrammis ſimilibus ſimiliterque poſitis ipſi C E. Sumpto enim puncto G, vtcunque in diametro B D, & ductis per G, rectis F G I, K G, quæ ſint parallelæ rectis A B, B E; erit parallelogrammum F K, ſecundum rectam A B, applicatum, deficiens parallelogrammo K I, *a* quod ipſi C E, ſimile eſt, ſimiliterque poſitum, cum ſit circa eandem cum C E, diametrum. *b* Quoniam vero complementa C G, G E, æqualia ſunt; ſi addatur commune K I, erunt quoq; æqualia C I, K E: *c* Eſt autem C I, æquale ipſi C F, propter baſes æquales A C, C B. Igitur & C F, K E, æqualia erunt; additoq; communi C G, æqualia erunt parallelogrammum A G, & gnomon L M. Quare cum C E, maius ſit gnomone L M, (continet enim C E, propter gnomonem, parallelogrammũ adhuc D G,) erit quoque A D, *d* æquale exiſtens ipſi C E, propter baſes æquales A C, C B, maius quam parallelogrammũ A G; eodem parallelogrammo D G. Eodemque modo oſtendetur A D, maius eſſe omnibus parallelogrammis, quæ ita ſecundum rectam A B, applicantur, vt punctum G, ſit inter puncta B, & D, hoc eſt, quæ occupant maiorem lineam ſemiſſe A C, habentque minorem altitudinem, quam A D; dummodo defectus ſimiles ſint ipſi C E.

a 24. ſexti. b 43. primi. c 36. primi. d 36. primi.

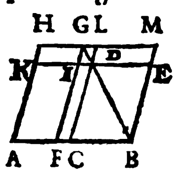


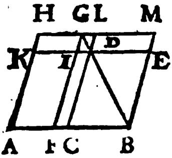
ALITER demonſtrabitur A D, maius eſſe parallelogrammo A G, hoc modo. *e* Parallelogramma F D, D I, ſunt æqualia, cum baſes H D, D E, ſint æquales: Eſt autem D I, maius quam G E, hoc eſt, quam complementum C G, (*f* quod ipſi G E, æquale eſt,) parallelogrammo D G. Igitur & F D, maius erit, quam C G, parallelogrammo eodem D G. Atq; idcirco addito communi C F; maius erit A D, quam A G, parallelogrammo eodem D G.

e 36. primi. f 43. primi.

QVOD ſi punctum G, ſumatur in diametro B D, producta extra parallelogrammum C E. Tunc ducta per G, recta H M, quæ ſit parallela ipſi A B, occurratque rectis A K, B E, protractis in H, & M. Item ducta G F, parallela ipſi A H, erit parallelogrammum A G, applicatũ ſecundum rectam A B, deficiens parallelogrammo F M, *g* quod ipſi C E, eſt ſimile ſimiliterque poſitum, cum ſit circa eandem diametrum cum C E. Dico adhuc maius eſſe A D, ipſo A G. Protracta enim C D, ad L, erunt æquales rectæ H L, L M, *h* cum æquales ſint æqualibus A C, C B; *i* ideoque æqualia parallelogramma H D, D M. *k* Cum igitur D M, ſit æquale complemento D F; erit & H D, æquale ipſi D F. Eſt autem H D, maius quã H I, parallelogrammo I L. Quare & D F, maius erit quam H I, eodem parallelogrammo I L. Ac propterea communi addito A I, maius erit A D, quam A G, eodem parallelogrammo

g 24. ſex. h 34. primi. i 36. primi. k 43. primi.





IL. Iiſdem argumentis concludes A D, maius eſſe quocunq; parallelogrammo, ita applicato ſecundum rectam A B, vt punctum G, ſit vltra D, in diametro B D, producta; hoc eſt, quod occupat minorem lineam ſemiſſe A C, habetque maiorem altitudinem, quam A D, dummodo defectus ſimilis exiſtat parallelogrammo C E. Itaque omnium parallelogrammorum ſecundum eandem rectam lineam applicatorum, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

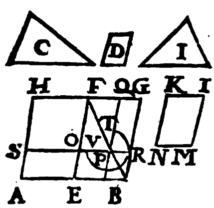
MANIFESTVM autem eſt, lineam, ad quam parallelogrammum deficiens applicatur, eſſe vel maiorem dimidiata A C; qualis eſt A K, in priori figura, vel minorem; cuiuſmodi eſt A F, in figura poſteriori: prout punctum G, ſumitur vel in diametro B D, vel in ea producta ad partes D.

xxvij. PROBL. 8. PROPOS. 28.

AD datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit alteri parallelogrammo dato. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum eſt, non maius eſſe eo, quod ad dimidiam applicatur, cum ſimiles fuerint defectus, & eius, quod ad dimidiam applicatur, & eius, cui ſimile deeſſe debet.

AD datam rectam lineam A B, dato rectilineo C, applicandum ſit parallelogrammum æquale, deficiens parallelogrammo, quod ſit ſimile dato alteri parallelogrammo D. Secta A B, bifariam in E, ſuper medietatem E B, a deſcribatur parallelogrammum E F G B, ſimile ipſi D, ſimiliterque poſitum; & compleatur

a 18. ſexti.



totum parallelogrammum A H G B. Si igitur A F, æquale eſt ipſi C; cum ſit applicatũ ad A B, deficiens parallelogrammo E G, ſimili ipſi D; factum erit, quod iubetur. Si autem A F, maius eſt quam C. (Neque enim minus eſſe debet. Nam cum per propoſ. præcedentem, ipſum ſit omnium applicatorum maximũ, dummodo defectus ſint ſimiles, non poſſet applicari vllum ad A B, quod eſſet ipſi C, æquale, ſed omnia eſſent minora. Propterea adiunxit Euclides; Oportet autem datum rectilineum, &c.) erit quoque ſibi æquale E G, maius quam C. Sit

igitur

Digitized by Google

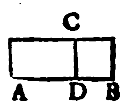
igitur maius rectilineo I. (Qua vero ratione exceſſus duorum rectilineorum ſit inquirendus, docuimus ad propoſ. 45. lib. 1.) *a* & conſtituatur parallelogrammum K L M N, ſimile quidem ſimiliterque poſitum ipſi D, ſeu ipſi E G, æquale vero exceſſui inuento I; vt ſit E G, æquale rectilineo C, & parallelogrammo K M, ſimul; & ob id maius quam K M. Cum igitur ob ſimilitudinem ſit vt E F, ad F G, ita N K, ad K L; erunt quoque latera E F, F G, maiora lateribus N K, K L. Si enim his illa forent æqualia, vel minora, eſſet etiam E G, æquale ipſi N L, vel minus, vt conſtat. Quare abſciſſis rectis F O, F Q, quæ ſint æquales ipſis K N, K L, & completo parallelogrammo F Q P O; erit hoc ipſi L N, æquale, & eidem ſimile ſimiliterque poſitum, & propterea ipſi E G: *b* atque adeo circa eandem diametrum cum E G, conſiſtet, quæ ſit B F. Productis iam rectis Q P, O P, erit parallelogrammum A P, ad rectam A B, applicatum deficiens parallelogrammo P B, *c* quod ſimile eſt ipſi E G, ſimiliterque poſitum, & propterea ipſi D. Dico igitur A P, æquale eſſe ipſi C, rectilineo. *d* Nam cum P G, æquale ſit complemento P E; ſi addatur commune P B, erit & B Q, æquale ipſi E R, hoc eſt, ipſi E S, *e* quod æquale eſt ipſi E R, propter baſes æquales E A, E B. Quare ſi æqualibus A O, B Q, commune addatur E P, erit A P, æquale gnomoni T V. Sed gnomon T V, æqualis eſt rectilineo C. (Nam cum E G, parallelogrammum æquale ſit ipſi C, vna cum L N; ſi auferantur æqualia Q O, L N, remanebit gnomon T V, ipſi C, æqualis.) Igitur & A P, eidem C, æquale erit. Ad rectam ergo A B, applicatum eſt parallelogrammum A P, deficiens parallelogrammo P B, quod ſimile eſt dato parallelogrammo D, & æquale exiſtens rectilineo dato C. Quod faciendum erat.

a 25. ſexti.
b 26. ſexti.
c 24. ſexti.
d 43. primi.
e 36. primi.

SCHOLIVM.

MOVENT hoc loco dubium quoddam Iacobus Peletarius, & Nicolaus Tartalea, quod iuxta noſtram conſtructionem locum non habet, cum ſuper E B, conſtituerimus E G, parallelogrammum non ſolum ſimile ipſi D, verum etiam ſimiliter poſitum; quod ipſi minimè fecerunt. Qua de re, ſi placeat, conſule eorum commentarios.

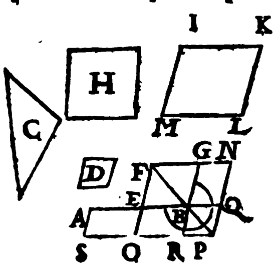
PERSPICVVM autem eſt, ſi ad rectam applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, ipſum applicatum æquale eſſe rectangulo, quod ſub ſegmentis lineæ per applicationem factis continetur. Vt ſi ad DB, applicetur A C, deficiens quadrato C B, erit A C, applicatum, rectangulum contentum ſub A D, & D C. Cum ergo D C, æqualis ſit ipſi D B, propter quadratum C B; continebitur quoque A C, ſub ſegmentis A D, D B, per applicationem factis. Quod eſt propoſitum.



xxviij. PROBL. 9. PROPOS. 29.

AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit parallelogrammo alteri dato.

AD datam rectam lineam A B, dato rectilineo C, applicandum ſit parallelogrammum æquale, excedens parallelogrammo, quod ſimile ſit dato alteri parallelogrammo D. Diuiſa A B, bifariam in E; *a* ſuper dimidiam E B, conſtruatur parallelogrammum E F G B, ſimile ipſi D, ſimiliterque poſitum. *b* Deinde rectilineo C, & parallelogrammo E G, conſtituatur quadratum H, æquale; *c* cui quidem fiat parallelogrammum I K L M, æquale, ſimile vero ipſi E G, ſimiliterque poſitum; eritq; propterea I K L M, maius quam E F G B, quandoquidem æquale eſt quadrato H, quod conſtructum eſt rectilineo C, vna cum parallelogrãmo E G, æquale. Cum igitur ob ſimilitudinem M K, E G, ſit vt M I, ad I K, ita E F, ad F G, erunt quoque latera M I, I K, lateribus E F, F G, maiora. Si enim illa his forent æqualia, vel minora, eſſet quoque M K, vel æquale ipſi E G, vel minus, vt perſpicuum eſt. Productis igitur F E, F G, vt rectæ F O, F N, æquales ſint rectis I M, I K, & completo parallelogrammo O N; erit hoc ſimile, ſimiliterque poſitum ipſi E G, cum ſit æquale ipſi M K, & ſimile, ſimiliterque poſitum. *d* Quare O N, E G, circa eandem diametrum conſiſtent, quæ ſit F P. Productis iam A B, G B, ad Q, R; & P Q, donec cum A S, ipſi F O, parallela conueniat in S, erit parallelogrammum A P, applicatum ad rectam A B, excedens parallelogrammo Q R, *e* quod ſimile eſt ipſi E G, ac propterea ipſi D. Dico igitur A P, æquale eſſe rectilineo C. *f* Nam cum A O, E R, ſint æqualia, *g* & E R, æquale complemento B N, erit & A O, ipſi B N, æquale. Addito ergo communi O Q, fiet A P, æquale gnomoni E P G. Atqui gnomon E P G, æqualis eſt rectilineo C. (Nam cum M K, hoc eſt, O N, æquale ſit rectilineo C, vna cum E G; ſi auferatur commune E G, remanebunt æqualia gnomon E P G, & rectilineum C.) Igitur & A P, æquale erit rectilineo C. Ad datam ergo rectam A B, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum applicatum eſt A P, excedens parallelogrammo R Q, quod ſimile eſt alteri dato D. Quod faciendum erat.



a 18. *ſexti.* b 14. *ſecund.* c 25. *ſexti.* d 26. *ſexti.* e 24. *ſexti.* f 36. *primi.* g 43. *primi.*

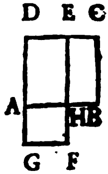
PROBL.

Digitized by Google

PROBL. 10. PROPOS. 30. xxix.

PROPOSITAM rectam lineam terminatam ex-
trema, ac media ratione ſecare.

SIT recta A B, ſecanda extrema ac media ratione. Deſcripto
ſuper eam quadrato A B C D; *a* ad latus D A, applicetur rectan- a 29.
gulum D F, æquale quadrato A C, & excedens parallelogrammo ſexti.
A F, ſimili ipſi quadrato, ita vt ſit A F, quoque quadratum, cum
quadrato ſolum quadratum ſit ſimile. Secet autem recta E F, re-
ctam A B, in H. Dico A B, in H, ſectam eſſe extrema ac media ra-
tione. Cum enim æqualia ſint D F, & A C, ſi dema-
tur commune A E, remanebunt æqualia G H, H C,
quæ cum habeant angulos æquales A H F, B H E,
vtpote rectos, *b* erunt latera circa illos reciproca, b 14.
hoc eſt, erit vt E H, hoc eſt, vt A B, ipſi E H, æqualis, ſexti.
ad H F, hoc eſt, ad A H, ipſi H F, æqualem, vt A H,
ad H B. Quare cum ſit, vt tota A B, ad ſegmentum
A H, ita ſegmentum A H, ad ſegmentum H B, ſecta eſt A B, extre-
ma ac media ratione, per definitionem. Propoſitam ergo rectam
lineam terminatam, &c. Quod erat faciendum.



ALITER quoque oſtendemus A B, eſſe ſectam in H, extrema
ac media ratione. Cum tres lineæ dentur A B, A H, H B, ſitque
rectangulum H C, comprehenſum ſub prima A B, & tertia H B,
æquale quadrato mediæ A H; *c* erunt ipſæ proportionales: vt c 17.
A B, quidem prima ad A H, ſecundam, ita A H, ſecunda ad H B, ſexti.
tertiam. Quare per definitionem ſecta eſt A B, in H, extrema ac
media ratione.

ALITER totum problema conficie-
mus. *d* Diuidatur A B, in C, ita vt rectan- d 11. ſe-
gulum ſub tota A B, & ſegmento C B, cundi.
æquale ſit quadrato alterius ſegmenti A C. Dico A B, in C, eſſe
ſectam extrema ac media ratione. *e* Erunt enim rurſus, vt prius, e 17.
tres lineæ A B, A C, C B, continuè proportionales. Conſtat ergo ſexti.
propoſitum.



SCHOLIVM.

*PRAXIS diuiſionis lineæ rectæ extrema ac media ratione inſti-
tuenda eſt, vt ad propoſ. 11. lib. 2. tradidimus.*

*HABET autem admiranda hæc ſectio lineæ extrema ac media
ratione inſignes vtilitates, proprietateſque, vt in libris Stereometriæ
manifeſtum erit, vt non ſine cauſa à pleriſque Mathematicis linea ita
diuiſa diuinam quodammodo, ob admirabilem eius vim, ac natu-
ram, dicatur habere proportionem: Ab aliis verò ſimpliciter vocetur
diuiſa proportionaliter.*

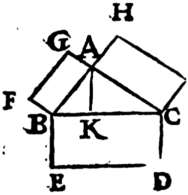
Digitized by Google

THEOR. 21. PROPOS. 31.

IN rectangulis triangulis, figura quæuis à latere rectum angulum ſubtendente deſcripta, æqualis eſt figuris, quæ priori illi ſimiles, & ſimiliter poſitæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur.

TRIANGVLVM rectangulum ſit A B C, habens angulum B A C, rectum; deſcribaturque ſuper B C, quæcunque figura rectilinea B C D E, *a* cui ſimiles ſimiliterque poſitæ ſuper A B, A C, conſtituantur A B F G, A C I H. Dico figuram B D, æqualem eſſe duabus figuris A F, A I. Demiſſa enim A, ad B C, perpendiculari A K, erit, per corollarium propoſ. 8. huius lib. vt B C, ad C A, ita C A, ad C K. Quare vt B C, ad C K, prima linea ad tertiam, ita figura B D, ſuper primam, ad figuram C H, ſuper ſecundam ſimilem ſimiliterque poſitam, per coroll. propoſ. 19. vel 20. huius lib. & conuertendo vt C K, ad B C, ita figura C H, ad figuram B D. Non ſecus oſtendetur, eſſe quoque vt B K, ad B C, ita figuram B G, ad figuram B D; cum tres lineæ B C, B A, B K, ſint quoque proportionales, &c. Quoniam igitur eſt vt C K, prima quantitas ad B C, ſecundam, ita C H, tertia ad B D, quartam; Item vt B K, quinta quantitas ad B C, ſecundam, ita B G, ſexta ad B D, quartam; *b* erit vt prima C K, cum quinta B K, ad B C, ſecundam, ita tertia C H, cum ſexta B G, ad B D, quartam: Sunt autẽ prima C K, & quinta B K, ſimul æquales ſecundæ B C. Igitur tertia C H, & ſexta B G, ſimul æquales quoq; erũt quartæ B D. Quod eſt propoſitũ.

a 18. *ſexti.*



b 24. *quinti.*

c 8. *ſex.* ALITER. *c* Cum triangulo A B C, ſimile ſit triangulum K A C, ſintque homologa latera ipſorum B C, C A; (Nam eſt vt B C, ad C A, in triangulo A B C, ita C A, ad C K, in triangulo K A C,) *d* habebit triangulum K A C, ad triangulum A B C, duplicatam proportionem eius, quam habet C A, ad B C. *e* Habet autem & figura C H, ad figuram B D, proportionem duplicatam proportionis C A, ad B C. *f* Quare erit vt triangulum K A C, ad triangulum A B C, ita figura C H, ad figuram B D. Eadem ratione oſtendetur eſſe, vt triangulum K B A, ad triangulum A B C, ita figuram B G, ad figuram B D. Quoniam ergo rurſus eſt, vt K A C, prima quantitas ad A B C, ſecundam, ita C H, tertia ad B D, quartam; Item vt K B A, quinta ad A B C, ſecundam, ita B G, ſexta ad B D, quartam; *g* erit & prima K A C, compoſita cum quinta K B A, ad ſecundam A B C, ita compoſita tertia C H, cum ſexta B G, ad quartam B D: Sunt autem K A C, K B A, prima &

d 19. *ſexti.*
e 19. vel 20 *ſex.*
f 11. *quinti.*
g 24. *quinti.*

quinta

quinta ſimul, æquales ſecundæ A B C. Igitur C H, B G, tertia & ſexta ſimul, æquales quoque erunt quartæ B D. Quod eſt propoſitum.

ALITER. Vt quadratum rectæ A C, prima quantitas, ad quadratum rectæ B C, ſecundam quantitatem, ita eſt figura C H, tertia quantitas, ad figuram B D, quartam quantitatem; a cùm vtraque proportio ſit duplicata proportionis A C, ad B C. Similiter erit vt quadratum rectæ A B, quinta quantitas, ad quadratum rectæ B C, ſecundam quantitatem, ita figura B G, ſexta quãtitas, ad figuram B D, quartam quantitatem. b Quocirca erit, vt prima quantitas cum quinta, nimirum quadratum rectæ A C, cum quadrato rectæ A B, ad ſecundam, hoc eſt, ad quadratum rectæ B C, ita tertia quantitas cum ſexta, nimirum figura C H, cum figura B G, ad quartam, videlicet ad figuram B D: c Sunt autem quadrata rectarum A C, A B, ſimul æqualia quadrato rectæ B C. Igitur & figuræ C H, B G, figuræ B D, æquales erunt. Quod eſt propoſitum. In rectangulis igitur triangulis, figura quæuis, &c. quod erat oſtendendum.

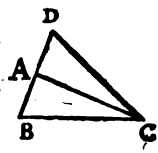
a 19. vel 20. ſexti.
b 24. quinti.
c 47. primi.

SCHOLIVM.

VIDES igitur, longè eſſe vniuerſalius theorema hoc Euclidis, quod ſeſe ad omnes figuras ſimiles ſimiliterque deſcriptas extendit, quàm illud Pythagoræ inuentum, quod ſola quadrata includit, vt propoſ. 47. primi lib. monuimus. Videtur tamen & theorema illud, quod ibi ex Pappo demonſtrauimus, aliqua ex parte adhuc eſſe vniuerſalius quàm hoc, cùm illud de omni triangulo, parallelogrammiſq; etiam non ſimilibus; Hoc verò de triangulo tantummodò rectangulo, figuriſq; ſimilibus, & ſimiliter poſitis proponatur.

CONVERTEMVS etiam theorema hoc ex Campano non aliter, quàm 47. propoſitionem primi lib. in hunc modum.

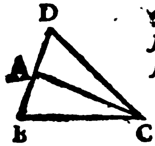
SI figura, quæ ab vno laterum trianguli deſcribitur, æqualis ſit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus deſcribuntur, figuris ſimilibus ſimiliterque poſitis: Angulus comprehenſus ſub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus eſt.



DETVR triangulum A B C, ſitq; figura quæuis ſuper latus B C, deſcripta æqualis duabus figuris ſibi ſimilibus ſimiliterq; deſcriptis ſuper reliqua latera A B, A C. Dico angulum B A C, eſſe rectum. Ducatur enim A D, ad A C, perpendicularis, quæ ſit ipſi A B, æqualis, & connectatur recta C D. Quoniam igitur angulus C A D, rectus eſt, d *erit figura ſuper C D, (quæ ſimilis ſit ei,*

d 31. ſexti.

Digitized by Google



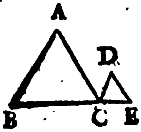
quæ ſuper B C, ſimiliterq; poſita) deſcriptæ æquales figuris ſuper A D, A C, deſcriptis, quæ ei ſimiles ſunt, ſimiliterque poſitæ. Eſt autem figura ſuper A D, æqualis figuræ ſuper A B, ob æqualitatem laterum. Igitur figura ſuper C D, æqualis erit figuris ſuper A B, A C. Cùm igitur figura ſuper B C, eiſdem figuris ſuper A B, A C, æqualis ponatur, erunt figuræ ſuper C D, B C, inter ſe æquales, ac propterea rectæ C D, B C, æquales erunt, vt conſtat ex lemmate propoſ. 22. huius lib. Quoniam igitur latera A D, A C, trianguli A D C, æqualia ſunt lateribus A B, A C, trianguli A B C; & baſis D C, oſtenſa eſt quoque æqualis baſi B C; a erunt anguli D A C, B A C, æquales. Quare cùm D A C, rectus ſit, ex conſtructione, rectus quoque erit B A C. Quod eſt propoſitum.

a 8. primi.

xxx.

THEOR. 22. PROPOS. 32.

SI duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ſecundum vnum angulum cõpoſita fuerint, ita vt homologa eorum latera ſint etiam parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur.



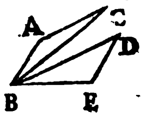
HABBANT triangula A B C, D C E, latera A B, A C, lateribus D C, D E, proportionalia, vt quidem A B, ad A C, ita D C, ad D E, componanturq; ad angulum A C D, ita vt latera homologa A B, D C; Item A C, D E, inter ſe ſint parallela. Dico duo latera reliqua B C, C E, rectam componere lineam. Cùm enim parallelæ ſint A B, D C, b erit angulus A, alterno A C D, æqualis: Eademq; ratione angulus D, eidem A C D, æqualis erit; ac propterea A, & D, inter ſe quoque exiſtent æquales. Quoniam igitur triangula A B C, D C E, habent latera circa æquales angulos A, & D, proportionalia; ipſa c erunt inter ſe æquiangula, habebuntque æquales angulos B, & D C E. Additis ergo æqualibus A, & A C D, erunt duo anguli B, & A, duobus angulis D C E, A C D, hoc eſt, angulo A C E, æquales. Rurſus addito communi A C B; fient tres anguli trianguli A B C, duobus angulis A C E, A C B, æquales: d Sed illi tres æquales ſunt duobus rectis. Ergo & duo A C E, A C B, duobus erunt rectis æquales: e Atq; idcirco B C, C E, vnam rectam lineam conſtituent. Itaq; ſi duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, &c. Quod erat demonſtrandum.

b 29. primi.
c 6. ſext.
d 32. primi.
e 14. primi.

SCHOLIVM.

DEBENT autem prædicta duo triangula ita ſecundum vnum angulum eſſe compoſita, vt vterq; angulorum à lateribus proportionali-

nalibus comprehenſus, alternus ſit illi angulo, ſecundum quem triangula componuntur; veluti in figura theorematis factum eſſe vides. Nam angulo A C D, ſecundum quem triangula ſunt compoſita, alternus eſt tam angulus A, quàm angulus D, quorum vterque lateribus proportionalibus continetur. Hinc enim efficitur, angulos A, & D, eſſe æquales, & propterea triangula eſſe æquiangula; atque adeò ex B C, C E, vnam rectã lineam componi, vt ex demonſtratione liquet.

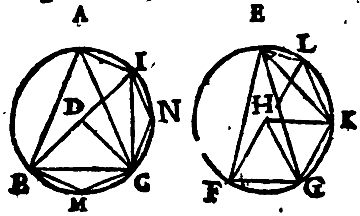


QVOD ſi vterque angulorum lateribus proportionalibus comprehenſus non fuerit alternus angulo, ſecundum quem triangula componuntur, licet reliquæ hypotheſes theorematis ſeruentur, non colligitur neceſſariò concluſio. Nam duo triangula A B C, D B E, habent duo latera A B, A C, duobus lateribus D E, D B, proportionalia, vt quidem A B, ad A C, ita D E, ad D B; compoſitaque ſunt ad angulum C B D; ita vt tam homologa latera A B, D E, quàm A C, D B, ſint parallela: Nihilominùs reliqua duo latera C B, B E, non conſtituunt vnam lineam rectam; propterea quòd angulo C B D, non ſit alternus vterque angulorum A, & D, immò neuter eorum, vt perſpicuum eſt. Quamobrem demonſtratio theorematis locum non habet.

THEOR. 23. PROPOS. 33. xxxiij.

IN æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs, quibus inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant: Inſuper verò & ſectores, quippe qui ad centra conſiſtunt.

SINT duo circuli æquales A B C, E F G, quorum centra D, H; ſumanturq; ex circulis duo arcus quicunque B C, F G, quibus ad centra quidem inſiſtant anguli B D C, F H G; ad circumferentias verò anguli B A C, E F G. Dico eſſe ex ſententia defin. 6. lib. 5. vt arcum B C, ad arcum F G, ita angulum B D C, ad angulum F H G, & angulum B A C, ad angulum E F G; & ſectorem inſuper B D C, qui

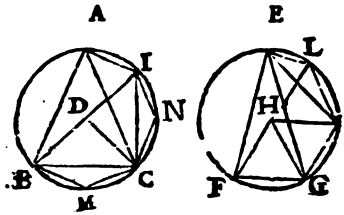


rectis B D, D C, & arcu B C, continetur ad ſectorem F H G; quem comprehendunt rectæ F H, H G, & arcus F G. Ductis enim rectis B C, F G, *a* applicentur ipſis in circulis æquales rectæ; C I, quidem ipſi B C, At verò G K, K L, ipſi F G: ducanturque rectæ I D, K H, L H. Quoniam igitur æquales ſunt rectæ B C, C I, *b* erunt quoque æquales arcus B C, C I, *a* ac pro-

a 1. *quarti.*
b 28. *tertij.*

Digitized by Google

a 27. tertij.



a ac propterea & anguli BDC, CDI, æquales erũt. Eadem ratione æquales erũt & arcus FG, GK, KL, & anguli FHG, GHK, KHL. Quàm multiplex ergo eſt arcus BCI, ipſius arcus BC, tam multiplex erit angulus BDI, ſeu aggregatum angulorum prope centrum D, inſiſtentium arcui BCI, anguli BDC: Et quàm multiplex eſt arcus FGKI, ipſius arcus FG, tam multiplex erit angulus FHL, ſeu aggregatum angulorum prope centrum H, arcui FGKL, inſiſtentium, anguli FHG, quia in tot angulos æquales diuiſi ſunt anguli BDI, FHL, in quot arcus æquales ſecti ſunt arcus BCI, FGKL. Quoniam verò ſi arcus BCI, æqualis fuerit arcui FGKL, b neceſſariò angulus BDI,

b 27. tertij.

angulo FHL, æqualis eſt: Ac proinde ſi arcus BCI, maior fuerit arcu FGKL, neceſſariò angulus BDI, maior eſt angulo FHL, & ſi minor, minor: Deficient propterea vnà arcus BCI, & angulus BDI, æquè multiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BDC, ab FGKL, arcu, & angulo FHL, æquè multiplicibus ſecundæ magnitudinis FG, & quartæ FHG, vel vnà æqualia erunt, vel vnà excedent, ſi ea ſumantur, quæ inter ſe reſpondent. c Quare quæ

c 6. def. quinti.

proportio eſt arcus BC, primæ magnitudinis, ad arcum FG, ſecundam magnitudinem, ea erit anguli BDC, tertiæ magnitudinis, ad angulum FHG, quartam magnitudinem.

ATQVE hoc verum etiam eſt de ſpatijs circa centra, hoc eſt, ita erit arcus BAC, ad arcum FEG, vt ſpatium ad centrum D, inſiſtens arcui BAC, ad ſpatiũ ad centrum H, inſiſtens arcui FEG, vt ex demonſtratione patet. Nam & hæc ſpatia, ſi æqualia ſunt, inſiſtunt æqualibus arcubus, & ſi inæqualia, inæqualibus, &c.

d 15. quinti.

QVONIAM verò vt angulus BDC, ad angulum FHG, d ita eſt angulus BAC, ad angulum FEG, e cùm illi horum ſint dupli, perſpicuum eſt, f ita eſſe quoque angulum BAC, ad angulum FEG, vt eſt arcus FG. Quod tamen eiſdem argumentis demonſtrari poteſt, quibus vſi ſumus in angulis ad centra conſtitutis, ſi prius ducantur rectæ IA, KE, LE, &c.

e 20. tertij.

f 11. quinti.

QVOD ſi ad circumferentias conſtituti ſint anguli eiuſmodi BAC, FEG, vt rectæ ductæ BD, CD; FH, GH, non conſtituant angulos in centris verſus arcus BMC, FG; ſumenda erunt ſpatia BDC, FHG, quæ dupla etiam ſunt angulorum ad circumferentias, ex ſcholio propoſ. 20. lib. 3.

g 27. tertij.

h 24. tertij.

CONSTITVANTVR iam in ſegmentis BC, CI, anguli BMC, CNI, g qui æquales erunt, cùm inſiſtant arcubus æqualibus BAC, CBAI. Quare ſimilia erunt ſegmenta BMC, CNI, h atque

adeò

Digitized by Google

adeò inter ſe æqualia, propterea quòd ſunt ſuper rectas B C, C I, æquales. Additis igitur triangulis B D C, C D I, *a* quæ æqualia quoque ſunt, fient ſectores B D C, C D I, æquales. Quapropter tam multiplex erit ſector B D I, ſectoris B D C, quàm eſt multiplex arcus B C I, ipſius arcus B C. Similiter oſtendemus, ſectorem F H L, tam multiplicem eſſe ſectoris F H G, quàm multiplex eſt arcus F G K L, ipſius arcus F G. Quoniam verò ſi arcus B C I, æqualis fuerit arcui F G K L, ſector quoque B D I, ſectori F H L, æqualis eſt; (vt in ſectoribus B D C, C D I, oſtenſum fuit,) & ſi maior, maior; & ſi minor, minor: Deficient propterea vna arcus B C I, & ſector B D I, æque multiplicia primæ magnitudinis B C, & tertiæ B D C, ab arcu F G K L, & ſectore F H L, æquè multiplicibus ſecundæ magnitudinis F G, & quartæ F H G; vel vna æqualia erunt: vel vnà excedent; ſi ea ſumantur, quæ inter ſe reſpondent. *b* Quamobrem quæ proportio eſt arcus B C, primæ magnitudinis, ad arcum F G, ſecundam magnitudinem, ea erit ſectoris B D C, tertiæ magnitudinis, ad ſectorem F H G, quartam magnitudinem. In æqualibus ergo circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 4 primi.

b 6. def. quinti.

COMMODIVS fortaſſe inſtituetur demonſtratio hoc modo. Sumantur (ſaltem cogitatione) quotuis circuli æquales circulo A B C, atque in ſingulis capiantur ſinguli arcus arcui B C, æquales, quibus inſiſtant anguli tam ad centra, quàm ad circumferentias. Erunt enim omnes hi anguli æquales angulis B D C, B A C, ob æqualitatem arcuum, quibus inſiſtunt: ac proinde eorum aggregata ita multiplicia erunt angulorũ B D C, B A C, vt eſt multiplex aggregatum omnium arcuum ipſius arcus B C. Deinde ſumantur etiam quotuis circuli æquales circulo E F G, & in ſingulis accipiantur ſinguli arcus arcui F G, æquales, &c. Hac enim ratione vitabitur confuſio linearum, & angulorum in circulis A B C, E F G, quæ neceſſariò oritur, quando arcus B C, F G, ſunt magni, & eorum multiplices accipiendi ſunt, vt perſpicuum eſt. Nam ſi arcus eſſent B C I, F G L, quibus inſiſtunt anguli B D I, F H L, ad centra, & B A I, F E L, ad circumferentias; non poterunt eorum multiplices ſumi ſine confuſione, vt patet. Hæc autem confuſio vitatur, ſi plures circuli æquales adhibeantur, vt diximus.

COROLLARIVM I.

HINC manifeſtum eſt, ſic eſſe ſectorem ad ſectorem, vt eſt angulus ad angulum. Vtraque enim proportio eadem eſt proportioni arcus ad arcum. *c* Quare & inter ſe eædem erunt.

c 11. quinti.

COROLLARIVM II.

PERSPICVVM quoque eſt, vt eſt angulus in centro ad quatuor rectos, ita eſſe arcum ſubtenſum illi angulo ad totam circumferentiam.

Et con-

Digitized by Google

Et contrà, vt ſunt quatuor recti ad angulum in centro, ita eſſe totam circumferentiam ad arcum illi angulo ſubtenſum.

NAM vt eſt angulus in centro ad angulum rectum in centro, a ita eſt arcus illi angulo ſubtenſus ad quadrantem angulo recto ſubtenſum. Quamobrem erit vt angulus in centro ad quadruplum anguli recti, nempe ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo ſubtenſus ad quadruplum quadrantis, nimirum ad totam circumferentiam, per ea, quæ ad 22. propoſ. lib. 5. demonſtrauimus. Quod eſt primum. Quoniam igitur eſt vt angulus in centro ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo ſubtenſus ad totam circumferentiam; erit & conuertendo, vt quatuor recti ad angulum in centro, ita tota circumferentia ad arcum angulo in centro ſubtenſum. Quod eſt ſecundum. Verum hoc etiam ita demonſtrabitur. b Cùm ſit, vt angulus rectus in centro ad angulum in centro, ita quadrans angulo recto ſubtenſus ad arcum illi angulo ſubtenſum; erit quoque, per ea, quæ ad propoſ. 22. lib. 5. oſtendimus, vt quadruplum anguli recti, nempe quatuor recti, ad angulum in centro, ita quadruplum quadrantis, nimirum tota circumferentia, ad arcum illi angulo ſubtenſum. Quod eſt propoſitum.

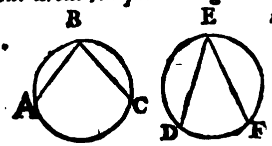
a 33. ſexti.

b 33. ſexti.

IDEM verum eſt de ſpatio in centro: hoc eſt, vt eſt ſpatium in centro ad quatuor rectos, ita eſt arcus ſubtenſus illi ſpatio ad totam circumferentiam, &c. vt ex demonſtratione patet.

SCHOLIVM.

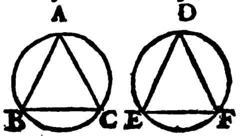
CÆTERVM ex theoremate hoc luce clarius colligitur, angulum qui circumferentiæ alicui inſiſtit, referendum eſſe ad arcum, qui baſis eſt ipſius anguli, non autem ad arcum, in quo exiſtit. Non enim eadem eſt proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcũ, ſi ſumantur arcus, in quibus anguli exiſtunt, vt vult Euclides in propoſito hoc theoremate. Sint enim circuli æquales ABC, DEF, in quibus anguli ad circumferentiam conſtituti ſint B, E; maior quidem B, minor autem E. Quo poſito, erit arcus AC, maior arcu DF, ex ſcholio propoſ. 26. lib. 3. ac propterea



reliquus arcus ABC, minor reliquo arcu DEF. Quare proportio anguli B, ad angulum E, eſt maioris inæqualitatis, proportio verò arcus ABC, ad arcum DEF, minoris inæqualitatis. Non ergo eadem eſt proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum. Quod ſi ſumamus arcus ſuper quos anguli aſcenderunt, quales ſunt arcus AC, DF, tum demum erit angulus B, ad angulum E, vt arcus AC, ad arcũ DF, vt rectè demonſtrauit Euclides. Quocirca cùm dicimus angulum eſſe in ſegmento, aliud intelligere debemus, quàm cùm dicimus, angulum inſiſtere ſegmento ſeu arcui. Id quod in expoſitione definitionis 8. lib. 3. monuimus.

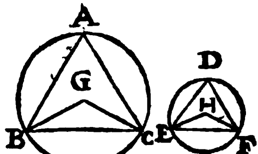
NON

NON obſcurè quoq; ex hoc theoremate demonſtrari poteſt, ſimilitudinem ſegmentorum in circulis ſimilium, quã Euclides definitione 10. lib. 3. definiuit per angulos æquales in ipſis ſegmentis exiſtentes, conſiſtere in eo, quòd ſegmenta, ſeu circumferentiæ ſimiles, ad integras circumferentias circulorum eandem habeant proportionem; & propterea quando ſegmenta totis circulis commenſurabilia ſunt, qualis pars eſt vna circumferentia totius ſuæ circumferentiæ, talis quoq; ſit alia circumferentia ſimilis totius ſuæ circumferentiæ; veluti in expoſitione prædictæ definitionis docuimus. Sint enim primùm duo circuli æquales ABC, DEF, in quibus anguli ad circumferentias conſtituantur æquales BAC, EDF. Quo poſito, ſegmenta BAC, EDF, iuxta Euclidis definitionem præfatam dicentur ſimilia. Manifeſtum autem eſt, eorum circumferentias habere eandem proportionem ad integras circulorum circumferentias. Cùm enim ob circulorũ æqualitatem, a arcus BC, EF, quibus anguli æquales inſiſtunt, ſint æquales; efficitur reliquas circumferentias BAC, EDF, eſſe quoq; æquales. Quare ad totas circumferentias, quæ æquales etiam ponuntur, b eandem proportionem habebunt; Atq; idcirco, quæ pars eſt arcus BAC, totius circumferentiæ ABCA, eadem pars erit arcus EDF, totius circumferentiæ DEFD.



a 26. tertij.
b 7. quinti.

SINT deinde duo circuli inæquales ABC, DEF, in quibus anguli ad circumferentias conſtituantur æquales BAC, EDF: Quo poſito, dicentur ſegmenta BAC, EDF, ex Euclidis ſententia, ſimilia. Dico rurſus arcus BAC, EDF, eandem habere proportionem ad integras ſuas circumferentias. Ducantur enim ad centra G, H, rectæ BG, CG, EH, FH. Quoniam igitur anguli A, & D, æquales ponuntur, erunt quoq; ad centra anguli G, & H, æquales, c cùm hi illorum dupli exiſtant: Vel erunt ſpatia ad centra æqualia, cùm hæc quoque ſint angulorum ad circumferentias dupla, ex ſcholio propoſ. 20. lib. 3. d Quare quatuor recti ad angulum, vel ſpatium G, eandem habebunt rationem, quam ad angulum, vel ſpatium H. Atqui vt quatuor recti ad angulum, vel ſpatium G, ita eſt tota circumferentia ABCA, ad arcum BC. Et vt quatuor recti ad angulum, vel ſpatiũ H, ita eſt tota circumferentia DEFD, ad arcum EF, ex coroll. 2. huius propoſ. 33. e Igitur vt tota circumferentia ABCA, ad arcũ BC, ita erit tota circumferentia DEFD, ad arcum EF. Per conuerſionẽ ergo rationis erit quoq; vt tota circumferẽtia ABCA, ad arcũ BAC, ita tota circumferentia DEFD, ad arcũ EDF. Et conuertendo, vt arcus BAC,



c 20. tertij.
d 7. quinti.
e 11. quinti.

ad to-

Digitized by Google

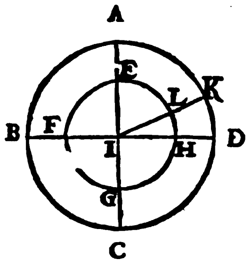
ad totam circumferentiam ABCA, ita arcus EDF, ad totam circumferentiam DEFD. Quocirca qua pars eſt arcus BAC, totius circumferentiæ ABCA, eadem pars erit arcus EDF, totius circumferentiæ DEFD. Quod eſt propoſitum.

CONSTAT igitur, rectè Euclidem vocaſſe ea circulorum ſegmenta ſimilia, in quibus anguli exiſtentes inter ſe ſunt æquales: quandoquidem huiuſmodi ſegmenta eandem habent proportionem ad circulos ſuos integros.

FACILE ex his demonſtrabitur theorema illud, quod & ad calcem cap. 1. in ſphæram, & ad propoſ. 22. lib. 3. ſine proportionibus oſtendimus, videlicet.

SI duo aut plures circuli ex eodem centro deſcribantur, atque ex centro duæ aut plures rectæ lineæ ducantur; erunt arcus inter quaſcunque duas lineas intercepti ſimiles.

SINT duo circuli ABCD, EFGH, circa idem centrum I, deſcripti. Si igitur egrediantur è centro I, duæ rectæ IB, ID, efficientes vnam lineam rectam BD, manifeſtum eſt, arcus BAD, FEH, ſimiles eſſe, cùm ſint ſemicirculi. Rurſus ſi ex I, egrediantur duæ rectæ IA, ID, conſtituentes angulum rectum AID, perſpicuum quoq; eſt, arcus AD, EH, ſimiles eſſe, cùm ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. ſint Quadrantes ſuorum circulorum.



EMITTANTVR iam ex I, duæ rectæ ID, IK, facientes quemcunq; angulum non rectum DIK. Dico adhuc arcus DK, HL, ſimiles eſſe, hoc eſt, ita eſſe arcum DK, ad totam circumferentiam ABCD, vt eſt arcus HL, ad totam circumferentiam EFGH. Quoniam enim vt angulus DIK, ad quatuor rectos, ita eſt ex coroll. huius propoſ. tam arcus DK, ad totam circumferentiam ABCD, quam arcus HL, ad totam circumferentiam EFGH; a. 11. quinti. *a erit vt arcus DK, ad totam circumferentiam ABCD, ita arcus HL, ad totam circumferentiam EFGH, ac proinde arcus DK, HL, ſimiles erunt. Quod eſt propoſitum.*

BREVIVS idem confirmabitur hoc modo. Quoniam arcubus DK, HL, inſiſtunt in centro I, anguli æquales, immò iidem; erunt ex ſcholio propoſ. 22. lib. 3. arcus DK, HL, ſimiles: ac proinde ad totas circumferentias eandem proportionem habebunt, vt paulò antè oſtenſum eſt.

EADEM ratione oſtendemus, arcus BAK, FEL, ſimiles eſſe, id eſt, habere ad totas circumferentias eandem proportionem.

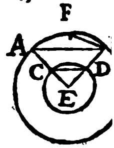
SED

Digitized by Google

SED placet etiam hic demonſtrare lemma, quod ad propoſ
lib. 3. Theodoſij propoſuimus, cùm ad multa alia conducat. Illud a
tem eſt eiuſmodi.

ÆQVALES rectæ lineæ ex circulis inæqualib
auferunt arcus inæquales, maiorq; eſt arcus minoris c
culi, quàm vt ſimilis ſit arcui circuli maioris.

SINT circuli inæquales A B, C D, circa idem centrum E, deſc
pti Ducantur autem ex E, duæ rectæ vtcunq; E A, E B, ſecantes c
culos in A, B, & C, D, punctis; eruntq; arcus A B,
C D, ſimiles, vt proximè demonſtrauimus. Et quo-
niam rectæ E A, E B, ſectæ ſunt in C, D, proportiona-
liter, quòd tam E A, E B, quàm E C, E D, inter ſe æ-
quales ſint; a erunt duæ rectæ A B, C D, parallelæ;
atq; ideo triangula E A B, E C D, ex coroll. propoſ. 4.



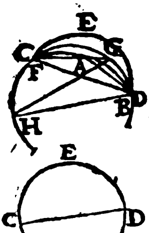
huius lib. ſimilia erunt. b *Erit igitur vt E A, ad A B, ita E C,*
C D. Eſt autem E A, maior quàm E C. c *Igitur & A B, maior*
quàm C D. Accommodetur ergo ipſi C D, in circulo A B, æqualis B
eritq; ex ſcholio propoſ. 28. lib. 3. arcus A B, maior arcu F B. Qu
cùm arcus C D, arcui A B, ſimilis ſit; erit arcus C D, maior, quàn
ſimilis ſit ipſi F B. Aequales igitur rectæ C D, B F, ex circulis inæq
libus A B, C D, arcus inæquales auferunt, maiorq; eſt arcus C D,
culi minoris, quàm vt ſimilis ſit arcui F B, circuli maioris. Quod
propoſitum.

HINC perſpicuum eſt, multò magis maiorem lineam ex circ
minore auferre arcum maiorem, quàm vt ſimilis ſit ei, quem ex
culo maiore aufert linea minor. Cùm enim recta C D, æqualis
B F, auferat arcum C D, maiorem, quàm vt ſimilis ſit arcui I
multò magis linea maior quàm C D, auferet maiorem arcum, q
vt ſimilis ſit arcui F B, cùm illa maiorem arcum abſcindat, q
C D, vt in ſcholio propoſ. 28. lib. 3. oſtendimus.

HÆC autem demonſtratio propoſitum tantum colligit, qua
arcus abſciſſi ſunt ſemicirculo minores, quales ſunt B F, C D, v
ipſa demonſtratione conſtat. Nam aliàs non conſtitueretur ang
in E, centro communi: quod tamen ad demonſtrationẽ requiritur
rum nihilominus erit, ſi arcus ſemicirculo minor circuli minoris
ior eſt, quàm vt ſimilis ſit arcui ſemicirculo minori circuli mai
multò maiorem eſſe arcum ſemicirculo maiorẽ circuli minoris, q
vt ſimilis ſit arcui ſemicirculo minori circuli maioris. Quod ſi q
do contingat, rectam C D, ex minori circulo auferre ſemicirculum
quando eſt diameter circuli; liquidò conſtat, ſemicirculum mi
circuli maiorem eſſe, quàm vt ſimilis ſit arcui ſemicirculo m
circuli maioris; neq; opus tunc erit alia demonſtratione.

Digitized by Google

HINC etiam nullo negotio oſtendemus, æquales rectas lineas in circulis inæqualibus auferre arcus ſimpliciter, & abſolutè inæquales, ita vt arcus minoris circuli ſimpliciter maior ſit arcu circuli maioris, & non ſolùm maior, quàm vt ſimilis ſit. Sint enim rectæ lineæ CD, BF, æquales, auferatq; CD, arcum minoris circuli CED, & FB, arcum circuli maioris FGB. Dico ſimpliciter arcum CED, maiorem eſſe arcu FGB. Congruente enim recta CD, rectæ FB, cadet neceſſariò arcus CED, extra arcum FGB; atq; idcirco arcus CED, maior erit arcu FGB, cùm ille hunc totum intra ſe contineat, ſintq; ambo arcus in eandem partem caui, atq; eadem extrema puncta habeant, vt vult Archimedes in ſuppoſitionibus ante lib. 1. de ſphæra & cylindro. Neq; verò arcus CED, arcui FGB, congruet, aut intra ipſum cadet. Nam ſi dicatur congruere, congruet etiam tota circumferentia circuli CED, toti circumferentiæ circuli FGB, atq; adeò æquales erunt circuli. quod eſt abſurdum, cùm inæquales ponantur. Si verò arcus CED, dicatur cadere intra arcum FCB, cuiuſmodi eſt arcus CAD; quoniam vt paulè antè oſtendimus, arcus CED, id eſt, CAD, maior eſt, quàm vt ſimilis ſit arcui FGB; ſumatur arcus BFH, arcui CAD, ſimilis, atq; ideo maior arcu FGB: Aſſumpto autem in arcu CAD, puncto A, vtcunq;, ducantur rectæ AF, AB, productaq; recta FA, donec arcum FGB, ſecet in G, ducantur rectæ GH, GB. (In figura per incuriã recta GB, ducta non eſt: Igitur ſtudioſus lector eam ducat, oportet.) Itaq; quoniam arcus CAD, HFB, ſimiles ſunt; erunt anguli CAD, HGB, in illis ſegmentis exiſtentes æquales.



a 16. primi. *a Quia verò angulus CAD, angulo CGB, maior eſt, externus interno; & angulus CGB, angulo HGB, maior quoq;, totum parte; erit multò maior angulus CAD, angulo HGB, quod eſt abſurdum. Oſtenſus enim eſt æqualis. Non ergo arcus CED, cadet intra arcum FGB; ſed neq; ei congruit, vt demonſtratum eſt. Cadet ergo extra; atq; ideo maior erit arcus CED, arcu FGB, vt dictum eſt. Quod eſt propoſitum.*

EX quo liquidò conſtat, multò magis maiorem lineam ex circulo minore auferre arcum maiorem ſimpliciter eo, quem minor linea ex circulo maiore abſcindit.

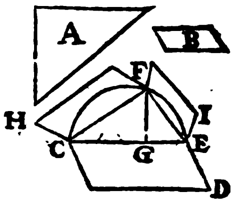
QVONIAM verò Euclides multa dixit de inuentione linearum proportionalium, nihil verò de ſuperficierum, vel planorum proportionalium inueſtigatione nobis præſcripſit; non abs re me facturum exiſtimo, ſi nonnulla problemata, atq; theoremata, quorũ multa circa inuentionem ſuperficierum proportionalium verſantur, ſcitu nõ iniucunda, loco appendicis, partim ex peritis Geometris, partim ex inuentis proprijs, huic ſexto libro annectam: quippe quæ ex demonſtratis ab Euclide facili negotio deducantur. Hinc autem exordiũ capiemus.

A DA-

Digitized by Google

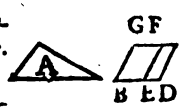
I.

A DATO rectilineo imperatam partem auferre, ita tamen, vt & ablatum, & id, quod relinquitur, ſimile ſit cuiuis rectilineo dato, ſimiliterq; poſitum.



SIT ex rectilineo A, auferenda tertia pars, quæ ſimilis ſit, ſimiliterq; poſita rectilineo B, relinquatq; rectilineum eidem B ſimile, & ſimiliter poſitũ. a Conſtituatur rectilineum CD, æquale quidem ipſi A, ſimile verò, & ſimiliter poſitum ipſi B; ſuperq; vnum eius latus CE, ſemicirculus deſcribatur CFE. b Deinde ablata parte tertia GE, imperata videlicet, ex CE, agatur GF, ad CE, perpendicularis, connectanturq; rectæ CF, EF, c ſuper quas conſtruantur rectilinea FH, FI, ſimilia ſimiliterq; poſita ipſi CD. Dico igitur factum eſſe, quod iubetur. d Cùm enim angulus CFE, rectus ſit, quippe qui in ſemicirculo exiſtat; e erit rectilineum CD, æquale rectilineis HF, FI, atq; adeò, ſi auferatur rectilineũ FI, ſimile ſimiliterq; poſitũ ipſi B, ex rectilineo CD, hoc eſt, ex æquali A, relinquetur rectilineũ HF, ſimile quoq; ipſi B, ſimiliterq; poſitum. Quòd autem rectilineũ ablatum FI, ſit tertia pars rectilinei CD, ita oſtendetur. f Quoniam eſt, vt recta CG, ad GF, ita recta CF, ad FE; g quòd triangula CGF, CFE, ſint ſimilia: Habet autem CG, ad GE, proportionem duplicatam proportionis CG, ad GF, propterea quòd proportionales ſunt tres rectæ CG, GF, GE, ex coroll. propoſ. 8. huius lib. h Item rectilineum HF, ad rectilineum FI, proportionem quoq; habet duplicatam proportionis laterum homologorum CF, FE; Erit vt recta CG, ad GE, ita rectilineum HF, ad rectilineũ FI; quandoquidem hæ proportiones duarum æqualium proportionum duplicatæ ſunt. Componendo igitur erit, vt CE, ad GE, ita duo rectilinea HF, FI, ſimul, hoc eſt, rectilineum CD, quod eſt illis æquale, ad rectilineum FI: Eſt autem CE, ipſius GE, tripla, per conſtructionem. Igitur & rectilineum CD, triplum erit rectilinei FI: Ac propterea hoc illius tertia pars exiſtet. Quod eſt propoſitum.

a 25. ſexti.
b 6. ſexti.
c 18. ſexti.
d 31. tertij.
e 31. ſexti.
f 4. ſexti.
g 8. ſexti.
h 19. vel 20. ſexti.



QVOD ſi pars imperata, nempe tertia, ſimpliciter ſit auferenda fiet id breuiſſimè, hac arte. i Rectilineum datum A, reuocetur ad parallelogrammum GD, æquale; & ex latere BD, auferatur DE, tertia pars imperata: & per E, agatur ipſi BG, parallela EF. Dico DF, tertiam eſſe partem ipſius DG, hoc eſt, rectilinei dati A. Cùm enim ſit k vt DE, ad DB, ita DF, ad DG. Sit autem per conſtructionem DE, ipſius DB, pars tertia; erit & DF, ipſius DG, tertia pars. Quod eſt propoſitum.

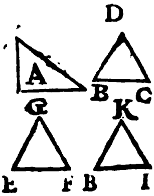
i 45 primi.
k 1. ſexti.

Digitized by Google

II.

DVOBVS datis rectilineis, tertium proportionale inuenire.

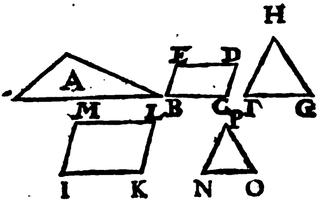
SINT datæ duo rectilinea A, & BCD, quibus inueniendum



a 25. ſexti. *ſit tertium proportionale.* a *Conſtituatur ipſi A, rectilineum æquale EFG, ſimile verò ſimiliterq; poſitum ipſi BCD. Deinde lateribus homologis*
b 11. ſexti. *EF, BC,* b *inueniatur tertia linea proportionalis HI;* c *ſuper quam conſtituatur rectilineum*
c 18. ſexti. *HIK, ſimile ſimiliterque poſitum ipſis EFG, BCD. Dico HIK, eſſe tertiũ proportionale. Cùm*
d 22. ſexti. *enim proportionales ſint rectæ EF, BC, HI;* d *erũt & rectilinea EFG, BCD, HIK, ab illis deſcriptæ (cùm ſint ſimilia, ſimiliterq; poſita) proportionalia. Cùm ergo EFG, per constructionem, æquale ſit ipſi A; erunt & rectilinea A, BCD, HIK, proportionalia. Quod eſt propoſitum.*

III.

TRIBVS datis rectilineis, quartum proportionale inuenire.



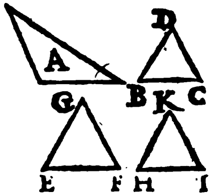
TRIA rectilinea datæ ſint A, BCDE, FGH, quibus quartum ſit inueniendum proportionale. c *Conſtruatur rectilineũ*
e 25. ſexti. *IKLM, æquale quidem ipſi A, ſimile verò ſimiliterque poſitum ipſi BCDE. Tribus deinde rectis IK, BC, FG,* f *inuenta*
f 12. ſexti. *quarta proportionali NO;* g *conſtituatur ſuper NO, rectilineum*
g 18. ſexti. *NOP, ipſi FGH, ſimile ſimiliterq; poſitum. Dico NOP, rectilineum eſſe quartum proportionale. Cùm enim quatuor rectæ IK, BC, FG,*
h 22. ſexti. *NO, ſint proportionales;* h *erunt & rectilinea ſimilia ſimiliterq; poſita ab ipſis deſcriptæ IL, BD, FGH, NOP, proportionalia. Cùm igitur IL, conſtructum ſit æquale ipſi A; erunt & quatuor rectilinea A, BD, FGH, NOP, proportionalia. Quod eſt propoſitum.*

IIII.

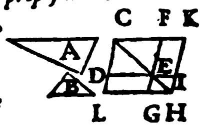
i 25. ſexti. DVOBVS datis rectilineis, medium proportionale inuenire.
k 13. ſexti. *SINT duo rectilinea A, BCD, quibus medium inueniendum eſt proportionale.* i *Conſtituatur rectilineum EFG, æquale ipſi A,*
l 22. ſexti. *& ſimile ſimiliterq; poſitum ipſi BCD. Duabus deinde rectis EF, BG,* k *inuenta media proportionali HI;* l *conſtruatur ſuper HI, recti-*

Digitized by Google

ctilineum H I K, ſimile ſimiliterq; poſitum ipſis E F G, B C D. Dico H I K, medium eſſe proportionale quæſitum. Cùm enim proportionales ſint tres rectæ E F, H I, B C, a erunt quoque rectilinea ab ipſis deſcripta E F G, H I K, B C D, proportionalia, cùm ſint ſimilia ſimiliterq; poſita. Cùm ergo E F G, conſtructum ſit æquale ipſi A; erunt quoq; rectilinea A, H I K, B C D, proportionalia; hoc eſt, erit vt A, ad H I K, ita H I K, ad B C D: ac proinde H I K, medium proportionale erit inter A, & B C D. Quod eſt propoſitum. a 22. ſexti.



ALITER. Sit rurſus inter rectilinea A, & B, perquirendum medium proportionale. b *Conſtituatur ipſi A, æquale parallelogrammum quodcunq; C D E F,* c *ipſi verò B, æquale parallelogrammum E G H I, ſimile verò ſimiliterq; poſitum ipſi C D E F, Connectanturq; hæc parallelogramma ad angulos æquales, vt D E, E I, efficiant vnam lineam rectam, ac propterea per ea, quæ ad propoſ. 15. lib. 1. demonſtrauimus, vna quoq; linea recta componatur ex F E, E G; perficiaturq; totum parallelogrammũ K L. Dico vtrumlibet E K, vel E L, medium eſſe proportionale inter D F, G I, hoc eſt, inter A, & B. Cùm enim ſimilia ſint ſimiliterq; poſita D F, G I; erit vt D E, ad E F, ita G H, ad H I, hoc eſt, ita E I, ad E G,* d *quòd rectæ E I, E G, rectis G H, H I, æquales ſint. Permutando ergo vt D E, ad E I, ita F E, ad E G.* e *Vt autem D E, ad E I, ita eſt D F, ad E K, & vt F E, ad E G, ita E K, ad G I. Igitur vt D F, ad E K, ita E K, ad G E; ac proinde E K, medium proportionale erit inter D F, G I, hoc eſt, inter A, & B. Quod eſt propoſitum.* b 45. primi. c 25. ſexti. d 34. primi. e 1. ſexti.

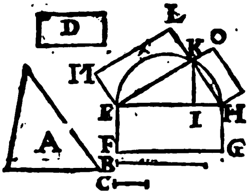


QVOD etiam in hunc modum confirmari poteſt. Cùm D E, G I, ſimilia ſint, ſimiliterq; poſita, f *conſiſtent ea circa eandem diametrũ. Quare complementa E K, E L, æqualia erunt. Vt autem D F, ad E K, ita eſt E L, ad G I,* g *quòd vtraq; proportio eadẽ ſit proportioni D E, ad E I. Igitur erit, vt D F, ad E K, ita E K, ad G I. Quod eſt propoſitum.* f 26. ſexti. g 1. ſexti.

V.

DATO rectilineo duo rectilinea æqualia conſtituere, quæ ſimilia ſint, ſimiliterq; deſcripta cuicunq; rectilineo, habeantq; inter ſe proportionem propoſitam quamcunque.

SIT datum rectilineum A, dataq; proportio rectæ B, ad C, oporteatq; conſtituere duo rectilinea, quæ ipſi A, æqualia ſint, habeantq; proportionem, quam B, & C; ac ſimilia ſimiliterq; poſita ſint rectilineo cuiuis D. h *Conſtituatur rectilineum E F G H, æquale ipſi A, & ſimile ſimiliterq; poſitum ipſi D. Diuiſo deinde latere eius E H, in I,* h 25. ſexti.

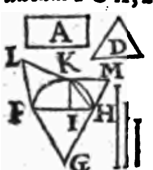


ſecundum proportionem B, ad C, ex iis,
quæ ad propoſ. 10. huius lib demonſtra-
uimus: deſcribatur circa E H, ſemicir-
culus E K H, & ex I, ducatur ad E H,
perpendicularis I K, connectanturq; re-
a 18. ſe- ctæ E K, H K. a Deſcribantur iam ſu-
xti. per E K, K H, rectilinea E K L M, K H-
N O, ipſi E G, vel ipſi D, ſimilia, ſimili-
terq; poſita; quæ dico æqualia etiam eſſe
b 31. ter ipſi E G, ſeu ipſi A, habereq; proportionem datam B, ad C. b Cùm e-
tij. nim angulus E K H, in ſemicirculo exiſtens rectus ſit; c erunt rectili-
c 31. ſe- nea E L, H O, æqualia rectilineo E G, cùm ſint ſimilia inter ſe, ſimili-
xti. terq; deſcripta. d Quoniam verò eſt, vt E I, ad I K, ita E K, ad K H,
d 4. ſe- cum triangula E I K, E K H, ſimilia ſint; Eſt autem E I, ad I H, in
xti. proportione duplicata proportionis E I, ad I K, quòd tres E I, I K, I H,
e 19. vel ſint, ex coroll. propoſ. 8. huius lib. proportionales. e Item E L, ad H O,
20. ſe- in proportione duplicata eius, quam habet latus E K, ad latus homo-
xti. logum K H; erit vt E I, ad I H, hoc eſt, vt B, ad C, ita E L, ad H O.
Dato ergo rectilineo A, exhibuimus duo ſimul æqualia E L, H O,
quæ ſimilia ſunt, ſimiliterq; poſita dato rectilineo D, habentq; propor-
tionem inter ſe datam B, ad C. Quod eſt propoſitum.

VI.

DATO rectilineo, duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuiuis rectilineo ſimilia ſint ſimiliterq; deſcripta, lateraq; eorũ homologa habeãt inter ſe proportionẽ datã.

DETVR rectilineum A, & proportio rectæ B, ad rectam C; opor-
teatq; conſtituere duo rectilinea ipſi A, æqualia, & ſimilia ipſi D, pro-
poſito, ſimiliterq; poſita, quorũ latera homologa proportionem habeãt,
f 11. ſe- *quam B, ad C. f Inuenta ipſis B, C, tertia proportionali E, g fiat recti-*
xti. *lineum F G H, æquale ipſi A, & ſimile ſimiliterq; poſitum ipſi D. Di-*
g 25. ſe- *uiſoq; latere F H, in I, ſecundum proportionem B, ad*
xti. *E, vt ad propoſ. 10. huius lib. oſtendimus; deſcribatur*
circa F H, ſemicirculus F K H; & ex I, ducatur ad
F H, perpendicularis I K, connectanturq; rectæ F K,
H K. h Deſcribãtur iam ſuper F K, H K, rectilinea
h 18 ſe- *F K L, H K M, ipſi F G H, vel ipſi D, ſimilia, ſimili-*
xti. *terque poſita. Dico hæc rectilinea æqualia eſſe ipſi*



BCE

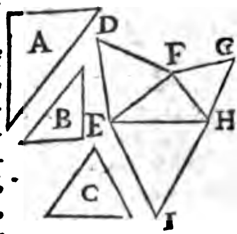
F G H, vel ipſi A, eorumq; latera homologa F K, H K, proportionẽ ha-
i 31. ter- *bere datam rectæ B, ad rectam C. i Cùm enim angulus F K H, in ſe-*
tij. *micirculo rectus ſit; k erunt rectilinea F K L, H K M, rectilineo F G H,*
k 31. ſe- *ideoq; & rectilineo A, æqualia. l Quoniam verò eſt, vt F I, ad I K, ita*
xti. *F K, ad H K, ob ſimilitudinem triangulorum F I K, F K H; Eſt au-*
l 4. ſext.

tem

tem F I, ad I H, in proportione duplicata proportionis F I, ad I K: (quod tres F I, I K, I H, proportionales ſint, ex coroll. propoſ. 8. huius lib.) ac propterea in proportione duplicata proportionis laterum homologorum F K, H K. Item & proportio B, ad E, (æquali proportioni F I, ad I H, ex conſtructione) in duplicata eſt proportione proportionis B, ad C, ex defin. Igitur eadem erit proportio F K, ad H K, quæ B, ad C, quando quidem ipſarum duplicatæ proportiones F I, ad I H, & B, ad E, æquales ſunt. Conſtat ergo propoſitum.

VII.

DVOBVS datis rectilineis, æquale rectilineum conſtituere, quod ſimile ſit, ſimiliterque poſitum cuiuis rectilineo dato.

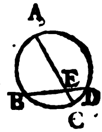


DVO rectilinea data ſint A, & B, quibus æquale ſit conſtruendum, ſimile ſimiliterq; poſitum ipſi C. a *Fiat ipſi A, æquale D E F, ſimile autem ſimiliterq; poſitū ipſi C.* a 25. ſexti. *Item ipſi B, æquale conſtituatur G F H, ſimile verò eidem C, ſimiliterq; poſitū. Deinde rectilinea D E F, G F H, ita inter ſe connectantur, vt latera eorum homologa E F, F H, conſtituant angulum E F H, rectum, cui ſubtendantur recta E H,* b *ſuper quam* b 18. ſexti. *deſcribatur rectilineum I H E, ſimile ſimiliterq; poſitum ipſis D E F, G F H, hoc eſt, ipſi C.* c *Perſpicuum autem eſt E H I, æquale eſſe duobus D E F, G F H, atq; idcirco duobus A, & B. Quod eſt propoſitum.* c 31. ſexti.

BREVIVS. Conſtituatur parallelogrammum æquale duobus rectilineis A, & B, per ea, quæ ad propoſ. 45. lib. 1 docuimus. d *Si enim* d 25. ſexti. *huic parallelogrammo conſtruxerimus æquale rectilineum E H I, quod ſimile ſit ſimiliterq; poſitum alteri dato rectilineo C; Conſtitutum erit rectilineum E H I, æquale duobus rectilineis A, B, & ſimile, ſimiliterq; poſitum rectilineo C. Quod erat faciendum.*

VIII.

SI in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuò ſecuerint: erunt ſegmenta vnius ſegmentis alterius reciproca.

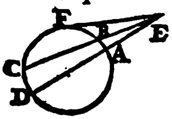


IN circulo A B C D, ſe mutuò ſecent rectæ A C, B D, in E. Dico ſegmenta A E, E C, eſſe reciproca ſegmentis B E, E D: Hoc eſt, eſſe vt A E, ad B E, ita E D, ad E C: Vel vt A E, ad E D, ita B E, ad E C. e *Cum enim rectangulum ſub A E, E C, comprehenſum æquale ſit rectangulo* e 35. tertij. *ſub B E, E D, contento;* f *erunt latera circa æquales angulos reciproca.* f 14. ſexti. *Quod eſt propoſitum.*

IX.

SI extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab

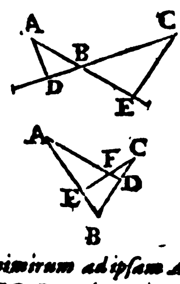
eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ circulum ſecantes: Erunt totæ, & ſegmenta extra circulum reciproca. Quod ſi ab eodē puncto linea ducatur, quæ circulum tangat; Erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectā, quæ circulum ſecet, & eius ſegmentum exterius.



EXTRA circulum A B C D, ſumatur punctum E, à quo cadant rectæ E C, E D, ſecantes circulum in A, & B. Dico rectas E C, E B, eſſe reciprocas rectis E D, E A: Hoc eſt, eſſe, vt E C, ad E D, ita E A, ad E B Vel vt E C, ad E A, ita
a 36. tertij. *E D, ad E B. Ducta enim E F, tangente circulum in F;* a *erit rectangulum ſub E C, E B, quadrato rectæ E F, æquale; Item rectangulum ſub E D, E A, eidem quadrato rectæ E F, æquale. Quare & rectangula ſub*
b 14. ſexti. *E C, E B, & ſub E D, E A, æqualia erunt.* b *Ac propterea latera eorū circa angulos æquales reciproca.* c *Quoniam autem quadrato rectæ*
c 36. tertij. *E F, æquale eſt tam rectangulum ſub E C, E B, quàm rectangulum ſub E D, E A,* d *erunt tam tres rectæ E C, E F, E B, quàm tres E D,*
d 17. ſexti. *E F, E A, proportionales, atq; adeò E F, media proportionalis inter quamlibet lineam, quæ circulum ſecet, & ſegmentum eius exterius. Quod eſt propoſitum.*

X.

SI duæ rectæ lineæ ſeſe mutuò ſecuerint, & à duobus earum terminis perpendiculares ſibi mutuò demittantur: erunt duæ lineæ, quarum vna inter vnum terminorum & ſectionem, altera verò inter ſectionem, & prioris lineæ aſſumptæ perpendicularem interjicitur, alijs duabus eodem modo incluſis reciprocæ.



DVÆ rectæ A B, C B, ſe mutuò ſecent in B, & ex terminis A, C, ad ipſas demittantur perpendiculares; A D, quidē ad C B, at verò C E, ad A B; quæ perpendiculares cadent in A B, C B, protractas vltra B, ſi angulus A B C, fuerit obtuſus; in ipſas verò introrſum, ſi idem angulus acutus fuerit, vt figuræ indicant. Dico rectas A B, B E, (quarum prior interjicitur inter terminum A, & ſectionem B; poſterior verò inter ſectionē B, & perpendicularem C E, quæ nimirum ad ipſam A B, aſſumptam ducitur) reciprocas eſſe duabus C B, B D, (quæ inter ſimiles terminos includuntur) hoc eſt, eſſe vt A B, ad B C, ita B D, ad B E: Vel vt A B, ad B D, ita B C, ad B E. Cùm enim anguli A B D, A D B, trianguli A B D, æquales ſint angulis C B E, C E B, trianguli C B E. (Nam A D B, C E B, recti ſunt; a *& A B D,*

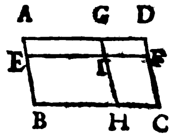
Digitized by Google

a & ABD, CBE, ad verticem in priori figura æquales; in poſteriori a 15. pri.
autem vnus & idem angulus) erunt triangula ABD, CBE, æqui-
angula. b Quare erit vt AB, ad BD, ita CB, ad BE: Ac propterea b 4. ſex.
permutando quoque, vt AB, ad BC, ita BD, ad BE. Quod eſt pro-
poſitum.

PORRO eadem ratione ſegmenta perpendicularium AD, CE, in poſteriori figura ſe mutuo ſecantium in F, erunt reciproca. Cum enim triangula AFE, CFD, ſint æquiangula; c erit vt AF, ad FE, c 4. ſex. ita CF, ad FD: Et permutando quoque, vt AF, ad CF, ita FE, ad FD. Quod eſt propoſitum.

XI.

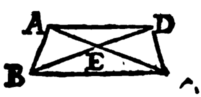
IN parallelogrammo, duæ rectæ lateribus parallelæ ſe mutuo ſecantes, diuidunt parallelogrammum in quatuor parallelogramma proportionalia.



IN parallelogrammo ABCD, duæ rectæ EF, GH, lateribus AD, DC, parallelæ ſe mutuo ſecent in I. Dico quatuor parallelogramma EG, GF, BI, IC, eſſe proportionalia. d Cum enim ſit vt EI, ad IF, ita EG, ad GF: Item vt EI, ad IF, ita BI, ad IC; e erit quoque vt EG, ad GF, ita BI, ad IC. Quod eſt propoſitum. d 1. ſex. e 11. quinti.

XII.

OMNE quadrilaterum à duabus diametris ſe mutuo ſecantibus diuiditur in quatuor triangula proportionalia.



DIVIDANT diametri AC, BD, ſe mutuo ſecantes in E, quadrilaterū ABCD. Dico quatuor triangula AED, CED, AEB, CEB, eſſe proportionalia. f Erit enim vt AE, ad EC, ita triangulum AED, ad triangulum CED, & triangulum AEB, ad triangulum CEB. g Quare vt triangulum AED, ad triangulum CED, ita triangulum AEB, ad triangulum CEB. Eademq; ratione oſtendes eſſe, vt BEA, ad DEA, ita BEC, ad DEC; h cum vtraque proportio eadem ſit proportioni BE, ad ED. Conſtat ergo propoſitum. f 1. ſex. g 11. quinti. h 1. ſex.

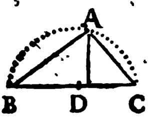
XIII.

IN triangulo rectangulo, in quo perpendicularis ab angulo recto demiſſa ſecat baſim extrema ac media ratione, tria latera ſunt continuè proportionalia. Et ſi tria latera trianguli rectanguli ſunt continuè proportionalia, per-

Digitized by Google

lia, perpendicularis ad baſim ex angulo recto demiſſa ſecat baſim extrema ac media ratione.

IN rectangulo triangulo A B C, ex angulo recto A, demiſſa perpendicularis A D, ſecet baſim B C, in D, extrema ac media ratione, ſitque maius ſegmentum B D: ac propterea ex theoremate 9. ad propoſ. 47. lib. 1. latus A B, latere A C, maius. Dico tria latera B C, B A, A C, eſſe continuè proportionalia. Quoniam enim per hypotheſim eſt, vt



a 17. ſexti. *B C, ad B D, ita B D, ad D C:* a *erit quadratum ex B D, rectangulo ſub B C, C D, æquale. Rurſus quia ex coroll. propoſ. 8. huius lib. A C, media proportionalis eſt inter*

b 17. ſexti. *B C, C D:* b *erit quoque quadratum ex A C, eidem rectangulo, ſub B C, C D, æquale. Quare quadrata ex B D, A C, æqualia inter ſe erunt, ac proinde & rectæ ipſæ æquales erunt. Eſt autem ex coroll. propoſ. 8. huius lib. A B, inter B C, B D, media proportionalis. Igitur eadem A B, media proportionalis erit inter B C, A C, hoc eſt, erit, vt B C, ad A B, ita A B, ad A C. Quod eſt propoſitum.*

SINT deinde tria latera B C, A B, A C, in triangulo rectangulo A B C, continuè proportionalia, hoc eſt, ſit B C, ad A B, vt A B, ad A C, demittaturque perpendicularis A D, ad baſim B C. Dico B C, ſectam eſſe in D, extrema ac media ratione. Quoniam enim eſt, vt B C, ad A B, ita A B, ad A C: Eſt autem vt B C, ad A B, ita quoque A B, ad B D: quod A B, media proportionalis ſit inter B C, B D, ex

c 11. quinti. *coroll. propoſ. 8. huius lib.* c *erit vt A B, ad A C, ita A B, ad B D:* d *ac proinde æquales erunt A C, & B D.* e *Vt igitur A C, ad C D, ita erit*

d 9. quinti. *B D, ad C D. Sed vt A C, ad C D, ita eſt B C, ad A C, quod ex coroll. propoſ. 8. huius lib. A C, ſit media proportionalis inter B C, & C D.*

e 7. quinti. f *Igitur erit quoque B C, ad A C, hoc eſt, ad B D, vt A C, hoc eſt, vt B D, ad C D: ac propterea B C, in D, ſecta erit extrema ac media ratione. Quod eſt propoſitum.*

f 11. quinti. *ITAQVE ſi ſuper datam rectam B C, conſtruendum ſit triangulum rectangulum, cuius tria latera continuè proportionalia ſint, ſecanda erit data recta B C, extrema ac media ratione in D. Deſcripto deinde ſemicirculo B A C, circa eandem datam B C, erigenda erit ad B C, perpendicularis D A, iungendaque rectæ B A, C A. Triangulum*

g 31. tertij. *enim A B C, rectangulum erit,* g *cum angulus B A C, in ſemicirculo rectus ſit; ac proinde cum perpendicularis A D, ſecet baſim extrema ac media ratione; tria latera continuè proportionalia erunt, vt proximè demonſtratum eſt.*

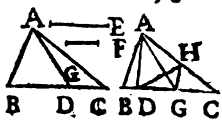
XIV.

A DATO puncto in latere trianguli lineam rectam ducere,

Digitized by Google

ducere, quæ triangulum diuidat in duo ſegmenta ſecundum proportionem datam.

SIT triangulum A B C, oporteatque à dato puncto D, in eius latere B C, lineam rectam ducere, quæ triangulum ſecet in duo ſegmenta ſecundum proportionem datam E, ad F. Diuidatur B C, in G, ſecundum proportionem E, ad F, cadatq; primò punctum G; in datum punctum D, vt in prima figura, ducaturq; recta D A. a *Quoniam igitur eſt vt B D, ad D C, ita triangulum B D A, ad triangulum C D A, ſecabit recta D A, triangulum datum ſecundum proportionem datam B G, ad G C, hoc eſt, E, ad F. Quod erat faciendum.* a 1. ſex.



CADAT deinde punctum G, inter C, & D, vt in ſecunda figura. Ducatur ergo recta D A, cui per G, parallela agatur G H, coniungaturque recta D H. Dico rectam D H, ſecare triangulum datum ſecundum proportionem datam, hoc eſt, eſſe trapezium B D H A, ad triangulum C D H, vt E, ad F, ſeu vt B G, ad G C. Ducta enim recta G A, b *erunt triangula H G A, G H D, æqualia, cum ſint ſuper eandem baſin G H, & inter eaſdem parallelas G H, D A. Addito igitur communi triangulo C G H, fient æqualia triangula C G A, C D H:* c *Ac proinde triangulum A B C, eandem habebit proportionem ad C G A, & ad C D H.* d *Diuidendo igitur, erit vt triangulum B G A, ad triangulum C G A, ita trapezium B D H A, ad triangulum C D H.* e *Eſt autem B G A, ad C G A; vt B G, ad G C. Igitur erit & trapezium B D H A, ad triangulum C D H, vt B G, ad G C, hoc eſt, vt E, ad F. Quod eſt propoſitum.* b 37. primi. c 7. quinti. d 17. quinti. e 1. ſex.



CADAT tertio punctum G, inter B, & D, ducaturq; recta D A, cui rurſus per G, agatur parallela G H. Dico igitur rurſus, rectam ductam D H, ſecare triangulum A B C, ſecundum proportionem datam E, ad F, hoc eſt, eſſe triangulum cum B D H, ad trapezium C D H A, vt E, ad F. Ducta enim recta G A, f *erunt, vt prius, triangula H G A, G H D, æqualia; additoque communi B G H, æqualia fient B G A, B D H.* g *Quare erit A B C, ad B G A, vt ad B D H.* h *Diuidendo ergo erit vt C G A, ad B G A, ita trapezium C D H A, ad triangulum B D H, & conuertendo, vt B G A, ad C G A, ita B D H, ad trapezium C D H A.* i *Eſt autem B G A, ad C G A, vt B G, ad G C. Igitur & B D H, ad trapezium C D H A, erit vt B G, ad G C, hoc eſt, vt E, ad F. Quod eſt propoſitum.* f 37. pri. g 7. quinti. h 17. quinti. i 1. ſex.

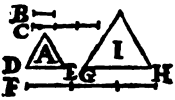
HINC perſpicuum eſt, quonam modo imperata pars ex triangulo ſit auferenda per lineam rectam, quæ à quouis dato puncto lateris ducatur. Si enim per rectam lineam à dato puncto ductam diuidatur triangulum ſecundum proportionem multiplicem, cuius denominator

vnitate

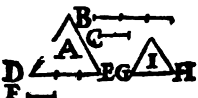
Vnitate minor ſit denominatore partis imperatæ, (Vt ſecundum proportionem triplam, ſi quarta pars imperetur, &c.) factum erit, quod iubetur, Vt manifeſtum eſt. Habebit enim tunc totum triangulum ad ſegmentum ablatum proportionem multiplicem, cuius denominator æqualis eſt denominatori partis propoſitæ, cum priori denominatori proportionis multiplicis aſſumptæ addatur Vnitas, quæ ante deerat.

XV.

DATO rectilineo ſimile ſimiliterque poſitum rectilineum deſcribere, maius, vel minus, ſecundum proportionem datam.



SIT rectilineum datum A, cui ſimile ſimiliterque poſitum ſit deſcribendum maius, ſecundum proportionem datam B, ad C. Tribus rectis B, C, & D E, (ſit autem D E, Vnum latus rectilinei dati quodcunque)
a 12. sexti. a *inueniatur quarta proportionalis F. Deinde duabus D E, & F,*
b 13. sexti. b *inueniatur media proportionalis G H;*
c 18. sexti. c *ſuper quam ipſi A, deſcribatur rectilineum I, ſimile, ſimiliterque poſitum. Dico I, maius eſſe quam A, ſecundum proportionem datam B, ad C. Cum enim proportionales ſint tres rectæ D E, G H, & F, erit per coroll. propoſ. 19. Vel 20. libri huius, Vt D E, prima ad F, tertiam, hoc eſt, per conſtructionem, Vt B, ad C, ita rectilineum A, ſuper primam ad rectilineum I, ſuper ſecundam, illi ſimile ſimiliterque poſitum. Quod erat faciendum.*



NON ſecus dato rectilineo A, minus rectilineum I, deſcribemus, illi ſimile ſimiliterque poſitum, ſecundum proportionem datam B, ad C. Veluti in hac figura factum eſſe cernis. Eadem enim prorſus eſt conſtructio, atque demonſtratio.

FACILE igitur ex his quadratum quodcunque, Vel aliud rectilineum duplicabimus, triplicabimus, quadruplicabimus, &c. Atque aliud conſtituemus, quod ſit illius dimidium, Vel tertia pars, Vel quarta, Vel quinta, &c. ſeruata nihilominus ſemper eadem rectilineorum ſimilitudine, quemadmodum quadratorum eadem remanet ſimilitudo. Si namque proportio B, ad C, ſumatur Vt 1. ad 2. Vel 1. ad 3. Vel 1. ad 4. &c. Item Vt 2. ad 1. Vel 3. ad 1. Vel 4. ad 1. &c. reliqua Verò perficiantur, Vt prius; habebitur rectilineum ſimile ſimiliterque deſcriptum, quod propoſiti rectilinei duplum exiſtet, Vel triplum, Vel quadruplum, &c. Vel quod dimidium erit, Vel tertia pars, Vel quarta, &c. eius, quod proponitur.

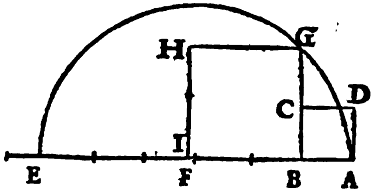
NON Videtur autem omittenda praxis Alberti Dureri, qua ipſe facile duplicat, triplicat, quadruplicat, &c. quadratum, ſeu parallelogrammum quodcunque oblatum. Ex hac enim conſtruemus quoque

recti-

Digitized by Google

rectilineum ſimile, ſimiliterque deſcriptum cuicunque rectilineo dato; maius, aut minus, ſecundum datam proportionem quamcunque. Tametſi autem Albertus huius praxis nullam affert rationem, ſed eam ſimpliciter proponit; non multum tamen eius demonſtratio à præcedenti differt, vt mox oſtendemus.

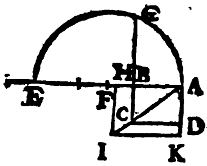
SIT igitur quadratum A B C D, quintuplicãdum. Producto latere A B, ad partes B, quantumlibet, ſumantur quinque partes ipſi A B, æquales, à puncto B, incipiendo, vſque ad E, vt ſit B E, quintupla ipſius A B.



Diuiſa deinde tota A E, bifariam in F, deſcribatur ex F, ad interuallum F A, vel F E, ſemicirculus A G E, producaturque latus B C, ad circumferentiam vſque in G. Dico quadratum B G H I, ex B G, deſcriptum, quintuplum eſſe quadrati A B C D. Erit enim per coroll. propoſ. 13. huius lib. B G, media proportionalis inter E B, B A. Igitur erit vt E B, prima ad B A, tertiam, ita B H, quadratum ſecundæ, ad A C, quadratum tertiæ, ex coroll. propoſ. 20. huius lib. Eſt autem E B, per conſtructionem, ipſius A B, quintupla. Igitur & quadratum B H, quadrati A C, quintuplum erit. Quod eſt propoſitum.

QVOD ſi recta B E, ſumatur ſextupla lateris A B, erit & quadratum rectæ B G, quadrati A B C D, ſextuplum: Si autem B E, fuerit tertia pars ipſius A B, erit & quadratum B H, tertia pars quadrati A C. Deniq; in quacunque proportione ſumatur B E, ad A B, eandem habebit quadratum B H, ad quadratum A C.

SIT rurſus rectangulum A B C D, cui inueniendum ſit ſimile ſimiliterque poſitum, quod duplum ſit ipſius. Ex latere A B, producta ſumatur B E, dupla ipſius A B. Diuiſa deinde tota A E, bifariam in F; & ex F, deſcripto ſemicirculo, vt prius, & producta C B, ad G; erit B G, vnum latus rectanguli quæſiti. Quare ſi abſcindatur A H, æqualis ipſi B G, & per H, agatur ipſi B C, parallela H I, occurrens diametro A C, protracta in I, perficiaturque parallelogrammum H K; a erit H K, ipſi B D, ſimile ſimiliterq; poſitum;



quod etiam aio duplum eſſe ipſius B D. Cum enim proportionales ſint tres rectæ E B, B G, B A, ex corollario propoſ. 13. huius lib. Erit vt prius, ſicut E B, prima ad B A, tertiam, ita rectangulum H K, ſupra A H, ſecundam (ſumpta enim fuit A H, ipſi B G, ſecundæ æqualis) ad rectangulum B D, ſupra tertiam A B, quod eſt ſimile ſimiliterque deſcriptum. Quod eſt propoſitum.

a 24. ſexti.

EODEM

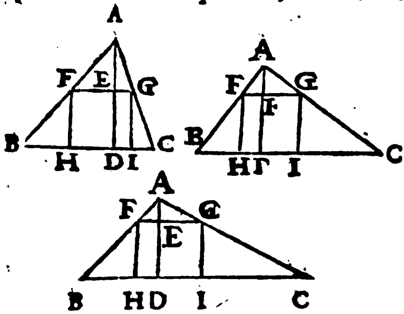
EODEM modo, ſi ſupra A B, conſtitutum fuerit quodcunque rectilineum, erit quod ex B G, illi ſimile, ſimiliterque poſitum deſcribitur, ipſius duplum. Atque in hunc modum ſemper eam proportionem habebit rectilineum ex B G, ad rectilineum ſimile ex A B, quam habere ponetur recta E B, ad rectam B A, ex conſtructione.

PERSPICVVM autem eſt, hanc praxim vna cum eius demonſtratione à noſtra antea tradita non differre, niſi quod hæc ſimul tradit inuentionem lineæ mediæ proportionalis. Hanc enim ob cauſam Albertus coniungit in rectum, & continuum lineas E B, B A, quæ proportionem habent datam, vt ſtatim, vna operatione, mediam proportionalem obtineat, &c.

XVI.

IN dato triangulo quocunque quadratum deſcribere.

SIT datum triangulum A B C, acutangulum. Ex angulo quocunque A, ad B C, perpendicularis demittatur A D, quæ intra triangulum cadet, ex ſcholio propoſ. 13. lib. 2. Hæc autem in E, ita ſecetur, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 10. huius libri docuimus, vt eadem ſit proportio A E, ad E D, quæ A D, ad B C. Deinde per E, agatur F G, ipſi B C, parallela. Poſtremo ex F, & G, ipſi D E, parallelæ ducantur F H, G I. Dico F G I H, rectilineum triangulo A B C, inſcriptum eſſe quadratum. Cum enim F G, ipſi B C, ſit parallela; erit vt B D, ad D C, ita F E, ad F G, ex ſcholio propoſ. 4. huius lib. & componendo, vt B C, ad D C, ita F G, ad E G.

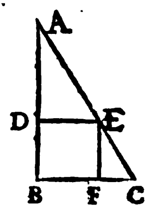


a 4 ſex. *a Sed vt D C, ad A D, ita eſt F G, ad A E, quod per coroll. propoſ. 4. huius lib. triangula A D C, A E G, ſint ſimilia.*
b 22. quinti. *b Igitur erit ex æquo, vt B C, ad A D: ita F G, ad A E. Quia vero per conſtructionem eſt vt A D, ad B C, ita A E, ad E D,*
c 22. quinti. *c erit rurſus ex æquo, vt B C, ad B C, ita F G, ad E D: Eſt autem B C, ipſi B C, æqualis, imò eadem. Æqualis igitur eſt & F G, ipſi E D.*
d 34. primi. *d Quare cum F G, ipſi H I; & E D, ipſis E H, G I, æqualis exiſtat; Erunt quatuor latera F G, G I, I H, H F, æqualia inter ſe.*
e 29. primi. *e Et quia anguli E D H, F H D, duobus rectis æquales ſunt; Eſt autem E D H per conſtructionem, rectus; erit & F H D, rectus. Quocirca per ea, quæ ad defin. 1. lib. 2. demonſtrauimus, & reliqui anguli H F G, F G I, G I H, recti ſunt in parallelogram-*

logrãmo FGIH; Ac propterea FI, quadratum eſt. Quod eſt propoſitum.

NON ſecus idem problema abſoluemus, ſi datum triangulum fuerit rectangulum, vel obtuſangulum, dummodo ex angulo recto, vel obtuſo perpendicularem demittamus, vt in poſterioribus duobus triangulis apparet. Ita enim ſemper cadet perpendicularis AD, intra triangulum, ex ſcholio propoſ. 13. lib. 2.

QVOD ſi in triangulo rectangulo quadratum deſcribere libeat, ita vt duo eius latera duobus trianguli lateribus circa angulum rectum miſcantur; diuidemus perpendicularem AB, in D, ita vt eadem ſit proportio AD, ad DB, quæ AB, ad BC, & per D, quidem ipſi BC, parallelam ducemus DE; per E, vero ipſi AB, aliam parallelam EF. a Quoniam igitur eſt, vt BC, ad AB, ita DE, ad AD, quod triangula ABC, ADE, ſimilia ſint, per coroll. propoſ. 4. huius lib. Eſt autem per conſtructionem, vt AB, ad BC, ita AD, ad DB, b erit ex æquo, vt BC, ad BC, ita DE, ad DB: Eſt autem BC, ſibi ipſi æqualis, immò eadem. Æqualis igitur eſt & DE, ipſi DB. Quare vt prius, DEFB, quadratum eſt, Quod eſt propoſitum.



a 4. ſex.

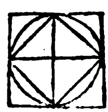
b 22. quinti.

VERVM hoc problemate Commandini multo ingenioſius eſt id, quod ſequitur.

XVII.

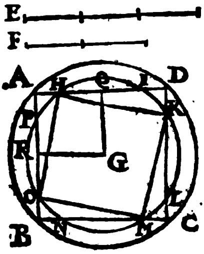
INTRA datum quadratum, aliud quadratũ deſcribere in data proportione maioris inæqualitatis. Oportet autem datam proportionem dupla non eſſe maiorem.

SIT quadratum ABCD, intra quod deſcribendum ſit quadratum, ad quod habeat quadratũ ABCD, proportionem eandem maioris inæqualitatis, quam recta E, ad rectam F, quæcunque ea ſit, dummodo maior non ſit, quam dupla. Nam ſi latera quadrati ſecentur bifariam, punctaque diuiſionum rectis iungantur lineis, inſcriptum erit quadratum intra aliud, vt ad finem lib. 4. demonſtrauimus, idem cum eo centrum habens. Et quia circulus intra quadratum ABCD, deſcriptus eſt quadrato illi inſcripto circumſcriptus, vt in hac figura perſpicuum eſt, erit quadratum ABCD, illius quadrati inſcripti duplum, ex ſcholio propoſ. 9. lib. 4. Cum ergo minus quadratum intra quadratum ABCD, deſcribi nequeat, quam illud, cuius circulus circumſcriptus latera quadrati ABCD, tangit, vt patet: liquido conſtat quadratum ABCD, ad nullum quadratum inſcriptum proportionem poſſe habere dupla maiorem. Sit igitur data proportio E, ad F, minor quam dupla; nimirum ſeſquialtera. Inueniatur ex



propoſ.

Digitized by Google



propoſ. 15. huius ſcholij quadratum, ad quod habeat datum quadratum A B C D, proportionem datam E, ad F. Eritque eius ſemidiameter maior, quam ſemidiameter quadrati, cuius circulus circumſcriptus latera quadrati A B C D, tangit, quod nimirum quadrati A B C D, ſubduplum eſt, ut diximus, minor vero ſemidiametro quadrati A B C D. Igitur ſi ex centro G, quadrati dati deſcribatur circulus æqualis ei, qui circa inuentum quadratum deſcribetur, ſecabit is latera quadrati A B C D, in punctis H, I, K, L, M, N, O, P. Iungantur rectæ H K, K M, M O, O H, relictis quatuor punctis I, L, N, P, in medio. Dico H K M O, eſſe quadratum in circulo H I K L M N O P, deſcriptum, atque adeo æquale ei, quod inuentum eſt, ita ut quadratum A B C D, ad quadratum H K M O, habeat datam proportionem E ad F. Deſcripto enim circulo circa datum quadratum A B C D, ex centro G, ductiſque ex G, ad latera A D, A B, perpendicularibus G Q, G R, a *ſecta erunt tam rectæ A D, A B, quam*

a 3. tertij. *rectæ H I, O P, biſariam in Q, R. Et quia A D, A B, æquales ſunt,*

b 14. tertij. b *æqualiter diſtabunt à centro G, propterea que & H I, O P, æqualiter ab eodem centro diſtabunt.* c *Quare æquales erunt H I, O P, ideoque*

c 14. tertij. *& earum ſemiſſes Q H, Q I, R O, R P, inter ſe erunt æquales. Sunt autem & ſemiſſes Q A, Q D, R A, R B, æqualium laterum æquales. Igitur ſi illa ab his demantur, reliqua erunt æquales H A, I D, P A, O B. Eademque ratione, ſi ducantur aliæ perpendiculares ad latera B C, C D, oſtendentur æquales N B, M C, L C, K D, & inter ſe, & illis quatuor H A, I D, P A, O B. Item quia æquales ſunt H I, O P, ſi addantur æquales I D, P A, fient tota æquales H D, A O. Atque eadem de cauſa æquales erunt B M, K C, & inter ſe, & illis duabus H D, A O. Itaque quia duo latera A O, A H, duobus lateribus D H, D K, æqualia ſunt, anguloſque continent æquales, nimirum rectos;*

d 4 pri. d *erunt & baſes H K, H O, æquales. Eodemq; modo demonſtrabuntur K M, M O, æquales & inter ſe, & duabus H K, H O. Æquilatera ergo eſt figura H K M O. Dico & rectangulam eſſe. Cum enim latera H K, K M, M O, O H, æqualia ſint,* e *erunt & quatuor arcus,*

e 28. tertij. *quos ſubtendunt, æquales, ac proinde Quadrantes erunt. Semicirculi*

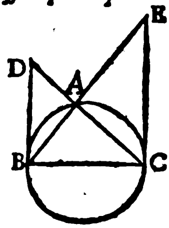
f 31. ter. *ergo ſunt O H K, H K M, K M O, M O H,* f *ac proinde quatuor anguli H, K, M, O, in illis ſemicirculis recti erunt. Igitur H K M O, quadratum eſt, atque adeo inuento quadrato æquale, cum idem circulus utrumque circumſcribat. Circulus enim H K M O, deſcriptus eſt ad internallum ſemidiametri circuli inuento quadrato circumſcripti. Quod eſt propoſitum.*

S I ad

XVIII.

SI ad diametrum circuli in extremis punctis duæ perpendiculares excitentur, & ab eiſdem extremis per vnum idemque punctum circumferentiæ duæ aliæ rectæ circulum ſecantes ducantur, occurrentes duabus perpendicularibus: erit rectangulum comprehenſum ſub vtralibet ſecantium, & eius ſegmento interiore, quadrato diametri æquale.

HÆC propoſitio eſt Cardani lib. 16. de Subtilitate cap. 1. ſicut & quæ ſequitur. Vtramque autem demonſtrauit Io. Baptiſta Benedictus. Sit ergo circulus A B C, cuius diameter B C, ad quam in B, C, excitentur duæ perpendiculares B D, C E, ac per aſſumptum quoduis punctum A, in circumferentia ex eiſdem punctis B, C, eductæ rectæ B A, C A, ſecent perpendiculares in E, D. Dico tam rectangulum ſub E B, B A, quàm ſub D C, C A, quadrato diametri B C, æquale eſſe. Quoniam enim in triangulo rectangulo B C E, ex angulo recto C, demiſſa eſt C A, ad baſin B E, perpendicularis;



a quod angulus B A C, in ſemicirculo rectus ſit: a 1. tertij.
erit ex coroll. propoſ. 8. huius lib. B C, media proportionalis inter E B, B A. Quare b rectangulum ſub extremis E B, b 17.
B A, æquale erit quadrato mediæ B C. Eademque ratione eidem quadrato æquale erit rectangulum ſub D C, C A: ac propterea quod B C, media quoque proportionalis eſt inter D C, C A, ex eodem coroll. propoſ. 8. huius lib. Conſtat ergo id, quod proponitur. ſexti.

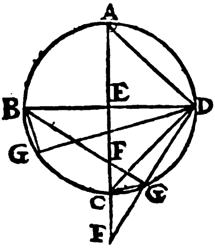
XIX.

SI in circulo duæ diametri ſe ſe ad rectos angulos ſecent, & ab vnius extremo puncto recta ducatur vtcunque ſecans circumferentiam, & alteram diametrum ſiue productam, ſiue non productam: erit rectangulum comprehenſum ſub duobus ſegmentis huius lineæ ductæ, quorum vnum inter extremum punctum prioris diametri, & ſecundam diametrum, alterum vero inter idem punctum extremum, & circumferentiam intericitur, æquale quadrato intra circulum deſcripto.

IN circulo A B C D, cuius centrum E, ſecent ſe ad angulos rectos diametri A C, B D, ducaturque ex puncto D, recta vtcunque D F,

Digitized by Google

ſecans diametrum A C, in F, & circumferentiam in G. Dico rectangulum ſub F D, D G, quadrato intra circulum deſcripto eſſe æquale. Ductis enim rectis D C, C G, erunt triangula D C F, D C G, æquiangula inter ſe.



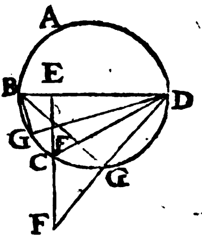
Nam angulus C D F, communis eſt, & angulus D C F, angulo D G C,
a 32. primi. *æqualis: a ac proinde & reliquus D F C reliquo D C G, æqualis. Quod autem anguli D C F, D G C, æquales ſint, ita oſtendemus. Si punctum quidem F, eſt intra circulum;*
b 27. tertij. b *erunt anguli D C F, D G C, inſiſtentes quadrantibus æqualibus A D, D C, æquales: Si verò punctum F, eſt extra circulum,*
c 27. tertij. *ducta recta A D,* c *erunt anguli D A C, D C A, inſiſtentes quadrantibus æquales:*
d 22. tertij. d *Sed tam D A C, D G C,* e *quam D C A, D C F, æquales ſunt duobus rectis. Igitur ablatis æqualibus D A C, D C A, reliqui D G C,*
e 13. pri. *D C F, æquales quoque erunt. Quam ob rem, cum triangula D C F,*
f 4. ſex. *D C G, æquiangula ſint;* f *erit vt D F, ad D C, ita D C, ad D G: hoc*
g 17. ſexti. *eſt, tres lineæ D F, D C, D G, continuè proportionales erunt.* g *Igitur rectangulum ſub extremis D F, D G, æquale eſt quadrato mediæ D C, hoc eſt, quadrato intra circulum deſcripto, cum D C, latus ſit quadrati circulo inſcripti, vt conſtat ex propoſ. 6. lib. 4. Quod eſt propoſitum.*

h 31. tertij. *ALITER. Ducta recta B G,* h *erit angulus B G D, in ſemicirculo rectus; atque idcirco duo triangula B G D, D E F, cum habeant angulos rectos B G D, D E F, & angulum B D G, vel E D F, communem,*
i 32. pri. i *æquiangula erunt.* k *Igitur erit, vt D F, ad D E, ita D B, ad*
k 4. ſex. *D G.* l *Rectangulum ergo ſub D F, D G, æquale erit rectangulo ſub*
l 16. ſex. *D B, D E.* m *Sed rectangulo ſub D B, D E, æquale eſt quadratum re-*
m 17. ſexti. *cta A D, hoc eſt, quadratum circulo inſcriptum; propterea quod ex corroll. propoſ. 8. huius lib. A D, media proportionalis eſt inter D B, D E,*
n 31. tertij. *vt patet, ſi ducatur recta A B.* n *Fiet enim triangulum rectangulum B A D, & ex angulo recto perpendicularis demiſſa erit A E. Igitur & rectangulum ſub D F, D G, eidem quadrato rectæ A D, æquale erit. Quod eſt propoſitum.*

VNIVERSALIVS hoc ita proponetur.

SI in circulo à quouis puncto diametri ad diametrum perpendicularis excitetur, ad quam ex alterutro terminorum diametri duæ rectæ ducantur, vna ad eius interſectionem in circumferentia, altera vero vt libet, ſecans circumferentiam in alio puncto: Erit rectangulum ſub ſegmentis huius poſterioris lineæ, quorum vnum ſit inter prædictum terminum, & perpendicularem, alterum vero inter eundem terminum, & circumferentiam, æquale

quadrato prioris rectæ inter eundem terminum, & circumferentiam, ſeu perpendicularem interceptæ.



IN circulo enim ABCD, ad diametrum BD, ſit perpendicularis EF, ſecans circumferentiam in C, iunganturq́ue rectæ DC, DF, quarum poſterior perpendicularem EF, ſecet in F, & circumferentiam in G. Dico rectangulum ſub DF, DG, æquale eſſe quadrato DC. Iuncta enim recta BG, erunt triangula BGD, FDE, æquiangula, propter angulos rectos G, E, & communem angulum FDE. a *Igitur erit, vt FD, ad DE, ita BD, ad DG.* b *Quare rectangulum ſub FD, DG, rectangulo ſub DE, BD, æquale erit:* c *Sed hoc æquale eſt quadrato DC; quod ex coroll. propoſ. 8. huius, DC, ſit media proportionalis inter BD, DE: quia ducta recta BC,* d *angulus, BCD, foret rectus in ſemicirculo. Igitur & rectangulum ſub FD, DG, quadrato DC, æquale erit. Quod eſt propoſitum.*

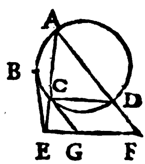
a 4. ſexti. b 16. ſexti. c 17. ſexti. d 31. tertij.

COROLLARIVM.

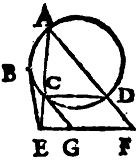
HINC fit, priorem lineam DC, eſſe mediam proportionalem inter poſterioris ſegmenta FD, DG, quorum vnum eſt inter terminum D, & perpendicularem, alterum vero inter eundem terminum, & circumferentiam.

XX.

DATO circulo, & duobus punctis ſiue extra circulum, ſiue intra, dummodo neutrum ſit in circumferentia; per ea puncta duas rectas ducere ad aliquod vnum punctum circumferentiæ, ita vt recta coniungens duo puncta, quibus duæ illæ rectæ circumferentiam ſecant, parallela ſit rectæ data duo puncta connectenti.

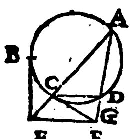


HOC problema non minus acutum quam curioſum in tres propoſitiones Pappus diſtribuit: quod nos in vnam redigentes multo clarius demonſtrabimus. Sit ergo circulus ABCD, & primum duo data puncta E, F, extra circulum, quæ per rectam EF, coniungantur. Si igitur ex E, F, ducendæ ſint rectæ ad aliquod punctum concauæ circumferentiæ, &c. ita agemus. Ex E, ducatur recta EB, tangens circulum in B. & duabus EF, EB, tertia proportionalis inueniatur, cui æqualis ſit EG, cadatque primum G, punctum inter E, & F, quod fit, quando EF, maior eſt, quam EB. Ducta igitur GC, recta circulum

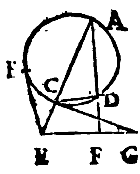


*tangente in C, verſus priorem tangentem E B, du-
catur ex E, per C, recta ſecans concauam peri-
pheriam in A, iungaturque recta A F, ſecans cir-
cumferentiam in D. Dico ductam rectam C D,
ipſi E F, parallelam eſſe. Quoniam enim tres re-
ctæ E F, E B, E G, continuè proportionales ſunt,*
a 17. a *erit rectangulum ſub E F, E G, quadrato ex*
ſexti. *E B, æquale:* b *Eſt autem eidem quadrato ex E B, æquale rectangu-*
b 36. *lum ſub E A, E C, igitur rectangulum ſub E A, E C, æquale erit: ac*
tertij. *proinde ex ſcholio propoſ. 36. lib. 3. per quatuor puncta A, C, G, F, cir-*
c 32. *culus deſcribi poterit.* c *Duo ergo anguli G A F, C G F, oppoſiti in*
tertij. *quadrilatero A C G F, intra eum circulum deſcripto æquales ſunt*
d 13. *duobus rectis, ideoque duobus angulis ad G,* d *qui duobus etiam re-*
primi. *ctis æquales ſunt, æquales. Dempto igitur communi C G F, erit reli-*
e 32. *quus C G E, reliquo A, æqualis:* e *Eſt autem & angulus D C G, an-*
tertij. *gulo A, in alterno ſegmento æqualis. Igitur anguli D C G, C G E, in-*
f 27. *ter ſe æquales erunt; atque ideo, cum ſint alterni,* f *rectæ C D, E F,*
primi. *parallelæ erunt. Quod eſt propoſitum.*

*CADAT deinde punctum G, in punctum F, quod accidit, quan-
do E F, ipſi E B, æqualis eſt. Ducta igitur rurſus recta G C, circulum
tangente in C, verſus priorem tangentem E B, ducatur ex E, per C,*



*recta concauam peripheriam ſecans in A, iunga-
turque recta A F, ſecans circumferentiam in D.
Dico rurſus ductam rectam C D, ipſi E F, eſſe pa-
rallelam. Quoniam enim æquales ſunt E B, E F;*
g 36. g *eſtque rectangulum ſub A E, E C, quadrato ex*
tertij. *E B, æquale: erit quoque idem rectangulum qua-*
h 5. *drato ſub E F, æquale. Quare* h *ſi circa triangu-*
quarti. *lum A C F, circulus deſcribatur, cum eum ſecet recta E A, recta au-*
i 37. *tem E F, eidem applicetur,* i *tanget recta E F, eum circulum.* k *An-*
tertij. *gulus ergo E F C, angulo A, in alterno ſegmento illius circuli æqualis*
k 32. *erit:* l *Eſt autem & angulus F C D, eidem angulo A, in alterno ſe-*
tertij. *gmento circuli A B C D, æqualis. Igitur æquales inter ſe erunt angu-*
l 12. *li E F C, F C D: qui cum ſint alterni,* m *erunt rectæ C D, E F, paral-*
tertij. *lelæ. Quod eſt propoſitum.*
m 27. *CADAT tertio punctum G, vltra F, quod contingit, quando E F,*
primi. *minor eſt quam E B. Facta igitur eadem conſtru-*



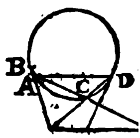
ctione, quoniam tres rectæ E F, E B, E G, conti-
n 17. *nuè proportionales ſunt,* n *erit rectangulum ſub*
ſexti. *E F, E G, quadrato ex E B, æquale:* o *Eſt autem*
o 36. *eidem quadrato ex E B, æquale rectangulum ſub*
tertij. *A E, E C. Igitur rectangulum ſub E F, E G, hoc
eſt, ſub E G, E F, rectangulo ſub E A, E C, æquale
erit: ac*

Digitized by Google

erit: ac proinde ex ſcholio propoſ. 36. lib. 3. per quatuor puncta A, F, G, circulus deſcribi poterit. a *Duo ergo anguli A, G, in eodem ſegmento C A G F, illius circuli, cuius chorda eſſet ducta recta C F, inter ſe æquales erunt:* b *Eſt autem angulus G C D, angulo A, in alterno ſegmento dati circuli A B C D, æqualis. Igitur idem angulus G C D, angulo G, æqualis erit: ac proinde, cum duo hi anguli ſint alterni,* c *parallelæ erunt C D, E F. Quod eſt propoſitum.*

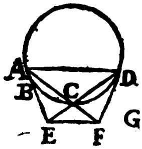
QVOD ſi à principio ex puncto F, ducta fuiſſet linea circulum tangens, & reliqua fierent, vt prius, inueniretur idem omnino punctum A: quia nullum aliud punctum abſoluere poteſt problema. Concipiatur enim mente quodcunque aliud punctum H, prope A, inter A, & D. (ſi illud punctum H, atramento ſignaueris, facilior erit demonſtratio, quod etiam de aliis punctis H, mente concipiendis intelligatur, nec non de puncto I, in vltima figura) *Igitur recta F H, ſecabit circulum ſupra D, at verò recta E H, eundem infra C, ſecabit; ac propterea recta coniungens puncta ſectionum rectam C D, ſecabit. Producta ergo ſecabit quoque illius parallelam E F. Non igitur ipſi E F, parallela erit. Contrarium accidet, ſi punctum H, ſumatur inter A, & C. Nam recta F H, cadet infra D, & E H, ſupra C, &c.*

SI verò ex eiſdem punctis datis E, F, ducendæ ſint duæ rectæ ad aliquod punctum conuexæ circumferentiæ, quæ productæ ſecent concauam peripheriam in duobus punctis, ita vt recta per ea tranſiens ſit parallela rectæ puncta E, F, connectenti, hoc modo procedemus. Ducta recta E B circulum tangente in B, inueniatur duabus rectis E F, E B, tertia proportionalis E G, cadatque primum G, punctum inter E, F. Ducta igitur ex G, recta G D, tangente circulum in D, non tamen verſus priorem tangentem E B, ducatur E D, ſecans circumferentiam in C, puncto, per quod recta eiiciatur ex F, ſecans circumferentiam in A. Dico rectam A D, ductam eſſe rectæ E F, parallelam:



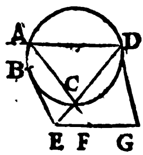
Quoniam enim tres rectæ E F, E B, E G, continuè ſunt proportionales, d *erit rectangulum ſub E F, E G, quadrato ex E B, æquale:* e *Eſt autem & rectangulum ſub D E, E C, eidem quadrato ex E B, æquale. Igitur æqualia inter ſe erunt rectangula ſub E F, E G, & ſub E D, E C; ac proinde ex ſcholio propoſ. 36. lib. 3. per quatuor puncta C, D, F, G, circulus deſcribi poteſt.* f *Duo ergo anguli C D G, & F, in eodem ſegmento C D F G, illius circuli, cuius chorda eſſet ducta recta C G, inter ſe erunt æquales.* g *Eſt autem angulus C D G, angulo A, in alterno ſegmento dati circuli A B C D, æqualis. Igitur & angulus F, angulo A, alterno æqualis erit,* h *ideoque parallelæ erunt A D, E F. Quod eſt propoſitum.*

CADAT deinde punctum G, in F. Ducta igitur rurſus recta GD, tangente circulum in D, non tamen verſus priorem tangentem EB, ducatur recta ED, ſecans circumferentiam in C, puncto, per quod recta ducta ex F, ſecet circumferentiam in A. Dico ductam rectam AD, rectæ EF, parallelam eſſe. Cum enim æquales ſint EB, EF, (quòd ſit EF, ad EB, vt EB, ad EF,)



a 5. erunt earum quadrata æqualia: Eſt autem
quarti. rectangulum ſub ED, EC, quadrato ex EB,
b 37. æquale. Igitur & quadrato ex EF. Quia ergo, a ſi
tertij. circa triangulum CDF, circulus deſcribatur, re-
c 32. cta ED, eum ſecat, & EF, applicata eſt, b tanget
tertij. EF, eum circulum. c Angulus ergo EFC, angulo FDE, in alterno
d 32. ſegmento eius circuli æqualis erit: d Eſt autem angulus FDE, an-
tertij. gulo A, in alterno ſegmento circuli ABCD, æqualis. Igitur & an-
e 27. gulus EFC, eidem angulo A, alterno æqualis erit. e Quare parallelæ
primi. erunt AD, EF. Quod eſt propoſitum.

CADAT tertio punctum G, vltra F. Facta ergo eadem con-
ſtructione, cum tres rectæ EF, EB, EG, ſint continuè proportiona-
f 17. les, f erit rectangulum ſub EF, EG, ſiue ſub EG, EF, æquale qua-
ſexti. drato ex EB: g Eſt autem eidem quadrato æquale rectangulum ſub
g 36. ED, EC. Igitur rectangulum ſub EG, EF,
tertij. rectangulo ſub ED, EC, æquale erit, propterea-



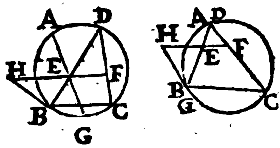
que ex ſcholio propoſ. 36. lib. 3. circa quatuor pun-
h 22. cta C, D, G, F, circulus poteſt deſcribi. h Duo er-
tertij. go anguli EDG, CFG, oppoſiti in quadrilatero
CDGF, intra eum circulum deſcripto æquales
erunt duobus rectis, ac proinde æquales duobus
i 13. pri. angulis ad F, i qui etiam duobus ſunt rectis æqua-
les. Dempto ergo communi CFG, reliquus CDG, reliquo CFE,
k 32. æqualis erit: k Eſt autem angulus GDC, angulo A, in alterno ſe-
tertij. gmento dati circuli ABCD, æqualis. Igitur & angulus CFE, ei-
l 27. dem angulo CAD, alterno æqualis erit: l atque idcirco parallelæ
primi. erunt AD, EF. Quod eſt propoſitum.

QVOD ſi à principio ex F, duceretur linea circulum tangens, & alia fierent, vt prius, inueniretur idem omnino punctum C, eo quod nullum aliud poſſit problema conficere. Nam ſit aliud punctum H, quodcunque iuxta C, mente conceptum inter A, & C. Cadet ergo recta FH, infra A, & recta EH, ſupra D. Recta igitur connectens puncta ſectionum ſecabit rectam AD; ac proinde, vt ſupra dictum eſt, ipſi EF, parallela eſſe non poteſt. Si punctum H, ſumptum foret inter D, & C, caderet FH, recta ſupra A, & recta EH, infra D, &c.

SED ſint iam data puncta E, F, intra circulum ABCD. Du-

cta recta

cta recta A G, per E, vtcunque, inueniatur tribus rectis E F, E A, E G, quarta proportionalis, cui æqualis ſit E H, (cadetque neceſſario punctum H, extra circulum a Quoniam enim rectangulum ſub A E, a 16.
E G, ſecunda & tertia, æquale eſt rectangulo ſub E F, E H, prima prima ſexti.
& quarta; deſcribi poterit circulus circa 4. puncta A, F, G, H, ex ſcholio propoſ. 35. lib. 3. ſecans circulum A B C D, in A, G. Cum ergo eius arcus per F, tranſiens ſit intra hunc circulum, erit alter arcus per H, tranſiens, extra: b quandoquidem circulus circulũ in duobus tantum punctis ſecat, ac proinde circulus per A, F, G, deſcriptus poſt puncta A G, extra circulum cadet; ideoque punctum H, in eo circulo exiſtens extra circulum cadet) ducaturque H B, circulum tangens in B. Ducta enim recta ex B, per E, ſecante circumferentiam in D, & ex D, per F, recta ſecante circumferentiam in C; dico ductam rectam B C, parallelam eſſe rectæ E F. Quia enim ita eſt E F, ad E A, vt E G, ad E H, c erit rectangulum ſub E F, E H, æquale rectangulo ſub E A, E G: d Eſt autem rectangulum ſub E A, E G, æquale rectangulo ſub E D, E B. Igitur & rectangulum ſub E F, E H, eidem rectangulo ſub E D, E B, æquale erit: ac propterea ex ſcholio propoſ. 35. lib. 3. circa quatuor puncta B, H, D, F, circulus poterit deſcribi. e Quare duo anguli H B D, & D F H, in eodem ſegmento D F B H, illius circuli, cuius chorda eſſet ducta recta D H, æquales erunt. f Eſt autem angulus H B D, angulo C, in alterno ſegmento dati circuli A B C D, æqualis. Igitur & angulus D F H, angulo eidem C, æqualis erit, externus interno. g Parallela ergo ſunt rectæ B C, E F. Quod eſt propoſitum.



b 10. tertij.

c 16. ſexti. d 35. tertij. e 21. tertij. f 32. tertij. g 28. primi

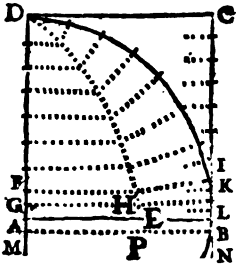
QVOD ſi contingat, tangentem H B, cadere in punctum G, non erit ducenda alia linea B D, ſed A G, quæ in principio ducta eſt, propoſitum concludet, vt perſpicuum eſt in ſecunda figura.

IAM ſi ſolutio problematis inciperet à puncto F, non autem ab E, reperiretur idem omnino punctum D; quod nullo alio problema confici poſſit. Si enim ſumatur quodcunque aliud punctum I, prope D, inter D, & C, cadet recta F I, infra C, & E I, ſupra B. Recta ergo connectens ſectionum puncta rectam B C, ſecabit. Igitur vt ſupra dictum eſt, recta E F, parallela non erit. Si punctum I, ſumeretur inter D, & B, cadet recta F I, ſupra C, & E I, infra B, &c.

Digitized by Google

DE MIRABILI NATVRA LINEÆ cuiuſdam inflexæ, per quam & in circulo figuræ quotlibet laterum æqualium inſcribitur, & circulus quadratur, & plura alia ſcitu iucundiſſima perficiuntur.

FORTE ſuperiori anno incidi in librum 4. Pappi Alexandrini, vbi lineam quandam inflexam explicat, quam, vt ait, Dinoſtratus, & Nicomedes, & nonnulli iuniores excogitarunt ad circuli quadraturam, ideoq; ab officio τετραγωνίζουσα *ab eiſdem appellata eſt, à nobis eadem de cauſa Quadratrix dicetur. Quanquam autem prædicti auctores huiuſmodi lineam conentur deſcribere per duos motus imaginarios duarum rectarum, quæ in re principium petunt, vt propterea à Pappo reiiciatur, tanquam inutilis, & quæ deſcribi non poſſit; nos tamen eam ſine illis motibus Geometricè deſcribemus per inuentionem quotuis punctorum, per quæ duci debeat, quemadmodum in deſcriptionibus conicarum ſectionum fieri ſolet. Hanc inuentionem Epilogi loco huic ſexto libro adiungendam eſſe cenſuimus; propterea quòd beneficio huius lineæ problemata Geometrica ſcitu periucunda, & quæ ad hunc vſque diem deſiderata ſunt, ſumma facilitate conficiuntur. Id quod ad finem lib. 4. facturos nos hoc loco recepimus, reiiciendo tamen pleniorem Quadraturæ tractationem in noſtram Geometriam Practicam. Sic ergo deſcriptio lineæ Quadratricis fiet.*



IN quadrato A B C D, deſcribatur quadrans B D. Si igitur, vt volunt inuentores lineæ Quadratricis, tam ſemidiameter A D, æquabiliter ferri intelligatur circa centrum A, quam latus ſupremum C D, deorſum verſus æquabiliter quoque, ita vt quo tempore punctum D, circumferentiam D B, vniformi ſemper motu percurrit, eodem recta D C, vniformi etiam motu deſcendens ad latus A B, perueniat, ſic tamen, vt perpetuo lateri A B, ſit parallela, & cum lateribus A D, B C, angulos rectos efficiat; ſecabunt ſe continuè ſemidiameter in circumferentia D B, circummacta, & recta D C, deorſum lata, in punctis, quæ lineam Quadratricem deſcribent, hoc eſt, per quæ linea Quadratrix tranſibit, cuiuſmodi eſt linea inflexa D E. Sed quia duo iſti motus vniformes, quorum vnus per circumferentiam D B, fit, & alter per lineas rectas D A, C B, effici non poſſunt, niſi proportio habeatur circularis lineæ ad rectam, meritò à Pappo deſcriptio hæc reprehenditur: quippe cum ignota adhuc ſit ea proportio, & quæ per hanc

lineam inueſtiganda proponatur. Quare nos Geometricè eandem lineam Quadratricem deſcribemus hoc modo. Arcus B D, in quotuis partes æquales diuidatur, & latus vtrumq; A D, B C, in totidem æquales partes. Faciliima diuiſio erit, ſi & arcus D B, & vtrumq; latus A D, B C, ſecetur primum bifariam, deinde vtraque ſemiſſis iterum bifariam, & ſingulæ rurſum partes iterum bifariam, atque ita deinceps, quantum libuerit. Quo autem plures extiterint diuiſiones, eò accuratiùs Quadratrix linea deſcribetur. Nos ad confuſionem vitandam ſecuimus tam arcum D B, quàm duo latera A D, B C, in 8. partes æquales.

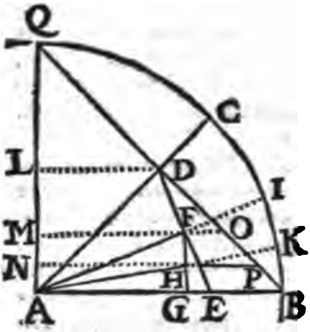
DEINDE bina puncta laterum A D, B C, æqualiter diſtantia à latere D C, vel A B, coniungantur lineis rectis occultis, atque ex centro A, aliæ rectæ occultæ ad ſingula diuiſionum puncta Quadrantis D B, extendantur. Vbi enim hæ rectæ priores rectas interſecabunt, prima primam, ſecunda ſecundam, &c. per ea puncta Quadratrix linea congruenter ducenda eſt, ita vt non ſit ſinuoſa, ſed æquabiliter ſemper progrediatur nullum efficiens gibbum, aut angulum alicubi: qualis eſt linea inflexa D E, ſecans ſemidiametrum A B, in E.

SED quia punctum E, in latere A B, inueniri Geometricè non poteſt, cùm ibi omnis ſectio rectarum ceſſet; vt illud ſine notabili errore, qui ſcilicet ſub ſenſum cadat, reperiamus, vtemur hoc artificio. Infimam partem A F, lateris A D, ſi ſatis exigua non ſit, ſecabimus bifariam continuè, donec infima particula ſit perexigua: Eodemque modo infimam partem B I, arcus D B, bifariam continuè diuidemus, donec tot fiant ſubdiuiſiones, quot in parte A F, factæ ſunt, vt particula B K, talis pars ſit totius arcus D B, qualis pars eſt A G, totius lateris A D. Particulæ deinde A G, æquales abſcindemus B L, B N, A M, ducemusq; rectas occultas G L, M N. Ducta verò ex A, centro recta occulta A K, quæ ſecet G L, in H, puncto, quod accuratiſſimè notetur, ſumemus ipſi G H, æqualem M P. Si enim Quadratricem vſque ad H, deſcriptam continuabimus æquabili atque vniformi extenſione vſque ad P, ſecabit Quadratrix linea latus A B, in E, puncto, quod quæritur. Nam propter paruam rectarum G H, A E, M P, inter ſe diſtantiam, efficitur, vt fermè ſint æquales, licet Geometricè loquendo, recta A E, ſemper maior ſit aliquanto, quantumuis parum eæ rectæ inter ſe diſtent: ſed exceſſus ille circino deprehendi nō poteſt. Id quod etiam in circumferentia circuli contingit. Rectæ námque G L, A B, M N, ſi parum inter ſe diſtent, in circulo omnino æquales iudicabuntur, quamuis verè A B, aliquantò maior ſit. Itaq; ſi tres illæ rectæ G H, A E, M P, perexiguam habeant diſtantiam inter ſe, dubitari non poteſt, punctum E, in quo Quadratrix linea ſemidiametrum A B, ſecat, ab eo, quod verè in Quadratrice ibi exiſtit, non differre: dummodò puncta H, P, exquiſitè, & ſumma adhibita diligentia, inuenta ſint.

Digitized by Google

RECTAM porrò A D, vocabimus latus Quadratricis, & rectum A E, eiuſdem baſin, ac deniq; punctum A, centrum.

VERVM puncta Quadratricis propè baſim certiùs inueniemus, ſine interſectionibus linearum, hoc modo. Ducta chorda B Q, in quadrante ſecetur in D, biſariá. quod fiet, ſi ex A, ad C, punctum mediú quadrantis recta ducatur A C. Hæc enim ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. rectam B Q, ſecabit biſariã. Deinde rectæ A D, ſumatur æqualis A E; iunctaq; recta D E, ſecetur biſariam in F, quod etiam fiet, ſi ex A, ad I, punctum medium arcus B C, ducatur A I. Hæc enim chordam B C, (ſi duceretur) ſecaret biſariam, ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. ac proinde & rectam D E, ex



a 2. ſexti. ſcholio propoſ 4. huius, a cùm chorda B C, ſit parallela; propterea quòd latera A B, A C, proportionaliter ſecantur in D, E, quippe cùm tam A B, A C, quàm A E, A D, æquales ſint. Rurſus rectæ A F, ſumatur æqualis A G; iunctaq; F G, ſecetur biſariam in H. quod etiam fiet per rectam A K, ductam ad K, punctum medium arcus B I. Atque hoc modo ſi rectæ A H, æqualis ſumatur, & reliqua fiant, vt prius, inuenietur aliud punctum inter H, & G. Et ſic deinceps quotuis alia puncta reperiemus viciniora ipſi A B, per lineas perpendiculares, non autem per obliquas ſectiones.

b 3. tertij. b Eſt enim A D, ad D B, perpendicularis; & A F, ad D E; & A H, ad F G, &c. Omnia verò hæc puncta inuenta D, F, H, &c. ſunt in Quadratrice. quod ita oſtendo. Ductis D L, F M, H N, ipſi A B, parallelis ſecantibus B D, in O, P; c erit vt B D, ad D Q, ita A L, ad L Q; ideoq; & A Q, ſecta erit in L, biſariam. Sectus autem eſt & arcus B Q, in C, biſariam. Igitur, vt oſtenſum eſt, punctum D, eſt in Quadratrice. Rurſus quia D E, ſecta eſt biſariam in F; d erit quoque D B, ſecta biſariam in O; e ideoque erit vt E F, ad F D, ita B O, ad O D. Sed vt B O, ad O D, ita eſt A M, ad M L: Et vt E F, ad F D, ita arcus B I, ad I C; quòd vtrobiq; proportio ſit æqualitatis; erit igitur quoque vt A M, ad M L, ita B I, ad I C. Ergo, vt oſtendimus, ſecabunt ſeſe A I, M O, in puncto Quadratricis. Eademque ratio eſt de alijs punctis has arte inuentis.

ESSE autem hanc lineam inflexam D E, à nobis per puncta deſcriptam Geometricè eandem, quam Dinoſtratus & Nicomedes per duos illos motus imaginarios deſcribi concipiebant, perſpicuum eſt. Nam

Digitized by Google

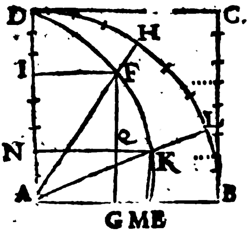
eſt. Nam ſi ſemidiameter A D, circa centrum A, per arcum D B, eodem tempore moueatur vniformi motu, quo latus D C, deorſum fertur motu quoque vniformi; fit, vt quandò ſemidiameter A D, pertranſiuit quamcunque partem arcus D B, tunc latus D C, ſimilem partem laterum D A, C B, percurrerit: Aliàs aut duo illi motus non eſſent vniformes, aut non eodem tempore ad latus A B, tam ſemidiameter A D, quàm latus D C, perueniret. Cum ergo recta ex centro A, per partes arcus D B, emiſſa, & linea parallela per partes laterum D A, C B, ducta, abſcindant ſemper ex arcu D B, & ex lateribus D A, C B, partes ſimiles, ex conſtructione, liquidò conſtat, puncta lineæ inflexæ D E, à nobis Geometricè inuenta à punctis, quæ à duobus illis motibus reperirentur, non differre. Hæc igitur eſt deſcriptio lineæ Quadratricis, quæ Geometrica quodammodo appellari poteſt, quemadmodum & conicarum ſectionum deſcriptiones, quæ per puncta etiam fiunt, vt ab Apollonio traditur, Geometricæ dicuntur, cùm tamen magis errori ſint obnoxia, quàm noſtra deſcriptio, propter inuentionem plurimarum linearum mediarum proportionalium, quæ ad earum deſcriptiones ſunt neceſſaria, quibus in Quadratricis deſcriptione opus non eſt. Quare niſi quis totam ſectionum conicarum doctrinam, quam tanto ingenij acumine Apollonius Pergæus perſecutus eſt, vt propterea Magnus Geometra appellatus ſit, reijcere velit tanquam inutilem, & non Geometricam, (quod neminem facturum exiſtimo, cùm ſectiones cónicas ad demonſtrationes adhibuerint præſtantiſſimi Geometræ. Nam Menechmus Hyperbola, ac Parabola vſus eſt in duarum linearum mediarum proportionalium inter quaſuis duas rectas inuentione: & Archimedes ipſe multa præclarè de eiſdem ſectionibus conicis demonſtrauit: ac denique eiuſmodi ſectiones inſignem vſum habent in re Gnomonica, vt ex noſtra Gnomonica apparet) admittere omnino cogetur deſcriptionem hanc noſtram Quadratricis lineæ, eſſe quodammodo Geometricam. Adde quòd linea conchilis, quâ Nicomedes duas medias lineas proportionales acutiſſimè inueſtigat, per puncta etiam deſcribitur, vt in libro de menſurationibus dicemus. Sed iam lineæ Quadratricis vſum nonnullis propoſitionibus exponamus.

I.

SI ex centro per quæuis puncta lineæ Quadratricis rectæ ducantur vſq; ad circumferentiam Quadrantis ex eodẽ centro deſcripti, & ex eiſdem punctis ad baſin demittantur perpendiculares; & aliæ rectæ eidẽ baſi

paral-

parallelæ: erunt arcus Quadrantis inter ſemidiametros interiecti perpendicularibus, vel ſegmentis ſemidiametri inter parallelas poſitis, proportionales.



EX centro A, per puncta F, K, in Quadratrice vtcunque accepta ducantur rectæ occurrentes arcui Quadrantis in H, L, demittanturque ad baſin A E, perpendiculares F G, K M: & ducantur F I, K N, eidem A E, parallelæ. Dico, vt eſt totus arcus D B, ad arcũ H B, ita eſſe totum latus D A, ad perpendicularem F G, vel ad ſegmentum I A, &c. Quia enim eadem pars eſt arcus D H, totius arcus D B, quæ pars eſt recta D I, totius lateris D A, vt ex deſcriptione lineæ Quadratricis manifeſtum eſt, ſiue ea cogitetur deſcripta duobus illis motibus proportionalibus Dinoſtrati, & Nicomedis, ſiue ea ratione, quam nos præſcripſimus, cùm in ea ſemper arcus D H, tot particulas totius arcus D B, complectatur, quot partes totius rectæ D A, recta D I, continet, propterea quòd rectæ A H, I F, ſe interſecant in puncto F, Quadratricis: Neque hæc ſimilitudo impeditur, etiamſi tam arcus D H, toti arcui D B, quàm recta D I, toti lateri D A, ſit incommenſurabilis, cùm perpetuò Quadratrix eadem vniformitate progrediatur per omnia ſua puncta. Si enim recta D I, non eſt talis pars ſiue commenſurabilis, ſiue incommenſurabilis, totius lateris D A, qualis pars eſt arcus D H, totius arcus D B, ſi cogitetur talis pars minor quàm D I, vel maior, ſecabit parallela ex puncto eius extremo ducta rectã A H, vel ſupra F, vel infra, in puncto, per quod Quadratrix deſcribenda eſt; ac proinde ea non tranſibit per F. quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Quia, inquam, eadem pars eſt arcus D H, totius arcus D B, quæ pars eſt recta D I, totius lateris D A; erit quoque reliquus arcus H B, eadem pars totius arcus D B, quæ pars eſt reliqua recta I A, totius lateris D A, Quocirca erit, vt totus arcus D B, ad arcum H B, ita totum latus D A, ad rectam I A, hoc eſt, ad rectam F G,

a 34. pri *a quæ ipſi I A, æqualis eſt, ac proinde & tamen diuidendo erit, vt arcus D H, ad arcum H B, ita recta D I, ad rectam I A, vel F G, quam conuertendo, vt arcus H B, ad arcum D B, ita recta F G, vel I A, ad rectam D A, &c.*

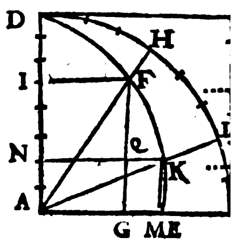
EADEM ratione erit, vt arcus D B, ad arcum L B, ita recta
b 34. *D A, ad rectam N A, ſiue ad K M, b quæ ipſi N A, æqualis eſt: Et*
primi. *vt arcus D L, ad arcum L B, ita recta D N, ad rectam N A, ſiue K M: Et vt arcus L B, ad arcum D B, ita recta K M, vel N A, ad rectam D A. Quo-*

D A. Quoniam igitur eſt, vt L B, ad D B, ita K M, ad D A: Et vt ad H B, ita D A, ad F G, erit ex æquo, vt L B, ad H B, ita K. F G: Et conuertendo, vt H B, ad L B, ita F G, ad K M, hoc e. I A, ad N A: Et diuidendo vt H L, ad L B, ita I N, ad N A, v F Q, ad Q G.

RVRSVS quia eſt vt D H, ad H B, ita D I, ad I A: Et vt ad L B, ita I A, ad N A; erit ex æquo, vt D H, ad L B, ita D N A, ſiue ad K M. Semper ergo arcus inter ſemidiametros inte perpendicularibus, ſiue ſegmentis ſemidiametri inter parallel ſitu proportionales ſunt. Quod eſt propoſitum.

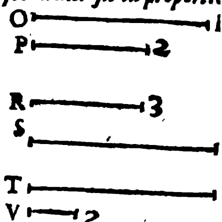
II.

DATVM arcum circuli in datam proportio diuidere.



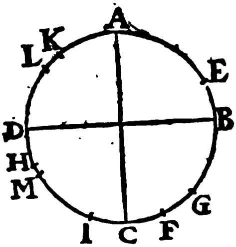
SIT primum arcus H B, in figura antecedente diuidendus in proportionem datam rectæ O, ad rectam P. Ducta ex puncto H, ad centrũ A, recta H A, ſecante Quadratricem in F, ducatur F I, baſi A F, parallela. Deinde recta I A, ita ſecetur in N, ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. vt ſit I N, ad N A, quemadmodum O, ad P, ductaq; N K, baſi A E, parallela ſecante Quadratricem in K, emittaturq; ex centro A, per K, recta ſecans arcum H B, in L. Dico ar H B, in L, ſectum eſſe in proportionem datam O, ad P. Quoniam vt propoſ. 1. oſtendimus, vt H L, ad L B, ita eſt I N, ad N A autem I N, ad N A, ex conſtructione, vt O, ad P; a erit quoq; ad L B, vt O, ad P.

DEINDE totus quadrans D B, ſecandus ſit in proporti R, ad S. Diuiſa ſemidiametro D A, in I, vt ſit D I, ad I A, ſicuti R, ad S, ducatur I F, ipſi A F, parallela ſecãs Quadratricem in F. Ducta igitur recta A F H, erit ex propoſ. 1. D H, ad H B, vt D I, ad I A, hoc eſt, vt R, ad S.



TERTIO ſit idem Quadrans D B, ſecandus in duos arcus, ita vt totus Quadrans ad vnum eorum habeat proportionem datam T, ad V. Tribus rectis T, V, D A, inueniatur qu ta proportionalis, cui æqualis abſcindatur A N. Ducta autem N

ipſi A E, parallela ſecante Quadratricem in K, ducatur ex A, per K, recta A K L. Dico Quadrantem in L, ſectum eſſe, vt proponitur. Eſt enim ex propoſ. 1. D B, ad L B, vt D A, ad N A, hoc eſt, vt T, ad V.



QVARTO ſemicirculus A B C, diuidendus ſit in datam proportionem, videlicet in triplam. Secetur vterque Quadrans A B, B C ſecundum datam proportionem triplam in E, F, & arcui A E, vel B F, æqualis abſcindatur arcus E G. Si igitur ex arcu communi A B C, æqualia demantur, nimirum duo arcus A E, B F, ſimul, & arcus A G, reliqua æqualia fient, nimirum duo arcus E B, F C. ſimul, & arcus G C. Et quoniam eſt, vt A E, ad E B, ita B F, ad F C, a erunt A E, B F, ſimul ad E B, F C, ſimul, hoc eſt, arcus A G, ad arcum G C, vt A E, ad E B: Habet autem A E, ad E B, datam proportionem triplam. Igitur & arcus A G, ad arcum G C, eandem proportionem datam habebit.

a 12. quinti.

QVINTO in eandem proportionem ſecandus ſit arcus A C D, tres Quadrantes continens. Diuiſis tribus Quadrantibus A B, B C, C D, in eam proportionem in E, F, H, ſumatur arcus E G, ipſi B F, & arcus G I, ipſi C H, æqualis. Si igitur ex communi arcu A C D, demantur æqualia, nimirum tres arcus A E, B F, C H ſimul, & arcus A B I, reliqua fient æqualia, nimirum tres arcus E B, F C, H D, ſimul, & arcus I D, Et quia tres arcus A E, B F, C H, ad tres arcus E B, F C, H D, eandem habent proportionem; b habebunt omnes tres ſimul ad omnes tres ſimul, hoc eſt, arcus A B I, ad arcum I D, eandem proportionem, quam vnus arcus A E, ad vnũ arcum E B, videlicet datã.

b 12. quinti.

POSTREMO ſit eodem modo diuidendus arcus A C K. Diuiſis rurſus tribus quadrãtibus, & arcu D K, vt proponitur, in E, F, H, L: ſumatur arcus E G, arcui B F, & arcus G I, arcui C H, & arcus I M, arcui D L, æqualis. Si igitur ex communi arcu A C K, æqualia auferantur, videlicet quatuor arcus A E, B F, C H, D L, ſimul, & arcus A B M, reliqua æqualia fient, quatuor ſcilicet arcus E B, F C, H D, L K, ſimul, & arcus M K. Et quia quatuor arcus A E, B F, C H, D L, ad quatuor arcus E B, F C, H D, L K, eandem proportionem habent: c habebunt omnes quatuor ſimul, ad omnes quatuor ſimul, id eſt, arcus A B M, ad arcum M K, eandem proportionem, quam vnus A E, ad vnum E B, eam videlicet, quæ data eſt. Conſtat ergo id, quod proponitur.

c 12. quinti.

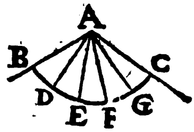
COROLLARIVM.

EX his facilè quemuis angulum rectilineum in duos angulos datam habentes proportionem partiemur, atq; adeò & quemlibet arcum, & angulum in quotuis partes æquales.

DESCRI-

Digitized by Google

DESCRIPTO namq; arcu ex angulo dato, eoq; arcu diuiſo, vt iubetur, ſi ex angulo ad punctum diuiſionis recta ducatur, erit angulus diuiſus, vt arcus: a *cùm ſit vt arcus ad arcum, ita angulus ad angulum in centro.* a 33. ſexti.

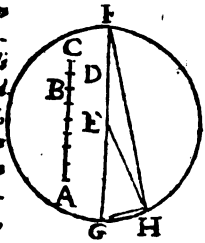


QVOD ſi arcus, vel angulus ſecandus ſit in quotuis æquales partes, diuidendus erit in duas partes proportionem habentes multiplicem denominatam à numero, qui vna vnitate minor ſit numero partium propoſitarum. Vt ſi arcus B C, vel angulus B A C, diuidendus ſit in quinque partes æquales, ſecandus erit arcus B C, in G, in proportionē quadruplam. Nam G C, arcus erit quinta pars arcus B C, cui ſi quatuor æquales abſcindantur G F, F E, E D, D B, diuiſus erit arcus B C, in quinque partes æquales. Et ſi ex A, ducantur rectæ A G, A F, A E, A D, ſectus quoque erit angulus B A C, in quinque angulos æquales. Quod eſt propoſitum.

III.

ISOSCELES triangulum conſtituere, cuius vterque angulorum æqualium ad reliquum hábeat proportionem datam.

SIT data proportio rectæ A B, ad rectam B C. Diuiſa B C, in D, biſariam, & deſcripto ex centro E, circulo quantocunq; F G H, ductaq; in eo diametro F G; ſecetur ita ſemicircumferentia F H G, in H, vt eadem ſit proportio arcus F H, ad arcum H G, quæ rectæ A B, ad rectam B D, iunganturque rectæ H E, H G. Dico iſoſcelis trianguli E G H, vtrumque angulorum æqualium ad baſim G H, habere ad reliquū angulum G E H, proportionem datam A B, ad B C. Cùm enim ſit vt A B, ad B D, ita arcus F H, ad arcum H G; Et vt arcus F H, ad arcum H G, b *ita angulus F G H, ad angulum G F H;* c *erit vt A B, ad B D, ita angulus F G H, ad angulum G F H: Vt autem B D, ad B C, ipſius B D, duplam, ita eſt angulus G F H, ad angulum G E H,* d *qui duplus eſt anguli G E H. Igitur ex æquo erit, vt A B, ad B C, ita angulus E G H, ad angulum G E H. Quod eſt propoſitum.*



b 33. ſexti.
c 11. quinti.
d 10. tertij.

COROLLARIVM.

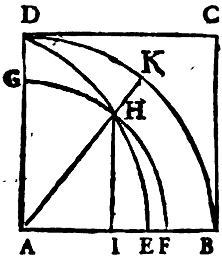
ITAQVE ſi conſtruantur triangula Iſoſcelia, in quibus anguli æquales ad baſin, ad reliquum proportiones habeant tum multiplices ſeſquialteras, tum multiplices ordine, deſcribentur per priora omnes figura

guræ æquilateræ parium laterum, per poſteriora verò figuræ æquilateræ laterum imparium in circulo, vt ad finem lib. 4. oſtendimus.

IDEM efficiemus ſine huiuſmodi triangulis, ſi totam circumferentiam in tot æquales partes ſecemus, vt in coroll. proximè antecedente docuimus, quot latera anguloſue figura inſcribenda habere debet, &c.

IIII.

SI Quadrantis, & Quadratricis idem centrum ſit, erunt arcus Quadrantis, ſemidiameter, & baſis Quadratricis continuè proportionales.

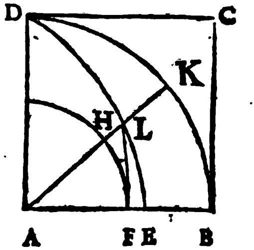


SIT Quadrans & Quadratrix ex eo deſcripta, vt ſuprà. Dico arcum B D, ſemidiametrum D A, & Quadratricis baſin A E, continuò eſſe proportionales, hoc eſt, eſſe B D, ad D A, vt D A, ad A E. Sin minus, ſit vt B D, ad D A, ita D A, ad A F, maiorem ipſa A E, minorémue, ſitq; primum A F, maior quàm A E. Deſcripto ex centro A, quadrante F G, per F, ſecante Quadratricem in H, ducatur per H, ſemidiameter A H K, demittaturq; perpendicularis H I. Quoniam igitur ponitur arcus B D, ad rectam D A, vt D A, hoc eſt, vt A B, ad A F, eſtque vt A B, ſemidiameter ad ſemidiametrum A F, ita arcus B D, ad arcum F G, (Cùm enim ſit ex Pappi demonſtrationibus, vt & nos in libro de menſurationibus oſtendemus, diameter ad diametrum, vt circumferentia circuli ad circumferentiam circuli; a *erit quoq;*
a 15. quinti. *ſemidiameter A B, ad ſemidiametrum A F, vt eadem circumferentia ad eandem circumferentiam;* b *ac proinde etiam vt quarta*
b 15. quinti. *pars circumferentiæ ad quartam partem circumferentiæ, hoc eſt, vt arcus B D, ad arcum F G.)* c *Erit quoq; arcus B D, ad rectam D A,*
c 11. quinti. *vt idem arcus B D, ad arcum F G,* d *ac propterea æquales erunt recta D A, & arcus F G. Quia verò ex theor. 1. eſt, vt arcus B D, ad ar-*
d 9. quinti. *cum B K, ita recta D A, ad rectam H I; & vt arcus B D, ad arcum B K, ita arcus F G, ad arcum F H, quod arcus B D, B K, arcubus F G, F H, ſimiles ſint, vt ſuprà in hoc ſcholio oſtenſum eſt:* e *Erit quoque*
e 11. quinti. *recta D A, ad rectam H I, vt arcus F G, ad arcum F H. Cùm ergo recta D A, oſtenſa ſit arcui F G, æqualis;* f *erit quoq; recta H I, arcui*
f 14. quinti. *F H, æqualis. quod eſt abſurdum. Eſt enim recta A I, minor arcu F H, cùm ea ſit ſemiſſis chordæ ſubtendentis arcum duplum arcus F H: (Nam recta A F,* g *ſecat eam chordam bifariam, ac proinde*
g 3 tertij. *& arcum, ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. chorda autem ſemper ſuo arcu*

minor

minor ſit. Non ergo eſt arcus B D, ad ſemidiametrum D A, vt D A, ad rectam maiorem baſe A E, Quadratricis.

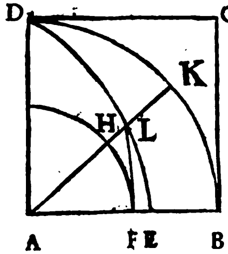
SIT deinde, ſi fieri poteſt, A F, minor quàm A E. Deſcripto igitur ex centro A, per F, Quadrante F G, erigatur ex F, ad A E, perpendicularis F L, ſecans Quadratricem in L, puncto, per quod ſemidiameter ducatur A L K, ſecans arcum F H, in H. Oſtẽdemus ergo, vt prius, arcum F G, rectæ D A, æqualem eſſe: Item ita eſſe arcum B D, ad arcũ B K, hoc eſt, arcum F G, ad arcum F H, vt eſt recta D A, ad rectam L F. Quare cùm arcus F G, oſtenſus ſit æqualis rectæ D A, erit quoq; arcus F H, æqualis rectæ L F. Quod eſt abſurdum. Eſt enim recta L F, maior arcu F H: Nam ſi ex L, duceretur verſus G, alia recta tangens circulum F G, ſicut L F, eundem tangit in F, eſſent hæ tangentes æquales, ex ſchol. propoſ. 36. lib. 3. arcuſq; inter eas interceptus ſecaretur bifariam in H, propterea quòd ex ſcholio propoſ. 37. lib 3. angulus ab eis comprehenſus bifariam divideretur, a ac proinde & angulus in centro A, ſi ad alterum punctum contactus recta adiungeretur: a 4. vel *b ideoq; & arcus quibus inſiſtunt, æquales forent.* 8. primi. *Igitur cùm ex Archimede ad initium de Sphæra & Cylindro, duæ illæ tangentes ſimul maiores ſint arcu ab eis comprehenſo,* b 26. *erit & earum ſemiſſis L F, maior ſemiſſe F H, illius arcus.* tertij. *Non eſt ergo arcus B D, ad ſemidiametrum D A, vt D A, ad rectam minorem baſe A E, Quadratricis: Sed neque vt D A, ad maiorem, vt oſtenſum eſt. Igitur vt D A, ad ipſam baſin A E. Quod eſt propoſitum.*



COROLLARIVM I.

HINC facilè reperiemus rectam cuilibet arcui circuli, cuius quadrans eſt B D, ex quo Quadratrix deſcripta eſt, æqualem.

QVONIAM enim eſt arcus B D, ad D A, vt D A, ad A E: erit convertendo quoq; A E, ad D A, vt D A, ad arcum Quadrantis B D. Si igitur duabus rectis A E, A D, inveniatur tertia proportionalis; c *erit A D, ad eam tertiam, vt ad arcum B D, cùm vtraq; proportio* c 11. *ſit eadem, quæ A E, ad A D.* d *Quare tertia illa proportionalis arcui* quinti. *Quadrantis B D, æqualis erit: Et ſi duplicetur, fiet recta æqualis ſe-* d 9. *micircumferentiæ eiuſdem circuli; ſi verò quadruplicetur, fiet recta* quinti. *toti circumferentiæ æqualis. Quod ſi arcui B K, qui minor eſt Quadrante, invenienda ſit recta æqualis; fiet vt D A, ad perpendicularem L F, ex L, ad A B, demiſſam, ita tertia illa proportionalis ad aliud, inventaq; erit quarta hæc recta æqualis arcui B K. Nam cùm ſit ex theor. 1. vt D A, ad perpendicularem L F, ita arcus D B, ad ar-*



a 11. quinti. cum B K; a erit quoque tertia illa proportionalis ad quartam lineam inuentam, vt arcus D B, ad arcum B K: Eſt autem tertia illa proportionalis æqualis arcui Quadrantis D B. b 14. quinti. b Igitur & quarta linea inuenta æqualis erit arcui B K. Si verò arcui, qui maior ſit quadrante, inuenienda ſit recta æqualis, reperienda primùm erit recta æqualis Quadranti, vel ſemicirculo, vel tribus Quadrantibus, prout arcus datus includit vnum, aut duos, aut tres quadrantes: Deinde alia recta æqualis reliquo arcui, qui minor Quadrante eſt. Nam duæ hæ rectæ coniunctæ erunt toti arcui propoſito æquales.

COROLLARIVM II.

SEQVITVR quoque ex his, ſi baſis Quadratricis A E, ſtatuatur ſemidiameter alicuius circuli, eius latus A D, Quadranti eiuſdem circuli eſſe æquale, & lineam lateris duplam eſſe æqualem ſemicircumferentiæ eiuſdem circuli; & lineam quadruplam toti circumferentiæ eſſe æqualem.

CVM enim vt ſuprà ex Pappo diximus, ſemidiametri ſemicircumferentijs circulorum, atque adeò & quadrantibus ſint proportionales; erit vt D A, ad A E, hoc eſt, vt tertia illa proportionalis ad D A, ita Quadrans B D, ad Quadrantem ſemidiametri A E. Eſt autem tertia illa proportionalis æqualis Quadranti B D, vt oſtenſum

c 14. quinti. eſt: c Igitur & recta D A, Quadranti ſemidiametri A E, æqualis erit. Dupla linea ergo ipſius D A, ſemicircumferentiæ circuli, cuius ſemidiameter A E, & quadrupla toti circumferentiæ erit æqualis.

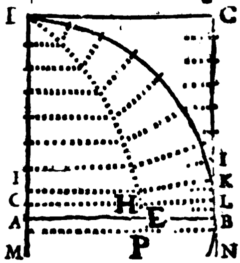
EADEM ratione, ſi duæ rectæ eandem proportionem habeant,
B - - - - - - quam D A, A E, & minor ponatur ſemidiameter alicuius
C - - - - circuli, oſtendetur maior æqualis quadranti illius circuli, &c. Sit enim vt D A, ad A E, ita recta aliqua B, ad rectam C. Eritque permutando, vt D A, ad B, ita A E, ad C. Vt autem A E, ad C, ita eſt quadrans ſemidiametri A E, ad quadrantem ſemidiametri C, vt ſuprà ex Pappo dictum eſt. Igitur erit quoque vt D A, ad B, ita quadrans ſemidiametri B, ad quadrantem ſemidiametri C. Cùm ergo D A, æqualis ſit, vt oſtenſum eſt, quadranti ſemidiametri A E,

d 14. quinti. d Erit quoque B, æqualis quadranti ſemidiametri C. Quod eſt propoſitum.

SED ſi lubeat per numeros explorare, quamnam proportionem plus minus, habeat ex hoc præclaro inuento circumferentia circuli

ad eam

ad eius diametrum, vel (quod idem eſt) ſemicircumferentia ad ſemidiametrum, a cùm ſit vt circumferentia ad diametrum, ita ſemicircumferentia ad ſemidiametrum, efficiemus id hoc modo. Cogitemus Quadrantem D B, in figura, in qua Quadratricem deſcripſimus, diuiſum eſſe in grad. 90. & ſingulos gradus in Min. 60. vt totus arcus D B, complectatur 5400. particulas æquales. Si igitur latus D A, concipiamus in totidem æquales particulas diuiſum eſſe, erit parallela ex vltima particula vſque ad Quadratricem educta fermè æqualis baſi A E, ob exiguam diſtantiam illius parallelæ, & baſis A E, cùm in ea figura parallela quoque G H, auferens A G, particulam ſextamdecimam, quæ $\frac{1}{16}$. multò maior eſt quàm $\frac{1}{5400}$. vix à baſe A E, ſuperetur: ita vt ſine errore notabili eam parallelam pro baſe accipere poſſimus. Quia verò vltima illa particula lateris D A, eſt ſinus arcus Min. 1. & parallela illa ſinus complementi, nimirum arcus grad. 89. Min. 59. vt conſtat, ſi ponatur A G, vltima particula, & arcus B K, vltimum Minutum, ducaturque recta A H. Nam G H, erit ſinus anguli G A H, grad. 89. Min. 59. ac proinde A G, ſinus anguli A H G, Min. 1. poſito ſinu toto A H, vt in tractatione Sinuum oſtendimus. Si igitur ſinus totus A H, ſtatuatur 10000000. (Ita enim exquiſitius proportio optata inuenietur, quàm ſi ſinus totus ponatur tantùm 100000. cùm in hoc ſinus grad. 89. Min. 59. à ſinu toto non differat.) erit A G, 2909. & G H, 9999999. at totum latus D A, earundem partiũ erit 15708600. vt conſtat, ſi 5400. particulæ lateris D A, ducantur in vnam A G, quam diximus eſſe 2909. Duplum ergo lateris D A, erit 31417200. Et quoniam ex coroll. 2. huius propoſ. 4. duplum lateris D A, æquale eſt ſemicircumferentiæ, cuius ſemidiameter A E; erit proportio ſemicircumferentiæ illius ad ſemidiametrum A E, eadem ferè, quæ numeri 31417290. ad 9999999. denominata à $3\frac{1417293}{9999999}$. hoc eſt, in minimis terminis, à $3\frac{157467}{1111111}$. quæ proportio minor eſt, quàm tripla ſeſquiſeptima, ſiue tripla ſuperdecupartiens ſeptuageſimas, maior autem, quàm tripla ſuperdecupartiens ſeptuageſimas primas; inter quas duas proportiones vera proportio circumferentiæ ad diametrum conſiſtit, vt ab Archimede demonſtratum eſt.



a 15. quinti.

ITAQVE vt recta linea circumferentiæ circuli inueniatur æqualis, ſatis eſt punctum E, inuenire, etiamſi tota linea Quadratrix non ſit deſcripta. Vt autem arcus, vel angulus in datam proportionem ſecetur, non indigemus puncto E, vt perſpicuum eſt.

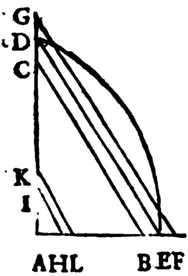
V.

DATO circulo quadratum æquale conſtituere.

QVONIAM Archimedes demonſtrauit circulum quemcunq; æqualem eſſe triangulo rectangulo, cuius vnum latus circa angulum rectum ſemidiametro circuli, alterum verò circumferentiæ eiuſdem æquale eſt; atque hinc nos propoſ. 4. figurarum Iſoperimetrarum in commentarijs in ſphæram oſtendimus, eundem circulum rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro, & ſemicircumferentia, æqualem eſſe: ſi ex coroll. præcedentis propoſ. inueniatur linea recta æqualis ſemicircumferentiæ dati circuli, & rectangulo contento ſub illa recta, &
a 14. ſecundi. *ſemidiametro a conſtruatur quadratum æquale, erit idem hoc quadratum dato circulo æquale.*

INVENIETVR autem recta æqualis ſemicircumferentiæ,
b 12. ſexti. *vel Quadranti, vel toti circumferentiæ, b ſi fiat vt baſis Quadratricis deſcripta ad eiuſdem latus, ita ſemidiameter dati circuli ad aliud. Inuenta enim quarta linea æqualis erit Quadranti circuli, vt in coroll. 2. præcedentis propoſ. diximus, atq; adeò duplicata efficiet lineam ſemicircumferentiæ æqualem, quadruplicata autem rectam toti circumferentiæ æqualem exhibebit.*

VERVM vt expeditius quilibet circulus poſſit quadrari, conſtruenda erunt duæ figuræ quadrandis circulis aptiſſimæ, hoc modo. Conſtituatur angulus rectus D A E, ſitq; A D, æqualis ſemidiametro Quadrantis, ex quo Quadratrix deſcripta eſt, & A E, baſi eiuſdem Quadratricis æqualis; Vel ex centro A, noua Quadratrix deſcribatur D E, cuius latus A D, & baſis A E. Ducta autem recta D E, conſtructum erit vnum inſtrumentum circulis quadrandis aptiſſimum. Si enim circuli quadrandi ſemidiameter æqualis ſit recta A E, erit recta A D, circumferentiæ Quadrantis eiuſdem circuli æqualis, vt ex coroll. 2. antecedentis propoſ. liquet. Si autem ſemidiameter minor ſit, quàm A E, abſcindemus ei æqualem A B, parallelamq; ipſi D E, agemus B C. Si deniq; ſemidiameter ſit maior, quàm A E,



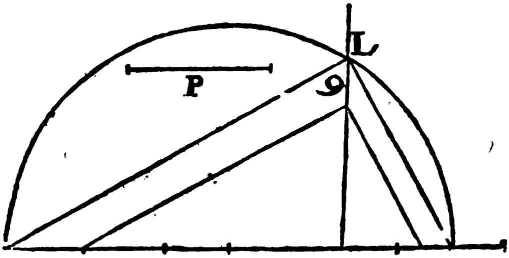
abſcindemus ei æqualem A F, ex A E, producta, & per F, ipſi D E, parallelam agemus F G. Erit enim ex coroll. 2. præcedentis propoſ. recta A C, æqualis circumferentiæ Quadrantis, cuius ſemidiameter A B: Recta verò A G, circumferentiæ Quadrantis æqualis erit, cuius ſemi-
c 2. vel *diameter A F: c propterea quod eſt, vt A E, ad A D, ita tam A B, ad*
4. ſexti. *A C, quàm A F, ad A G.*

DEINDE ducta recta H I, cuiuſcunq; longitudinis, excitetur ad

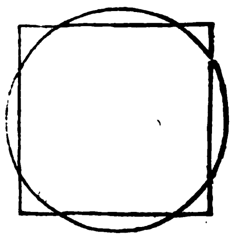
eam

eam perpendicularis quantacunque K L; paratumq; erit alterum inſtrumentum quadrandis circulis accommodatum.

PER duo hæc inſtrumenta nullo negotio quemcunq; circulum quadrabimus hac ratione. Sit quadrandus circulus, cuius ſemidiametro in priori inſtrumento æqualis ſit recta A B, & per B, ipſi D E



parallela agatur B C. In poſteriori verò inſtrumento ſumantur duæ K M, M H, ipſi A C, æquales, & recta K I, ſemidiametro A B, æqualis. Diuiſa autem tota recta H I, bifariam in N, deſcribatur ex N, ad interuallum N H, vel N I, ſemicirculus ſecans perpendicularem K L, in L. Dico quadratum ex K L, circulo dato, cuius ſemidiameter A B, in priori inſtrumento, vel K I, in poſteriori, æquale eſſe. Quoniã enim K L, media proportionalis eſt inter K H, K I, ex ſcholio propoſ. 13. huius lib. a erit quadratum ex K L, rectangulo ſub K H, K I, æquale. Cùm ergo hoc rectangulum circulo dato ſit æquale, vt ad initium huius propoſ. diximus, quòd K H, ſit æqualis ſemicircumferentiæ, & K I, ſemidiametro; erit quoq; idem quadratum ex K L, dato circulo, cuius ſemidiameter A B, vel K I, æquale. Si igitur quadratum rectæ K L, deſcribatur, & ex eius centro ad interuallum A B, in priori inſtrumento, vel K I, in poſteriori circulus deſcribatur, habebitur quadratum æquale circulo, vt in appoſita figura apparet. a 17. ſeptimi.



CÆTERVM diuiſio rectæ H I, in poſteriori inſtrumento in duas partes æquales facilè ſic fiet. Diuiſa ſemidiametro K I, bifariam in O, (hæc enim quia minor eſt, quàm H I, facilè bifariã ſecabitur.) accipiatur recta K O, æqualis M N. Nam N, punctum erit medium rectæ H I. Cùm enim æquales ſint M N, O I; addita communi N O, erit N I,

ipſi M O, æqualis. Eſt autem M O, ipſi H N, æqualis. (quia enim æquales ſunt H M, M K; additis æqualibus M N, K O, tota æqualia ſiunt H N, M O) igitur & N I, ipſi H N, æqualis erit.

VI.

DATO quadrato circulum æqualem deſcribere.

SIT datum quadratum, cuius latus P. Huic in poſteriori inſtrumento antecedentis propoſ. ex perpendiculari K L, abſcindatur æqualis K Q. Propoſito autem quouis circulo, cuius ſemidiameter K I, inueniatur per antecedentem propoſ. ei quadratum æquale, cuius latus K L. Deinde ducta recta L I, agatur ei parallela Q R. Dico circulum, cuius ſemidiameter K R, æqualem eſſe quadrato, cuius latus K Q, vel P. Inuenta namque per propoſ. antecedentem recta K H, quæ ſemicircumferentiæ circuli, cuius ſemidiameter K I, ſit æqualis, ductaque recta L H, agatur ei parallela Q S. Quoniam igitur, ob triangulorum ſimilitudinem, eſt vt H K, ad K L, ita S K, ad K Q; & vt K L, ad K I, ita K Q, ad K R: erit ex æquo, vt H K, ad K I, ita S K, ad K R. Cùm ergo H K, æqualis ſit ſemicircumferentiæ circuli, cuius ſemidiameter K I, erit quoque ex coroll. 2. propoſ. 4. S K, æqualis ſemicircumferentiæ circuli, cuius ſemidiameter K R. Quia verò K Q, ex coroll. propoſ. 8. huius lib. media proportionalis eſt inter S K, K R, quòd angulus R Q S, rectus
a 29. primi. *ſit, a quippe cùm eius partes R Q K, S Q K, partibus I L K, H L K, recti anguli H L I, æquales ſint: (Nam b angulus H L I, rectus eſt,*
b 31. tertij. *cùm ſit in ſemicirculo, vt patet ex praxi antecedentis propoſ. qua K L, media proportionalis inter H K, K I, reperitur.) c erit quadratum ex*
c 17. ſexti. *K Q, æquale rectangulo ſub S K, K R, hoc eſt, circulo, cuius ſemidiameter K R, hoc eſt, circulus ſemidiametri K R, æqualis eſt quadrato lateris K R, vel P. Quod eſt propoſitum.*

COROLLARIVM.

EX his, quæ demonſtrata ſunt, conſtruemus circulum cuicunque figuræ rectilineæ æqualem; & contrà, cuicunque circulo figuram rectilineam æqualem conſtituemus, quæ alteri datæ figuræ rectilineæ cuicun-
d 14. ſecundi. que ſimilis ſit. Nam ſi datæ figuræ rectilineæ *d* deſcribamus quadratum æquale, & huic quadrato circulum æqualem conſtituamus, ex propoſ. 6. erit hic idem circulus datæ figuræ rectilineæ æqualis.

e 25. ſexti. RVRSVS ſi per propoſ. 5. dato circulo quadratum æquale conſtruamus, huic autem quadrato *e* conſtituamus figuram rectilineam æqualem, & ſimilem alteri datæ rectilineæ figuræ, erit eadem hæc figura rectilinea conſtituta, dato circulo æqualis. Quod eſt propoſitum.

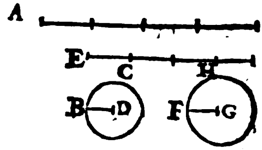
VII.

DATÆ rectæ lineæ circumferentiam circuli reperire æqualem.

QVO pacto recta linea reperiatur circumferentiæ dati circuli æqualis,

Digitized by Google

qualis, docuimus propoſ. 5. nunc autem, vt viciſſim rectæ datæ lineæ circumferentia circuli æqualis inueniatur, ita agendum erit. Sit data recta A, cui circumferentia æqualis inuenienda eſt. Deſcripto quouis circulo B C, ex centro D, inueniatur ei recta æqualis E. quod facilè ita fiet. In priori inſtrumento propoſ. 5. ſumatur A H, æqualis ſemidiametro B D, deſcripti circuli, & per H, agatur ipſi D E, parallela H I. Nam A I, quadruplicata dabit rectam

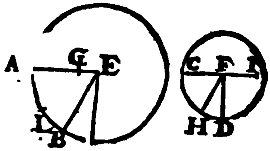


E, circumferentiæ circuli B C, æqualem, vt propoſ. 5. diximus. Deinde tribus rectis E, A, B D, inueniatur quarta proportionalis F G, atque ex G, ad interuallum G F, circulus deſcribatur F H. Dico eius circumferentiam datæ rectæ A, æqualem eſſe. Cùm enim ſit, vt E,
ad A, ita B D, ad F G; hoc eſt, a *ita tota diameter circuli B C, ad* a 15.
totam diametrum circuli F H: Sit autem vt diameter ad diametrum, quinti.
ita circumferentia B C, ad circumferentiam F H, vt Pappus demon-
ſtrauit: b *erit quoque vt E, ad A, ita circumferentia B C, ad cir-* b 11.
cumferentiam F H. Cùm ergo E, facta ſit æqualis circumferentiæ quinti.
B C; c *erit & recta A, circumferentiæ F H, æqualis, hoc eſt, cir-* c 14.
cumferentia circuli F H, inuenta eſt datæ rectæ A, æqualis. Quod eſt quinti.
propoſitum.

ALITER, & faciliùs. Quartæ parti rectæ datæ A, accipiatur æqualis A K, in priori inſtrumento propoſ. 5. & per K, agatur K L, ipſi D E, parallela. Nam circumferentia circuli, cuius ſemidiameter A L, æqualis erit datæ rectæ A; propterea quòd eius circumferentiæ quadrans æqualis eſt rectæ A K, quartæ parti datæ rectæ A, vt propoſ. 5. declarauimus.

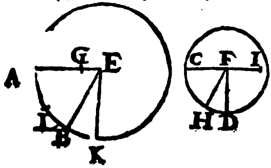
VIII.

DATIS duobus circulis inæqualibus, datoque arcu in vno eorum, ex altero arcum æqualem abſcindere. Oportet autem arcum in maiore circulo datum non eſſe maiorem circumferentia minoris circuli.



SINT duo circuli inæquales A B, C D, quorum centra E, F, & ſemidiametri A E, C F, ſitque A B, maior, & C D, minor. Datus autem primùm ſit in minori circulo arcus C D, cui æqualis abſcindendus ſit ex maiore. Quoniam circulus A B, circulo C D, maior eſt, erit & ſemidiameter A E, ſemidiametro C F, maior. Abſcindatur ergo

A G, ipſi C F, æqualis, ſeceturque arcus C D, ita in H, ex propoſ. 2. vt eadem ſit proportio arcus C H, ad arcum D H, quæ recta A G, ad rectam G E; arcuiq; C H, ſimilis auferatur arcus A B. quod facilè fiet, ſi ducta recta F H, angulo C F H, æqualis fiat angulus A E B. Dico arcum A B, dato arcui C D, æqualem eſſe. Quoniam



enim eſt, vt A G, ad G E, ita arcus C H, ad arcum H D. Et conuertendo, vt E G, ad A G, ita arcus D H, ad arcum C H; erit componendo quoque A E, ad A G, hoc eſt, ad C F, ipſi A G, æqualem, vt arcus C D, ad arcum C H: Eſt autem, vt A E, ſemidiameter ad ſemidia-
a 15. metrum C F, a hoc eſt, vt tota diameter ad totam diametrum, ita
quinti. circumferentia circuli A B, ad circumferentiam circuli C D, vt Pap-
b 11. pus demonſtrauit, hoc eſt, ita arcus A B, ad ſimilem arcum C H.
quinti. b Igitur erit quoq; vt arcus C D, ad arcum C H, ita arcus A B, ad
c 9. eundem arcum C H; ac proinde arcus C D, A B, c æquales inter ſe e-
quinti. runt. Quod eſt propoſitum.

D A T V S deinde ſit in maiore circulo arcus A B, non maior, quàm circumferentia circuli C D, minoris, ex quo arcui A B, æqualis arcus abſcindendus eſt. Quoniam circulus A B, maior eſt circulo C D, erit & ſemidiameter A E, ſemidiametro C F, maior. Producta ergo C F, ad I, vt C I, ipſi A E, ſit æqualis, ſecetur per propoſ. 2. arcus A B, in L, vt eadem ſit proportio A B, ad B L, quæ C F, ad F I; arcuiq; B L, ſumatur æqualis arcus B K, ac toti arcui A K, ſimilis auferatur C D, quod facilè fiet, ſi ducta recta E K, angulo A E K, angulus C F D, æqualis fiat. Dico arcum C D, arcui dato A B, æqualem eſſe. Quoniam enim eſt, vt C F, ad F I, ita arcus A B, ad arcum B L, id eſt, ad arcum B K, ipſi B L, æqualem; erit componendo quoque, vt C I, ad F I, ita arcus A K, ad arcum B K: Et per conuerſionem rationis, vt C I, ad C F, hoc eſt, vt A E, ad C F, ita arcus A K, ad arcum A B,
d 15. Eſt autem, vt ſemidiameter A E, ad ſemidiametrum C F, d hoc eſt:
quinti. vt tota diameter ad totam diametrum, ita, ex demonſtratis à Pappo,
e 11. circumferentia circuli A B, ad circumferentiam circuli C D, id eſt,
quinti. ita arcus A K, ad arcum ſimilem C D. e Igitur erit etiam, vt arcus
f 9. A K, ad arcum A B, ita idem arcus A K, ad arcum C D, proptereaq;
quinti. arcus A B, C D, f æquales erunt inter ſeſe. Quod eſt propoſitum.

B R E V I V S. Arcui C D, reperiatur æqualis recta, per coroll. 1. propoſ. 4 Quadratricis; & huic rectæ æqualis arcus A B, vt in ſequente coroll. 1. dicetur. Eodem pacto arcui A B, reperiatur recta æqualis, & huic rectæ æqualis arcus C D: factumq; erit, quod iubetur.

COROL-

COROLLARIVM I.

EX his, quæ demonſtrata ſunt, manifeſtum eſt, cuinis datæ rectæ abſcindi poſſe ex circulo quouis, cuius circumferentia minor non ſit, quam recta data, circumferentiam æqualem, quemadmodum ſupra oſtenſum eſt in coroll. 1. propoſ. 4. datæ cuilibet circumferentiæ inueniri poſſe rectam æqualem: hoc modo. Inueniatur per ea, quæ paulo ante in coroll. 1. propoſ. 4. oſtendimus, recta linea quadranti dati circuli æqualis; & ſi quidem hæc linea inuenta æqualis fuerit rectæ lineæ datæ, erit circumferentia quadrantis datæ rectæ lineæ æqualis.

SI vero illa recta quadranti circuli inuenta æqualis, fuerit maior, quam data recta linea; ſecetur quadrantis circumferentia in duas partes, ex propoſ. 2. ita vt quadrans ad vnam partem habeat eandem proportionem, quam inuenta recta linea ad lineam rectam datam. Pars enim illa quadrantis datæ rectæ lineæ erit æqualis. Nam cum ſit, vt inuenta recta ad datam rectam, ita quadrans ad illum arcum abſciſſum; ſit autem recta inuenta quadranti æqualis, *a* erit quoque data linea recta arcui abſciſſo æqualis. a 14. quinti.

SI denique recta illa inuenta æqualis quadranti, fuerit minor, quam recta linea data; ſumatur illius dupla, quæ nimirum circumferentiæ ſemicirculi ſit æqualis. Nam ſi hæc æqualis fuerit datæ rectæ lineæ, erit circumferentia ſemicirculi eidem datæ rectæ æqualis.

SI autem dupla illa recta linea fuerit maior, quam data linea recta, ſecetur ſemicirculi circumferentia in duos arcus, ita vt ſemicircumferentia ad vnum eorum eandem habeat proportionem, quam dupla illa recta linea ad datam rectam, quod quidem facile fiet, ſi datæ rectæ ex dupla illa linea recta abſcindatur æqualis, & ſemicircumferentia ſecetur, per propoſ. 2. vt ſecta eſt recta illa dupla. Erit enim componendo, vt tota illa recta dupla ad partem abſciſſam, hoc eſt, ad datam rectam, ita

tota ſemicircumferentia ad arcum abſciſſum. Arcus enim ille datæ rectæ æqualis erit. Cum enim ſit, vt dupla illa recta ad rectam datam, ita ſemicircumferentia ad eum arcum; ſit autem recta illa dupla æqualis ſemicircumferentiæ; *a* erit quoq; data recta illi arcui æqualis.

a 14. quinti.

SI denique dupla illa recta linea fuerit minor, quam data linea recta, addatur ei prior linea inuenta, quæ nimirum quadranti circuli eſt æqualis, vt tota recta compoſita æqualis ſit circumferentiæ trium quadrantum, & tripla prioris lineæ inuentæ. Nam ſi hæc linea tripla fuerit datæ rectæ æqualis; erit arcus trium quadrantum eidem datæ rectæ æqualis.

SI vero tripla illa linea recta fuerit maior, quam recta linea data, ſecetur circumferentia trium quadrantum in duos arcus, ex propoſ. 2. ita vt ad vnum eorum eandem habeat proportionem, quam tripla illa recta ad rectam datam, quod facile etiam fiet, ſi datæ rectæ ex tripla illa linea recta abſcindatur recta æqualis, & circumferentia trium quadrantum ſecetur, per propoſ. 2. vt recta illa tripla ſecta eſt. Nam componendo erit, vt tota illa recta tripla ad partem abſciſſam, id eſt, ad datam rectam, ita tota circumferentia trium quadrantum ad arcum abſciſſum. Arcus enim ille datæ rectæ lineæ erit æqualis. Quoniam enim eſt, vt tripla illa recta ad rectam datam, ita circumferentia trium quadrantum ad arcum abſciſſum; eſtque tripla illa recta circumferentiæ trium quadrantum æqualis; *b* erit quoque data linea recta æqualis illi arcui abſciſſo.

b 14. quinti.

DENIQVE ſi tripla illa linea recta fuerit minor, quam data recta linea, addatur ei rurſus prior linea inuenta quadranti æqualis, vt tota recta compoſita fiat æqualis toti circumferentiæ circuli, & prioris lineæ inuentæ quadrupla. Si namque linea hæc quadrupla fuerit æqualis datæ rectæ lineæ, erit tota circumferentia dati circuli datæ lineæ rectæ æqualis.

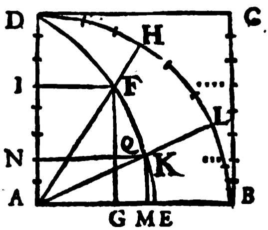
AT vero ſi illa linea quadrupla maior fuerit, quàm data

Digitized by Google

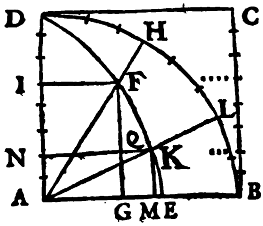
data recta linea, (minor eſſe non poteſt: alioquin data recta eſſet maior, quam circumferentia dati circuli, quod eſt contra hypotheſin) ſecetur tota circumferentia in duos arcus, ex propoſ. 2. vt ad vnum eorum eandem proportionem habeat, quam quadrupla illa linea ad datam rectam. quod facile etiam fiet, ſi ex quadrupla illa recta auferatur recta æqualis datæ rectæ, & tota circumferentia circuli ſecetur, vt quadrupla illa recta eſt ſecta. Erit namque componendo, vt tota illa quadrupla recta ad partem abſciſſam, id eſt, ad datam rectam, ita tota circumferentia circuli ad arcum abſciſſum. Arcus enim ille datæ rectæ erit æqualis. Cum enim ſit, vt quadrupla illa linea ad rectam lineam datam, ita tota circumferentia ad arcum abſciſſum; ſit autem illa linea quadrupla toti circumferentiæ æqualis; *a* erit quoque data recta linea arcui abſciſſo æqualis. a 14. *quinti.*

ALITER, & breuius. Inuenta ex coroll. 1. propoſ. 4. Quadratricis, vel ex propoſ. 5. eiuſdem, recta æquali circumferentiæ dati circuli, abſcindatur ex ea datæ rectæ lineæ æqualis, & tota circumferentia per propoſ. 2. ſecetur, vt ſecta eſt inuenta illa recta in duas partes. Nam componendo erit, vt tota illa recta ad eius partem ablatam, hoc eſt, ad datam rectam, ita tota circumferentia ad arcum abſciſſum. Cum ergo tota illa recta ſit æqualis toti circumferentiæ, *b* erit quoque data recta arcui abſciſſo æqualis. Quod eſt propoſitum. b 14. *quinti*

COROLLARIVM II.



EX iis quoque, quæ dicta ſunt, inferri poteſt, tam arcus, quam angulos rectilineos reperiri incommenſurabiles inter ſe. Sit enim arcus H B, & angulus rectilineus H A B. Dico tam arcum H B, ſecari poſſe in duos arcus inter ſe incommenſurabiles, quam angulum



lum H A B, in duos angulos incommenſurabiles inter ſe. Deſcripta enim Quadratrice D E, quæ rectam H A, ſecet in F, ducatur per F, baſi A E, parallela F I. Deinde inuentis duabus rectis inter ſe incommenſurabilibus, vt libro 10. docetur, diuidatur recta I A, in N, ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. ita vt I N, ad N A, eandem proportionem habeat, quam duæ rectæ inuentæ; atque adeo & I N, N A, incommenſurabiles quoque ſint. Ducta autem recta N K, ipſi A E, parallela, quæ Quadratricem ſecet in K, ducatur ex centro A, per K, recta ſecans arcum H B, in L. Dico tam arcus H L, L B, quam angulos H A L, L A B, inter ſe eſſe incommenſurabiles. Quoniam enim per propoſ. 1. eſt, vt I N, ad N A, ita arcus H L, ad arcum L B: ſunt autem I N, N A, incommenſurabiles; erunt & arcus H L, L B, incommenſurabiles. Cum ergo ſit quoque, a vt arcus H L, ad arcum L B, ita angulus H A L, ad angulum L A B; erunt etiam anguli H A L, L A B, incommenſurabiles inter ſe. Quod eſt propoſitum.

a 33. ſexti.

FINIS ELEMENTI SEXTI.

Digitized by Google

QVID IN SINGVLIS xv. Libris agat Euclides.

EX FEDERICO COMMANDINO.

IN primo libro diſputat de rectilineis figuris, videlicet de triangulis, ac parallelogrammis. Et primum triangulorum ortus, proprietateſque tradit, tum iuxta angulos, tum iuxta latera, ipſa inter ſe comparans. Deinde parallelarum proprietates interiiciens ad parallelogramma tranſit, eorumque ortum declarat: & ſymptomata, quæ in ipſis ſunt, demonſtrat. Poſtea triangulorum, parallelogrammorumque communicationem oſtendit, & quonam pacto parallelogrammum fiat æquale triangulo. Denique de iis, quæ in triangulis rectangulis à lateribus deſcribuntur, quadratis; quam habeat proportionem, quod à ſubtendente rectum angulum deſcribitur, ad ea, quæ à comprehendentibus ipſum fiunt.

IN ſecundo libro parallelogrammum rectangulum, & gnomon definitur. Deinde parallelogrammorum rectangulorum, & quadratorum, quæ ex rectarum linearum ſectionibus fiunt, proportiones declarantur. Poſtea de quadratis, quæ à lateribus obtuſangulorum, & acutangulorum triangulorum deſcribuntur, quam habeant proportionem, quæ à ſubtendentibus obtuſum, & acu-

tum

Digitized by Google

tum angulum fiunt, ad ea, quæ à comprehendentibus deſcribuntur. Denique qua ratione dato rectilineo æquale quadratum conſtituatur.

IN tertio libro agitur de iis, quæ circulis accidunt, & de rectis lineis in circulo, vel ad circulum ductis: itemque de angulis, qui ad circulorum centra, vel ad circumferentias conſiſtunt.

IN quarto libro de figurarum planarum inſcriptionibus, & circumſcriptionibus.

IN quinto de analogiis.

IN ſexto de proportionibus figurarum inter ſeſe: de figuris ſimilibus, & reciprocis: de rectis lineis proportionalibus: de parallelogrammorum applicationibus ad rectas lineas, quæ vel deficiant parallelogrammis ſimilibus, vel excedant: quomodo recta linea terminata, extrema ac media ratione ſecetur: de proportionibus circumferentiarum, & angulorum, itemque Sectorum, in circulis æqualibus.

IN ſeptimo agitur de numeris primis, & compoſitis, & quo pacto numerorum non primorum maxima communis menſura inueniatur: de numerorum parte, & partibus: de numeris multiplicibus: de proportionalibus: & quæcunque in quinto libro de magnitudinibus generatim, eadem fere & de numeris particulatim hic demonſtrantur.

IN octauo de numeris deinceps proportionalibus: de numeris planis: de quadratis: de cubis, & ſolidis: de ſimilibus planis, & ſimilibus ſolidis.

IN nono item de ſimilibus planis: de cubis, & ſolidis: & de numeris deinceps proportionalibus ſiue ab vnitate, ſiue ſimpliciter: de numeris primis: de numeris paribus,

Digitized by Google

ribus, de imparibus, de pariterparibus, de pariter imparibus, de pariterparibus & pariter imparibus: de numeris perfectis.

IN decimo de commenſurabilibus, & incommenſurabilibus magnitudinibus, itemque de rationalibus, & irrationalibus.

IN vndecimo primum agitur de rectis lineis, quatenus ad ſolida corpora referuntur, videlicet quando ſint in vno plano; quando rectæ, ſeu perpendiculares ad planum; quando parallelæ: quomodo à puncto in ſublimi dato ad planum perpendicularis ducatur. Deinde vero de planis ſimul diſſerit, tum de ſolidis angulis. Poſtremo de ſolidis parallelepipedis, & nonnulla de Priſmatibus.

IN duodecimo de pyramidibus, & priſmatibus: poſtea de conis, & cylindris: demum de ſphæris.

IN tertiodecimo de conſtitutione quinque figurarum mundanarum, quas corpora regularia appellant: videlicet tetraedri vel pyramidis, hexaedri vel cubi, octaedri, dodecaedri, & icoſaedri; ad quorum euidentiam præmittit nonnulla de iis, quæ accidunt rectæ lineæ extrema ac media ratione ſectæ: de pentagono æquilatero, de hexagoni, & decagoni lateribus, & de triangulo æquilatero.

IN quartodecimo de dodecaedri; & icoſaedri in eadem ſphæra deſcriptorum comparatione.

IN quintodecimo & vltimo de inſcriptione quinque figurarum iam dictarum, & de earundem lateribus, & angulis.

EVCLI-

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

C. 23
17
21

Digitized by Google

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06388 8765

A 543936

Digitized by Google

2. Dec.

Digitized by Google